

Misura di impedenza

Si vuole misurare un'impedenza, modellata come un parallelo di una resistenza ed una capacità, tramite metodo volt-amperometrico, prima con l'utilizzo di un oscilloscopio, lavorando a tre frequenze distinte, quindi mediante un impedenzometro, lavorando a cinque frequenze distinte.



Strumentazione utilizzata e condizioni operative

STRUMENTAZIONE

1. Generatore di segnali AGILENT 33220
20MHz Function/Arbitrary Waveform
Generator
2. Oscilloscopio GW INSTRON
GDS-820C/150MHz/ET25GS/s
3. Impedenziometro AGILENT 4263 B
LCR METER
4. Trasformatore di isolamento AOIP
TE1 / k=1
5. Resistenza campione
1433-M/ Decade Resistor/ General Radio
USA (x 2)
6. Condensatore Type 509-L
Serial n° 4751/ General Radio CO.
Cambridge Mass USA

CONDIZIONI OPERATIVE

1. Temperatura Ambiente
 $T_{AMB} = \quad ^\circ\text{C}$
2. Pressione Atmosferica
 $P_{AMB} = \quad \text{atm}$

Progetto del Circuito di Misura

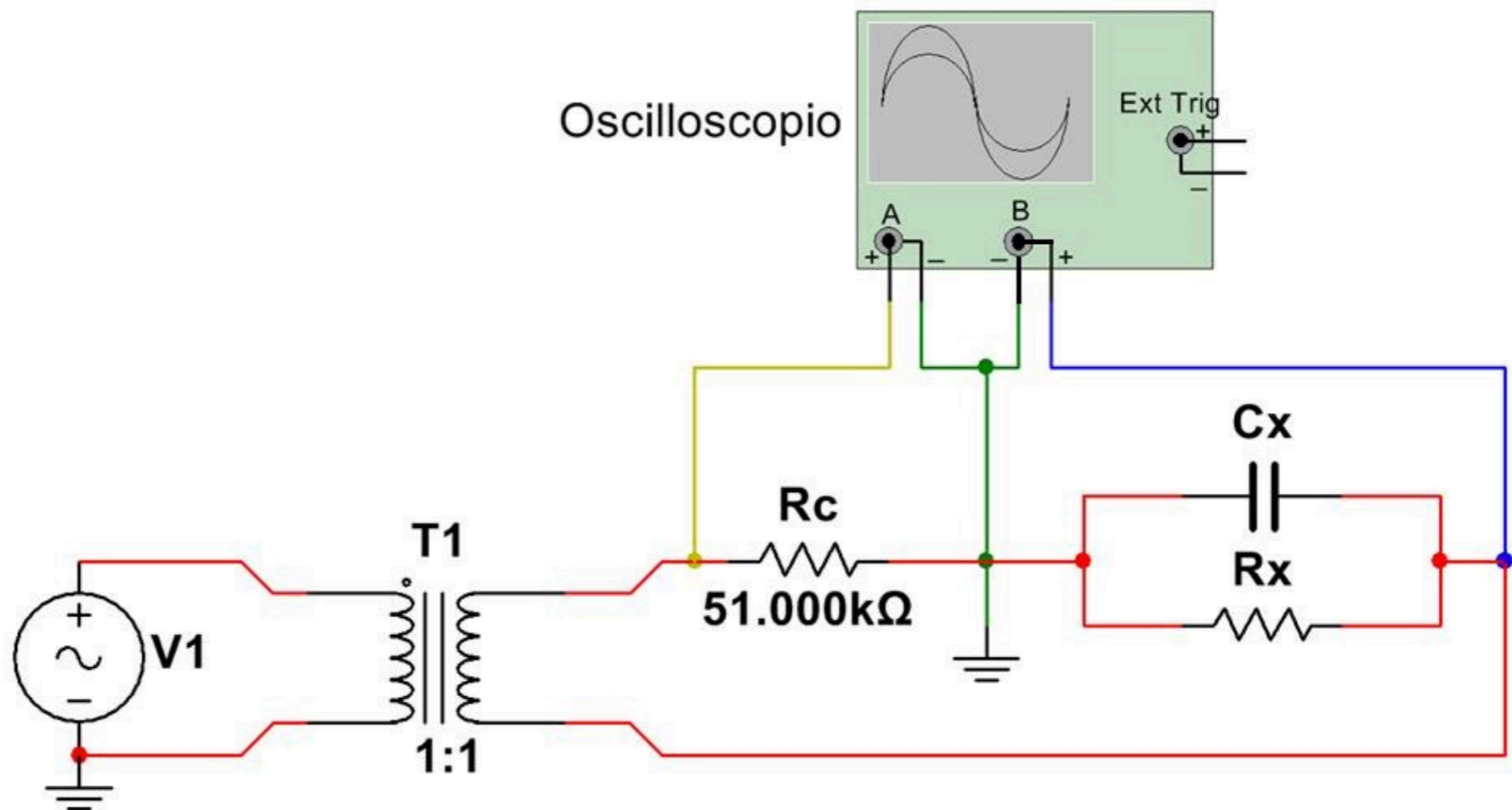
Poiché sono stati adoperati due metodi differenti per effettuare la misurazione, e quindi strumentazioni differenti, si avranno due circuiti di misura distinti.

Nel primo caso sono stati misurati modulo e fase dell'impedenza tramite il metodo di caduta di potenziale, sfruttando la relazione

$$\dot{Z}_x = \frac{\bar{V}_x}{\bar{V}_c} R_c$$

ed utilizzando un oscilloscopio per effettuare le varie misure.

In questa configurazione si è interposto un trasformatore di isolamento tra il generatore di segnale ed il circuito di misura per evitare che l'impedenza verso massa del morsetto di uscita del generatore risulti in parallelo con l'impedenza incognita.



Per evitare errori nella misurazione del modulo dell'impedenza, dovute ad un eventuale offset sovrapposto ai segnale di ingresso, si misura il valore di tensione picco-picco sulla resistenza campione e sull'impedenza, anziché misurarne l'ampiezza.

Per la fase invece, supponendo la resistenza campione puramente ohmica e quindi ritenendo che la corrente I_c che circola in essa sia in fase con la rispettiva tensione ai capi V_c , sono stati utilizzati i cursori dell'oscilloscopio per misurare il ritardo relativo tra i due segnali di tensione, ponendo gli stessi in corrispondenza dei passaggi dei segnali per lo zero con pendenza positiva.

Assumendo che le due tensioni siano sinusoidali ed isofrequenziali si può trovare lo sfasamento tra le due in funzione del ritardo relativo Δt tramite la relazione

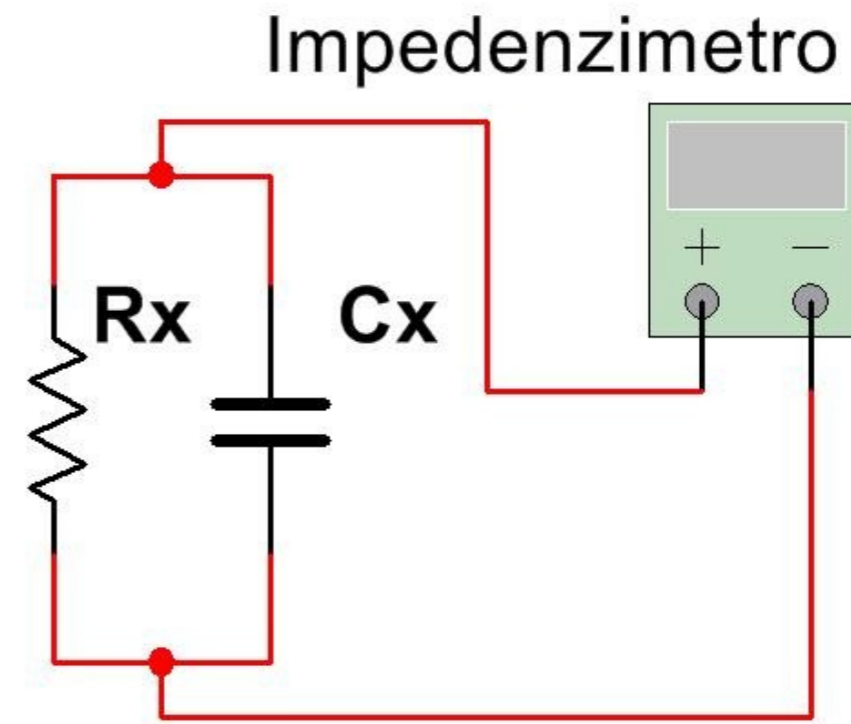
$$\Delta\varphi = 2\pi f \cdot \Delta t$$

Dallo sfasamento così misurato si ricava molto facilmente la fase dell'impedenza, tenendo conto di quale tra le due tensioni è in ritardo rispetto all'altra.

Misurati modulo e fase e relative incertezze si calcolano parte reale e parte immaginaria dell'impedenza. L'elaborazione dei dati è effettuata nella sezione successiva.

Nel secondo caso si è adoperato un impedenzometro.

Tale strumento mostra **direttamente** sul proprio display i valori misurati della resistenza e della capacità che costituiscono il parallelo utilizzato, oppure **altri parametri dell'impedenza quali, ad esempio,** i valori del modulo e del fattore di dissipazione. Naturalmente anche tali misure sono affette da incertezza. Si rimanda il calcolo di quest'ultima alla sezione relativa all'analisi dei dati.



Atto della Misurazione

In questa fase vengono rilevate le grandezze di interesse prima descritte.

Attraverso l'oscilloscopio si sono ricavati i seguenti valori di tensioni picco-picco su resistenza campione e parallelo RC e i relativi ritardi di fase per tre valori di frequenza differenti.

Si osserva che, dato il comportamento capacitivo del campione in esame, la tensione V_x è sempre in ritardo rispetto alla tensione V_c .

Si riportano le misure nella seguente tabella.

Grandezze Misurate		Frequenze di Esercizio		
		F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Tensione $V_{C_{pp}}$	Valore Letto			
	Volt/div			
Tensione $V_{X_{pp}}$	Valore Letto			
	Volt/div			
Ritardo Relativo Δt	Valore Letto			
	Scatto del Cursore			

Attraverso l'impedenziometro si sono misurati i valori di Resistenza e Capacità che costituiscono il parallelo e il corrispondente fattore di dissipazione per cinque valori di frequenza differenti. Per compensare l'effetto dei parametri parassiti dei cavi di collegamento, prima di effettuare tali misure è però necessario condurre una prova a vuoto e una prova in corto circuito tra i morsetti che collegano lo strumento al campione sotto esame.

Lo strumento memorizza automaticamente i risultati di queste prove ed è in grado di utilizzarli per mitigare l'effetto degli errori sistematici dovuti alle impedenze di collegamento dei cavetti. Sono state effettuate 10 misure di Resistenza e Capacità per ogni frequenza.

Si riportano tali misure nella seguente tabella.

Grandezze Misurate rispetto alle Frequenze di Esercizio									
F1 Hz		F4 Hz		F2 Hz		F5 Hz		F3 Hz	
Rp [kΩ]	Cp [nF]	Rp [kΩ]	Cp [nF]	Rp [kΩ]	Cp [nF]	Rp [kΩ]	Cp [nF]	Rp [kΩ]	Cp [nF]

Successivamente sono state effettuate 10 misure anche per il Modulo dell'Impedenza e per il Fattore di Dissipazione.

Si riportano le misure ottenute.

Grandezze Misurate rispetto alle Frequenze di Esercizio									
F1 Hz		F3 Hz		F2 Hz		F4 Hz		F3 Hz	
Zx [kΩ]	D	Zx [kΩ]	D	Zx [kΩ]	D	Zx [kΩ]	D	Zx [kΩ]	D

Elaborazione dei Dati

Si considerano le misure effettuate con l'oscilloscopio.

Le misure della tensione picco-picco sono principalmente affette dall'incertezza di quantizzazione, mentre le misure di intervallo di tempo sono affette sia dall'incertezza di quantizzazione sia dall'incertezza dovuta alla risoluzione dei cursori utilizzati. Tali incertezze si calcolano tramite formule binomie ricavabili dalle specifiche dello strumento. Siccome non vengono effettuate misure ripetute (a causa della scarsa risoluzione) tutte le incertezze sono esclusivamente di categoria B.

Per le incertezze sulle tensioni picco-picco si utilizza la formula binomia

$$U_{V_{pp}} = 3\% \cdot V_{ppLetto} + 0.05 \text{ div} \cdot \frac{\text{Volt}}{\text{div}}$$

Per le incertezze sugli intervalli di tempo si utilizza invece la formula binomia

$$U_{\Delta t} = 0.01\% \cdot \Delta t_{Letto} + \Delta t_{Cursori}$$

Tutte le incertezza estese sono valutate come tolleranze. Per cui l'incertezza tipo si ottiene dividendo l'incertezza estesa per

$$k = \sqrt{3} .$$

I valori ottenuti sono i seguenti.

Incertezze		Frequenze		
		F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Tensione $V_{C_{pp}}$	Incetezza Estesa			
	Incetezza Tipo			
Tensione $V_{X_{pp}}$	Incetezza Estesa			
	Incetezza Tipo			
Ritardo Relativo Δt	Incetezza Estesa			
	Incetezza Tipo			

La Resistenza Campione vale

$$R_c = \quad \text{k}\Omega$$

La sua incertezza estesa è valutata secondo le specifiche del resistore come la somma dello 0.15% del valore impostato sulla manopola degli Ω e dello 0.05% del valore impostato sulle altre manopole del resistore. Pertanto

$$U_{R_c} = \quad + \quad =$$

$$= \quad = \quad \Omega$$

L'incertezza tipo sulla resistenza campione è ricavata supponendo la distribuzione uniforme, quindi

$$\sigma_{R_c} = \frac{U_{R_c}}{\sqrt{3}} = \quad \Omega$$

Il modulo dell'impedenza è ricavato come

$$Z_x = \frac{V_{ppx}}{V_{ppc}} \cdot R_c$$

Tramite la formula della propagazione dell'incertezza si ricava l'incertezza tipo su Z_x

$$\sigma_{Z_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial V_x}\right)^2 \cdot \sigma_{V_x}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V_c}\right)^2 \cdot \sigma_{V_c}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial R_c}\right)^2 \cdot \sigma_{R_c}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R_c}{V_c}\right)^2 \cdot \sigma_{V_x}^2 + \left(\frac{V_x}{V_c^2} R_c\right)^2 \cdot \sigma_{V_c}^2 + \left(\frac{V_x}{V_c}\right)^2 \cdot \sigma_{R_c}^2}$$

Si ottengono quindi i seguenti valori

Impedenza	Frequenze		
	F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Valore Atteso Z_x			
Incetezza Tipo σ_{Z_x}			
Incetezza Estesa $U_{Z_x} (k=3)$			

Siccome V_x è sempre in ritardo rispetto a V_c la fase φ si ricava tramite la relazione

$$\varphi = -\Delta\varphi = -2\pi f \cdot \Delta t$$

Si trascurano le incertezze sulla frequenza.

L'incertezza associata alla fase è quindi ricavata come segue:

$$\sigma_\varphi = \sigma_{\Delta\varphi} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta T}\right)^2 \cdot \sigma_{\Delta t}^2}$$

Si ottengono i seguenti risultati

Fase	Frequenze		
	F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Valore Atteso ϕ			
Incertezza Tipo σ_ϕ			
Incertezza Estesa $U_\phi (k=3)$			

A questo punto bisogna valutare la resistenza parallelo e la capacità parallelo del provino sotto esame con riferimento al modello circuitale adottato per esso.

Si ha quindi

$$\dot{Z}_x = \frac{R_x / j\omega C_x}{\frac{1}{j\omega C_x} + R_x} = \frac{R_x}{1 + j\omega C_x \cdot R_x}$$

Da cui moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore stesso possiamo scrivere il numero complesso in forma algebrica, distinguendo così la parte reale dalla parte immaginaria

$$\dot{Z}_x = \frac{R_x \cdot (1 - j\omega C_x \cdot R_x)}{1 + \omega^2 \cdot C_x^2 \cdot R_x^2} = \frac{R_x}{1 + \omega^2 \cdot C_x^2 \cdot R_x^2} - j \cdot \frac{j\omega C_x \cdot R_x^2}{1 + \omega^2 \cdot C_x^2 \cdot R_x^2}$$

Assumendo come riferimento l'asse reale possiamo dire che l'angolo formato da tale asse ed il numero complesso associato all'impedenza è pari a φ_z . Pertanto le due componenti di \dot{Z}_x sono date da

$$Re(\dot{Z}_x) = |\dot{Z}_x| \cdot \cos(\varphi_z)$$

$$Im(\dot{Z}_x) = |\dot{Z}_x| \cdot \sin(\varphi_z)$$

Uguagliando i due risultati otteniamo un sistema di due in due incognite ossia C_x ed R_x .

$$\operatorname{Re}(\dot{Z}_x) = |\dot{Z}_x| \cdot \cos(\varphi_z) = \frac{R_x}{1 + \omega^2 \cdot C_x^2 \cdot R_x^2} \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}(\dot{Z}_x) = |\dot{Z}_x| \cdot \sin(\varphi_z) = -\frac{j\omega C_x \cdot R_x^2}{1 + \omega^2 \cdot C_x^2 \cdot R_x^2} \quad (2)$$

Poichè si tratta di un sistema non lineare va risolto nel seguente modo

1. Si dividono membro a membro le due equazioni ottenendo

quindi

$$\frac{\operatorname{Im}(\dot{Z}_x)}{\operatorname{Re}(\dot{Z}_x)} = \operatorname{tg}(\varphi_z) = -\omega \cdot C_x \cdot R_x$$

e da questa prima condizione si ricava che

$$C_x = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi_z)}{\omega \cdot R_x} \quad (3)$$

2. Si sostituisce la condizione appena ricavata nella (1) ottenendo

così

$$\frac{R_x}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_z)} = |\dot{Z}_x| \cdot \cos(\varphi_z)$$

da cui

$$R_x = |\dot{Z}_x| \cdot \cos(\varphi_z) \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_z)] \quad (4)$$

A questo punto, calcolati R_x e C_x , bisogna valutarne le incerezze.

Per la R_x dalla (4) si ricava che

$$\begin{aligned} \sigma_{R_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial Z}\right)^2 \cdot \sigma_Z^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial \varphi_z}\right)^2 \cdot \sigma_{\varphi_z}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\cos(\varphi_z) [1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_z)]\right)^2 \cdot \sigma_Z^2 + \left(|\dot{Z}_x| \frac{\sin(\varphi_z)}{\cos^2(\varphi_z)}\right)^2 \cdot \sigma_{\varphi_z}^2} \end{aligned}$$

ottenendo così i seguenti valori

Resistenza Rx	Frequenze		
	F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Valore Atteso Rx			
Incertezza Tipo σ_{Rx}			
Incertezza Estesa $U_{Rx} (k=3)$			

Si valuta quindi l'incertezza sulla C_x dalla (3) come

$$\sigma_{C_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial C_x}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial R_x}\right)^2 \sigma_{R_x}^2}$$

alle varie frequenze si ottiene

Capacità Cx	Frequenze		
	F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Valore Atteso Cx			
Incetezza Tipo σ_{C_x}			
Incetezza Estesa $U_{C_x} (k=3)$			

Si valuta dunque il Fattore di Dissipazione dell'impedenza come

$$D = \operatorname{tg}(\delta) = \left| \frac{P}{Q} \right| = \left| \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi)} \right|$$

dove P è la potenza attiva dissipata dall'impedenza e Q è la potenza reattiva immagazzinata nella stessa.

E l'incertezza sul fattore di dissipazione è pari a

$$\sigma_D = \frac{1}{(\operatorname{tg}(\varphi) \cdot \cos(\varphi))^2} \cdot \sigma_{\varphi}$$

Si ricavano i seguenti valori

Fattore di Dissipazione	Frequenze		
	F1 Hz	F2 Hz	F3Hz
Valore Atteso D			
Incetezza Tipo σ_D			
Incetezza Estesa $U_D (k=3)$			

Si riportano nella seguente tabella i risultati ottenuti.
 Verranno espresse tutte le incertezze con un fattore di copertura
 $k=3$.

Misure	Frequenze		
	100 Hz	1 kHz	10 kHz
Modulo dell'Impedenza Z_x			
Fase dell'Impedenza ϕ			
Resistenza Parallelo R_p			
Capacità Parallelo C_p			
Fattore di dissipazione D			

Si considerano quindi le misure effettuate con l'impedenziometro.

Si calcolano i valori attesi della Resistenza e della Capacità effettuando una media aritmetica tra i valori misurati.

$$R_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} R_{x,n} \quad \text{e} \quad C_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} C_{x,n}$$

Allo stesso modo si trovano i valori attesi del Modulo dell'Impedenza e del Fattore di Dissipazione

$$|Z_x^*| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} |Z_{x,n}| \quad \text{e} \quad D_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} D_{x,n}$$

La fase si valuta invece come

$$\varphi = -\arctg(\omega C_x R_x)$$

Si ottengono quindi i seguenti valori

Valori Attesi	Frequenze				
	F1 Hz	F4 Hz	F2 Hz	F5 Hz	F3 Hz
Resistenza Rx [kΩ]					
Capacità Cx [nF]					
Modulo dell'Impedenza Zx [kΩ]					
Fase dell'Impedenza φ [rad]					
Fattore di Dissipazione D					

Le incertezze sulla resistenza e sulla capacità sono valutate sia come incertezze di Categoria A che come incertezze di Categoria B.

L'incertezza di Categoria A è valutata come Deviazione Standard della media campionaria. Pertanto

$$\sigma_{R_x,A} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (R_{x,n} - \bar{R}_x)^2} \quad \text{e}$$

$$\sigma_{C_x,A} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (C_{x,n} - \bar{C}_x)^2}$$

e si ottiene

Incertezze	Frequenze				
	100 Hz	120 Hz	1 kHz	10 kHz	20 kHz
Incertezza sulla Resistenza $\sigma_{R_x,A}$ [Ω]					
Incertezza sulla Capacità $\sigma_{C_x,A}$ [pF]					

L'incertezza di Categoria B è valutata tramite le specifiche dello strumento.

Siccome in tutti i casi considerati il valore di $|Z_x^*|$ quest'ultima è maggiore di 100 Ω si valuta il valore

$$A_{e,\%} = A + B \cdot C \cdot \frac{|Z_x^*|}{Z_s} + \frac{D}{|Z_x^*|} + \frac{|Z_x^*|}{E}$$

Si devono quindi valutare diversi coefficienti per il calcolo dell'incertezza di categoria B.

- Z_s dipende dal valore del modulo dell'impedenza misurata
- A e B dipendono dalla frequenza di funzionamento e dal valore di $|Z_x^*|$
- C dipende dalla tensione applicata e dal modulo di $|Z_x^*|$
- D dipende dalla lunghezza dei cavetti utilizzati e dalla frequenza di funzionamento dello strumento (nonostante la lunghezza effettiva dei cavetti utilizzati sia minore, si considererà sempre il caso peggiore secondo cui tale lunghezza è $L_{cavi} = 1 \text{ m}$)
- E dipende esclusivamente dalla frequenza di funzionamento

Per la valutazione dell'incertezza sulla capacità parallelo secondo le specifiche si trova l'incertezza estesa percentuale come

$$U_{C,\%} = A_{e,\%} \quad \text{se } D_x^* \leq 0.1$$

$$U_{C,\%} = A_{e,\%} \cdot \sqrt{1 + (D_x^*)^2} \quad \text{se } D_x^* > 0.1$$

L'incertezza estesa sulla capacità parallelo è quindi

$$U_{C_x,B} = U_{C,\%} \cdot C_x$$

Supponendo che la distribuzione sia uniforme si valuta l'incertezza tipo di categoria B come

$$\sigma_{C_x,B} = \frac{U_{C_x,B}}{\sqrt{3}}$$

Secondo le specifiche si determina poi l'incertezza sul fattore di dissipazione come

$$U_D = \frac{A_{e,\%}}{100}$$

Partendo da questi risultati si valuta l'incertezza sulla Resistenza Parallelo attraverso la relazione

$$U_{R_x,B} = \frac{R_x \cdot U_D}{D_x - U_D}$$

Supponendo che la distribuzione sia uniforme si valuta l'incertezza tipo di categoria B come

$$\sigma_{R_x,B} = \frac{U_{R_x,B}}{\sqrt{3}}$$

Si riportano i vari parametri ottenuti alle diverse frequenze

Parametri	Frequenze				
	F1 Hz	F4 Hz	F2 Hz	F5 Hz	2F3 Hz
Zs					
A					
B					
C					
D					
E					
Ae%					
UD					

Si riportano quindi i risultati di incertezza ottenuti.

Incertezze	Frequenze				
	F1 Hz	F4 Hz	F2 Hz	F5 Hz	F3 Hz
Incertezza sulla Resistenza $\sigma_{R_{x,B}}$ [k Ω]					
Incertezza sulla Capacità $\sigma_{C_{x,B}}$ [pF]					

Si valuta quindi l'incertezza composta come $\sigma_{R_x} = \sqrt{\sigma_{R_x,A}^2 + \sigma_{R_x,B}^2}$ e $\sigma_{C_x} = \sqrt{\sigma_{C_x,A}^2 + \sigma_{C_x,B}^2}$

E la si esprime con un fattore di copertura 3 : $U_{R_x} = 3 \cdot \sigma_{R_x}$ e $U_{C_x} = 3 \cdot \sigma_{C_x}$

Si riportano
quindi i risultati
ottenuti.

Incertezze	Frequenze				
	F1 Hz	F4 Hz	F2 Hz	F5 Hz	F3 Hz
Incertezza tipo sulla Resistenza σ_{R_x} [k Ω]					
Incertezza estesa sulla Resistenza U_{R_x} [k Ω]					
Incertezza tipo sulla Capacità σ_{C_x} [pF]					
Incertezza estesa sulla Capacità U_{C_x} [pF]					

Misure	Frequenze				
	F1 Hz	F4 Hz	F3 Hz	F5 Hz	F3 Hz
Resistenza Parallelo Rp					
Capacità Parallelo Cp					

Si confrontano i risultati ottenuti con l'impedenzometro con quelli precedentemente ottenuti tramite l'oscilloscopio.

Misure	Frequenze		
	F1 Hz	F2 Hz	F3 Hz
Resistenza Parallelo (Oscilloscopio) Rp			
Resistenza Parallelo (Impedenzometro) Rp			
Capacità Parallelo (Oscilloscopio) Cp			
Capacità Parallelo (Impedenzometro) Cp			

Si osserva immediatamente che le incertezze relative alle misure con l'impedenzometro sono notevolmente inferiori rispetto a quelle relative alle misure con l'oscilloscopio. Questo è dovuto al fatto che l'impedenzometro è ottimizzato per misura di impedenza.