1. Segnali bi o multi dimensionali

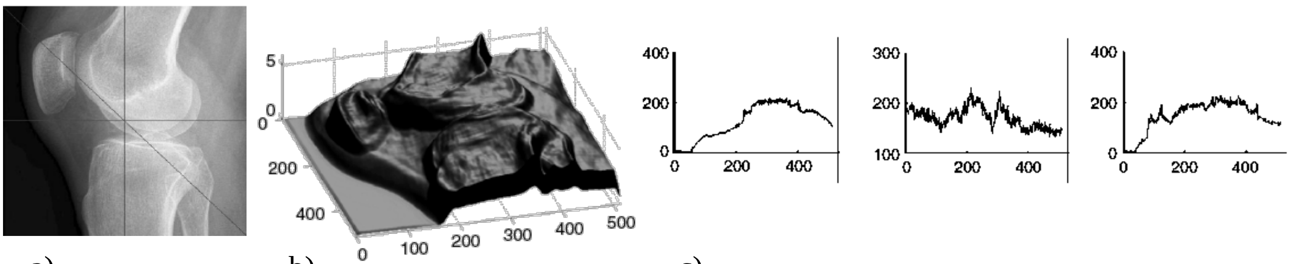
Un segnale bidimensionale è definito nel dominio del continuo come una generica funzione di due variabili continue:

$$f(x,y)$$

il significato fisico della funzione e delle variabili indipendenti è arbitrario. Nel caso delle immagini biomediche essa è interpretata come una luminosità spaziale (livelli di grigio) di un immagine planare non in movimento, dipendente dalla posizione individuata dalle coordinate x e y che formano il vettore posizione $\underline{\mathbf{r}}=(x,y)$. La funzione è detta funzione spaziale. In teoria è possibile considerare un immagine spazialmente illimitata (a supporto infinito) che copra tutto il piano (x,y), comunque, nella pratica, la dimensione dell'immagine è limitata ad un rettangolo con le origini nel centro delle coordinate:

$$\boldsymbol{x} \in <-xm,xm> \; e \; \boldsymbol{y} \in <-ym,ym>$$

Una funzione di due variabili può essere rappresentata in modi differenti: scala di grigi, superfici o profili lungo linee determinate.



a) b) c)

Figura 1: Modi di rappresentare una funzione bidimensionale: a) scala di grigi; b) superfici; c) profili

Nel campo delle immagini mediche si lavora principalmente con immagini a livello di grigio che rappresentano la normale modalità di uscita delle apparecchiature per la diagnostica ad immagini. In genere, in medicina il colore viene utilizzato per esaltare il contrasto utilizzando pseudo-colori o etichette colorate. Un immagine a colori può essere rappresentata da una funzione vettoriale:

$$f(x,y)=[f_R(x,y), f_G(x,y), f_B(x,y)]^T$$

ogni componente rappresenta la luminosità di una singola componente di colore (rosso, verde, blu). Ogni componente può essere vista come una immagine a livelli di grigio e come tale può essere trattata.

Nel campo delle immagini vettoriali è possibile definire il caso di immagini a valori complessi. Sebbene le immagini reali sono segnali bidimensionali a valori reali, la definizione di immagini a valori complessi può essere utile:

$$\boldsymbol{f}(x,y)=f_{re}(x,y)+jf_{im}(x,y)$$

La parte immaginarie e la parte reale possono essere ancora viste come una immagine a livelli di grigio e come tale può essere trattata.

Il concetto di segnale bidimensionale può essere generalizzato al caso di un segnale multidimensionale:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

dove $\boldsymbol{x}$ è un vettore di un numero arbitrario di componenti. Nel caso a tre dimensione si ha $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$ (volume) e nel caso a quattro dimensioni $\boldsymbol{x}=(x,y,z,t)^T$ con t dipendenza temporale.

Un importante segnale bidimensionale è il segnale sinusoidale, descritto dalla funzione:

$$\boldsymbol{f}(x,y)=A\cos(u_0x+v_0y+f)$$

dove u_0 è la frequenza nella direzione x, v_0 è la frequenza nella direzione y e f è la fase.

Nel caso $u_0 = 0$ il segnale sinusoidale viene rappresentato come delle strisce parallele all'asse x; nel caso $v_0 = 0$ si ottengono invece strisce parallele all'asse y; nel caso $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$ si ottengono strisce con un asse rotato di un angolo pari a $q = arctang(v_0/u_0)$.

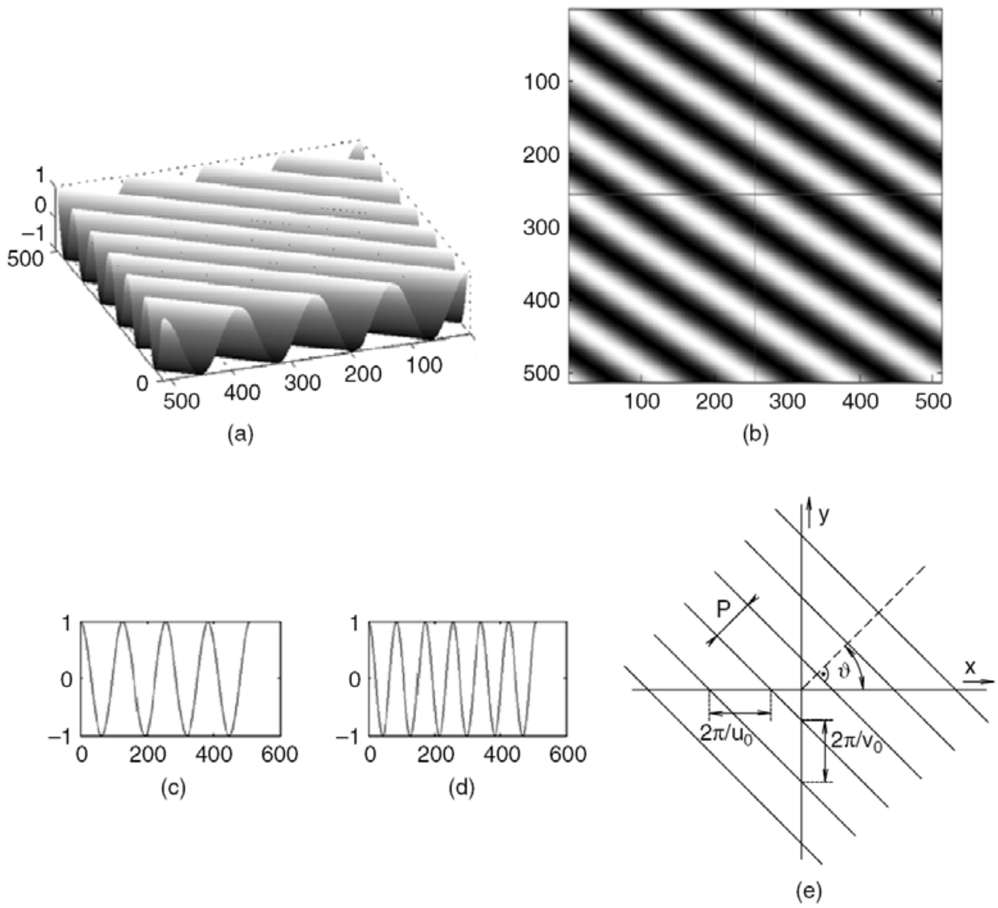


Figura 2: a) funzione sinusoidale bidimensionale; b) proiezione sul piano; c) rappresentazione di u_0; d) rappresentazione di v_0; e) interpretazione geometrica delle frequenze spaziali

Un altro importante segnale bidimensionale è **l'impulso di Dirac**, definito dalle sue proprietà integrali:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)dxdy = 1$$

La funzione **RECT**, rappresentata nella figura in basso, è definita dalla:

$$rect(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 0{,}5 \; e \; |y| \le 0{,}5 \\ 0 & \text{se } |x| > 0{,}5 \; o \; |y| > 0{,}5 \end{cases}$$

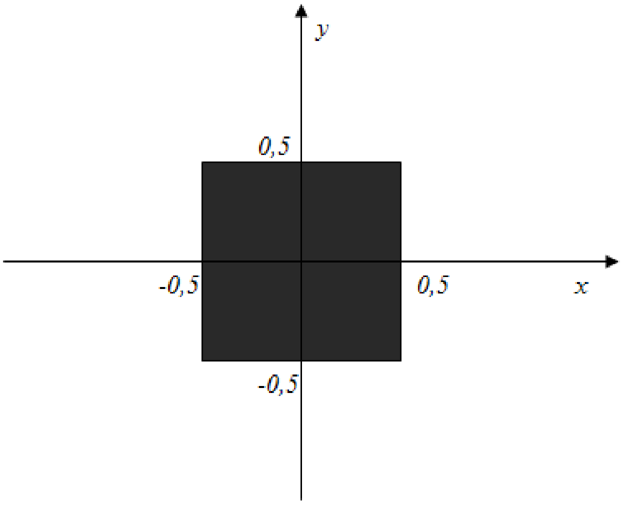


Figura 3: Rappresentazione della funzione RECT

2. Trasformata di Fourier bidimensionale e tridimensionale

Analogamente a quanto accade nel caso monodimensionale, anche per i segnali bidimensionali è possibile definire la trasformata di Fourier, tramite la quale un generico segnale viene espresso come combinazione di sinusoidi a frequenze, ampiezze e fasi diverse. Analiticamente la trasformata di Fourier bidimensionale è un operatore funzionale che, applicato ad un segnale definito nel *dominio dello spazio*, ne individua un altro nel *dominio della frequenza*.

Formalmente la trasformata di Fourier bidimensionale della funzione *f(x,y)* è definita dalla relazione seguente, detta anche *equazione di analisi della trasformata*:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} dx dy$$

dove $\omega_x = 2\pi f_x$ e $\omega_y = 2\pi f_y$.

Per assicurarsi l’esistenza della trasformata di Fourier è necessario richiedere che la funzione sia assolutamente integrabile.

La formula di inversione, o *equazione di sintesi della trasformata*, è data da:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int F(\omega_x, \omega_y) \exp\{i(\omega_x x + \omega_y y)\} d\omega_x d\omega_y$$

L'estensione al caso tridimensionale della trasformata è data dalla:

$$F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \iint\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\} dxdydz$$

Le trasformate di Fourier e le relative anti-trasformate possono essere indicate rispettivamente con le seguenti notazioni:

$$\Im_2[f(x, y)] = F(\omega_x, \omega_y), \qquad \Im_2^{-1}[F(\omega_x, \omega_y)] = f(x, y)$$

$$\Im_3[f(x, y, z)] = F(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \qquad \Im_3^{-1}[F(\omega_x, \omega_y, \omega_z)] = f(x, y, z)$$

In genere la trasformata di Fourier F è un numero complesso che può essere rappresentato con la sua parte reale e la sua parte immaginaria:

$$F(\omega_x, \omega_y) = R(\omega_x, \omega_y) + iI(\omega_x, \omega_y)$$

o in modulo e fase:

$$F(\omega_x, \omega_y) = M(\omega_x, \omega_y) \exp\{i\phi(\omega_x, \omega_y)\}$$

dove:

$$M(\omega_x, \omega_y) = \left[R^2(\omega_x, \omega_y) + I^2(\omega_x, \omega_y)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(\omega_x, \omega_y) = \tan^{-1}\left\{\frac{I(\omega_x, \omega_y)}{R(\omega_x, \omega_y)}\right\}$$

A partire dalla trasformata bidimensionale possono essere ottenute facilmente le trasformate monodimensionali ponendo a zero le componenti spaziali o frequenziali a cui non si è interessati:

$$F(\omega_x, 0) = F(\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) \exp\{-i(\omega_x x)\} dx$$

$$f(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, 0) \exp\{i(\omega_x x)\} d\omega_x$$

o

$$F(0, \omega_y) = F(\omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(0, y) \exp\{-i(\omega_y y)\} dy$$

$$f(0, y) = f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(0, \omega_y) exp\{i(\omega_y y)\} d\omega_y$$

2.1. Utili proprietà della trasformata

Separabilità

Nel caso in cui è possibile esprimere la funzione bidimensionale come prodotto lungo le due direzioni:

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$$

nel dominio delle frequenze si può scrivere:

$$F(\omega_x,\omega_y) = F(\omega_x)F(\omega_y)$$

dove $F(\omega_x)$ e $F(\omega_y)$ sono rispettivamente le trasformate monodimensionale delle funzioni $f_x(x)$ e $f_y(y)$.

Partendo dalla definizione di trasformata bidimensionale si ottiene:

$$F(\omega_x,\omega_y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\}dxdy =$$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(y)\exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\}dxdy =$$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(y)\exp\{-i(\omega_x x)\}\exp\{-i(\omega_y y)\}dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\exp\{-i(\omega_x x)\}dx\int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\exp\{-i(\omega_y y)\}dy = F_x(\omega_x)F_y(\omega_y)$$

Il principale vantaggio delle proprietà di separabilità è la possibilità di ottenere la trasformata bidimensionale $F(\omega_x,\omega_y)$ calcolando semplicemente due volte una trasformata monodimensionale.

Trasformata della funzione complessa coniugata

Se $F(\omega_x,\omega_y)$ è la trasformata di $f(x,y)$ allora la trasformata di Fourier di $f^*(x,y)$, è data dalla:

$$\Im_2\left[f^*(x,y)\right] = F^*(-\omega_x,-\omega_y)$$

Dove l'asterisco indica il complesso coniugato della funzione.

Simmetria

Se f(x,y) è simmetrica, cioè $f(x,y)=f(-x,-y)$, allora anche la trasformata è simmetrica, cioè:

$$F(\omega_x,\omega_y) = F(-\omega_x,-\omega_y)$$

In genere quando *f(x,y)* è una funzione reale la trasformata di Fourier risulta simmetrica nella parte reale e antisimmetrica nella parte immaginaria.

$$R(\omega_x,\omega_y)=R(-\omega_x,-\omega_y)$$

$$I(\omega_x,\omega_y)=-I(-\omega_x,-\omega_y)$$

Questa proprietà è detta proprietà di simmetria hermitiana.

Linearità

La trasformata di Fourier è un operatore lineare, cioè la trasformata di una combinazione lineare è pari alla combinazione lineare delle trasformate.

Dette quindi *a* e *b* delle costanti arbitrarie, si ha:

$$\Im_2[a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y)]=a\cdot F(\omega_x,\omega_y)+b\cdot G(\omega_x,\omega_y)$$

Tale proprietà discende molto semplicemente dalla proprietà distributiva dell'integrale che definisce la trasformata bidimensionale di Fourier.

Cambiamento di scala

Un cambiamento di scala di una variabile spaziale risulta in una scalatura inversa nel dominio delle frequenze:

$$\Im_2[f(ax,by)]=\frac{1}{ab}F\left(\frac{\omega_x}{a},\frac{\omega_y}{b}\right)$$

Si ha infatti:

$$\Im_2[f(ax,by)]=\int\int_{-\infty}^{\infty} f(ax,by)\exp\{-i(\omega_x x+\omega_y y)\}dxdy=$$

$$\frac{1}{ab}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(ax,by)\exp\left\{-i\left(ax\frac{\omega_x}{a}+by\frac{\omega_y}{b}\right)\right\}d(ax)d(by)=\frac{1}{ab}F\left(\frac{\omega_x}{a},\frac{\omega_y}{b}\right)$$

Traslazione

Una traslazione effettuata sulla funzione originale comporta una variazione della fase per la trasformata:

$$\Im_2[f(x-a,y-b)]=F(\omega_x,\omega_y)\exp\{-i(a\omega_x+b\omega_y)\}$$

Partendo dalla definizione di trasformata, si ha:

$$\Im_2[f(x-a,y-b)] = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a,y-b)\exp\{-i(\omega_x x+\omega_y y)\}dxdy =$$

ponendo $\theta = x-a$ e $\vartheta = x-b$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\vartheta)\exp\{-i(\omega_x(a+\theta)+\omega_y(b+\vartheta))\}d\theta d\vartheta =$$

$$\exp\{-i(a\omega_x + b\omega_y)\}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\vartheta)\exp\{-i(\omega_x\theta+\omega_y\vartheta)\}d\theta d\vartheta$$

$$F(\omega_x,\omega_y)\exp\{-i(a\omega_x + b\omega_y)\}$$

Inoltre, la proprietà duale a quella appena dimostrata stabilisce che una variazione della frequenza nel dominio di Fourier corrisponde ad una variazione di fase nel dominio dello spazio:

$$\Im_2^{-1}[F(\omega_x - a_x, \omega_y - b_y)] = f(x,y)\exp\{i(a_x x + b_y y)\}$$

Teorema della convoluzione

La trasformata bidimensionale della convoluzione di due funzioni nel dominio dello spazio è uguale al prodotto della trasformata delle due funzioni nel dominio della trasformata.

Dette quindi $\Im_2[f(x,y)] = F(\omega_x,\omega_y)$ e $\Im_2[h(x,y)] = H(\omega_x,\omega_y)$:

$$\Im_2[f(x,y)*h(x,y)] = F(\omega_x,\omega_y)H(\omega_x,\omega_y)$$

Vale anche il teorema inverso, cioè vale che:

$$\Im_2[f(x,y)h(x,y)] = \frac{1}{4\pi^2}\{F(\omega_x,\omega_y)*H(\omega_x,\omega_y)\}$$

dove l'asterisco indica l'operazione di convoluzione.

Teorema di Parseval

Esiste la seguente relazione tra l'energia calcolata nel dominio dello spazio e quella calcolata nel dominio della frequenza:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2 dxdy = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega_x,\omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y$$

o

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) f^*(x,y) dxdy = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x,\omega_y) F^*(\omega_x,\omega_y) d\omega_x d\omega_y$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato.

Trasformata della derivata

La trasformata della derivata di una funzione bidimensionale è data da:

$$\Im_2\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = i(\omega_x + \omega_y) F(\omega_x,\omega_y)$$

In tabella sono riportate in sintesi le trasformate di alcuni segnali notevoli:

f(x,y)	***F(ωx,ωy)***
$\delta(x,y)$	*1*
$\delta(x - x_0, y - y_0)$	$\exp(-i2\pi x_0\omega_x)\exp(-i2\pi y_0\omega_y)$
$\exp(+i2\pi(\eta_1 x + \eta_2 y))$	$\delta(\omega_x - \eta_1, \omega_y - \eta_2)$
$\Pi(x,y)$ o $\mathrm{rect}(\mathrm{x},\mathrm{y})$	$\sin c(\omega_x,\omega_y)$
$\Lambda(x,y)$ o $\mathrm{tri}(\mathrm{x},\mathrm{y})$	$\sin c^2(\omega_x,\omega_y)$
$comb(x,y)$	$comb(\omega_x,\omega_y)$
$\exp\{+i2\pi(\eta_1 x + \eta_2 y)\} f(x,y)$	$F(\omega_x - \eta_1, \omega_x - \eta_2)$
$I = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) h^*(x,y) dxdy$	$I = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x,\omega_y) H^*(\omega_x,\omega_y) d\omega_x d\omega_y$

2.2. Trasformata di Fourier in uno spazio multidimensionale

Osservando la formula della trasformata di Fourier nello spazio a due dimensioni:

$$F(\omega_x,\omega_y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} dxdy$$

E ricordando che: $\omega_x = 2\pi f_x$ e $\omega_y = 2\pi f_y$ sono le componenti lungo l'asse *x* e lungo l'asse *y* del vettore ω e che *x* e *y* sono le componenti del vettore posizione *r* la precedente può scriversi come:

$$F(\vec{\omega}) = \int_{\Re^2} f(\vec{r}) e^{-i\vec{\omega}\bullet\vec{r}} d^2\vec{r}$$

Dove nell'esponenziale compare il prodotto scalare tra il vettore ω e il vettore posizione r.

La generalizzazione della formula al caso a N dimensioni è: $F(\vec{\omega}) = \int_{\Re^N} f(\vec{r}) e^{-i\vec{\omega}\bullet\vec{r}} d^N\vec{r}$

3. Trasformata di Fourier di funzioni circolari simmetriche

Trasformata di Hankel

Spesso i sistemi bidimensionali mostrano simmetrie circolari, in tal caso può essere conveniente rimpiazzare le due coordinate *(x,y)* con una singola coordinata radiale. In queste ipotesi una funzione bidimensionale *f(x,y)* può essere scritta nel seguente modo:

$$f(x, y) = f(r)$$

dove r è la coordinata spaziale radiale.

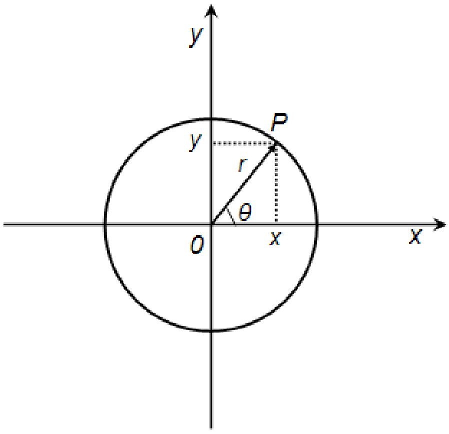


Figura 4:coordinate del punto P in un sistema a simmetria circolare

Le due coordinate polari r e θ possono essere convertite nelle coordinate cartesiane x e y utilizzando le formule delle funzioni trigonometriche seno e coseno:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

mentre le due coordinate cartesiane x e y possono essere convertite nelle coordinate polari r e θ con le formule:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1} y/x$$

Inoltre, poiché ogni numero complesso può essere rappresentato come un punto nel piano complesso, esso può alternativamente essere espresso in forma polare come:

$$re^{j\theta} = x + jy$$

Analogamente la trasformata di Fourier bidimensionale può essere scritta in maniera equivalente, nella forma:

$$F(\omega_x, \omega_y) = F(\rho)$$

dove ρ è la frequenza spaziale o variabile radiale nel dominio della frequenza.

Valgono le formule di conversione:

$$\omega_x = \rho \cos\phi$$

$$\omega_y = \rho \sin\phi$$

Per il passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane, vale che:

$$\rho^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega_y / \omega_x)$$

Sul piano complesso si ha allora che:

$$\rho e^{j\phi} = \omega_x + j\omega_y$$

Si possono ora scrivere le relazioni che legano la trasformata monodimensionale *F(ρ)* e la funzione radiale *f(r)* e che prendono il nome rispettivamente di trasformata ed anti-trasformata di **Hankel**:

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^\infty f(r) J_0(\rho r) r dr$$

$$f(r) = 2\pi \int_0^\infty F(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho$$

dove $J_0(\cdot)$ è la funzione di Bessel di ordine zero.

L'equazione può essere derivata a partire dalla definizione della trasformata di Fourier applicando le trasformazioni spaziali:

$$F(\rho)=\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)exp\{-i(\omega_x x+\omega_y y)\}dxdy =$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r)exp\{-i\rho r(cos\,\theta\, cos\,\phi + sin\,\theta\, sin\,\phi)\}|J|d\theta dr =$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r)exp\{-i\rho r\, cos(\theta-\phi)\}rd\theta dr =$$

$$\int_0^\infty \int_\phi^{2\pi-\phi} f(r)exp\{-i\rho r\, cos(\theta)\}rd\theta dr =$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r)exp\{-i\rho r\, cos(\theta)\}rd\theta dr =$$

$$\int_0^\infty f(r)\left[\int_0^{2\pi} exp\{-i\rho r\, cos(\theta)\}d\theta\right]rdr = 2\pi\int_0^\infty f(r)J_0(\rho r)rdr$$

Dove lo Jacobiano della trasformazione |J| è pari a *r*, infatti:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r||\sin^2\theta + \cos^2\theta| = r$$

Si ricorda inoltre, che in aggiunta alle formule di conversione, dalle coordinate cartesiane a quelle polari, sono state applicate anche le *Formule di Werner* per le trasformazioni trigonometriche.

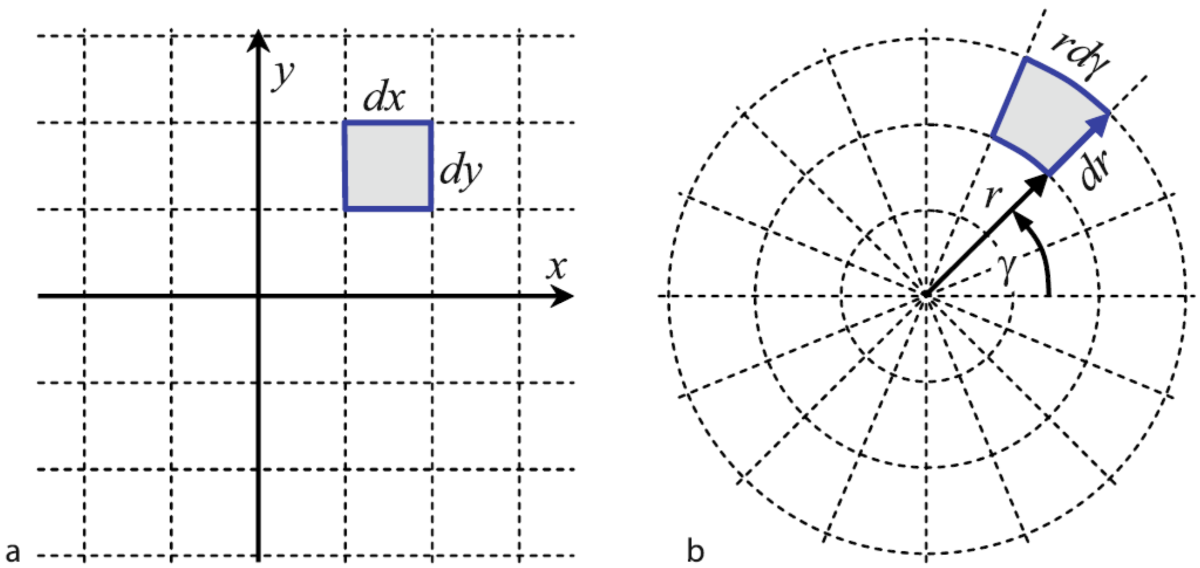


Figura 5: elementi di area infinitesimale in coordinate cartesiane e polari

Nella derivazione della trasformata di Hankel l'elemento dx*dy si trasforma nell'elemento r*dθ*dr. E' possibile dare una dare una interpretazione geometrica di tale trasformazione osservando la figura 2. Ovviamente, gli elementi di area rappresentati nella figura 2 sono da considerarsi di dimensioni infinitesime, e quindi le loro aree sono approssimabili con dx*dy e r*dθ*dr.

In tabella sono riportate in sintesi alcune trasformate notevoli:

f(r)	**F(ρ)**
1	$\delta(\rho)$
$1/r = r^{-1}$	$1/\rho$
r	$-1/\rho^3$
r^3	$9/\rho^5$
r^m	$2^{m+1}\Gamma(m/2+1)$
$exp(-iar)$	$\dfrac{-ia\sqrt{\rho^2-a^2}}{(\rho^2-a^2)^2}$
$exp(a^2r^2/2)$	$exp(\rho^2/(2a^2))$
$\exp(-\pi r^2)$	$\exp(-\pi\rho^2)$
$\pi a J_0(2\pi ar)$	$\frac{1}{2}\delta(\rho-a)$
$a\dfrac{J_1(2\pi ar)}{r}$	$\prod\left(\dfrac{\rho}{2a}\right)$

Dove la funzione Π è la funzione RECT.

Trasformata di Abel

Considerando la formula della proiezione, che vedremo nella parte III, considerando una funzione a simmetria circolare e la sua proiezione sull'asse x si ottiene il seguente integrale:

$$p(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)dy$$

dove r è il raggio ed è dato da:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

da cui ottenendo y:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

si può scrivere:

$$p(x) = 2\int_{x}^{\infty} \frac{f(r)r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr$$

dove l'integrale è esteso da x∞a poiché il minim o valore che può assumere r è x, per valori inferiori la funzione non è definita e il fattore due è dovuto al contributo dell'integrazione lungo l'asse negativo. Questo integrale è anche conosciuto come trasformata di Abel dell'oggetto f(r) ed è normalmente indicata come

$$p(x) = A\{f(r)\}$$

Per un oggetto a simmetria circolare esiste una relazione tra le tre trasformate *F*(Fourier), H(Hankle) e A(Abel):

$$f(r) = H_0 F_1 A\{f(r)\}$$

relazione chiamata Fourier-Abel-Hankel cycle. Poiché l'operazione è ciclica si può scrivere:

$$H_0 F_1 A = A H_0 F_1 = F_1 A H_0 = I$$

con I operatore identità. Il ciclo è riportato graficamente nella figura 3.

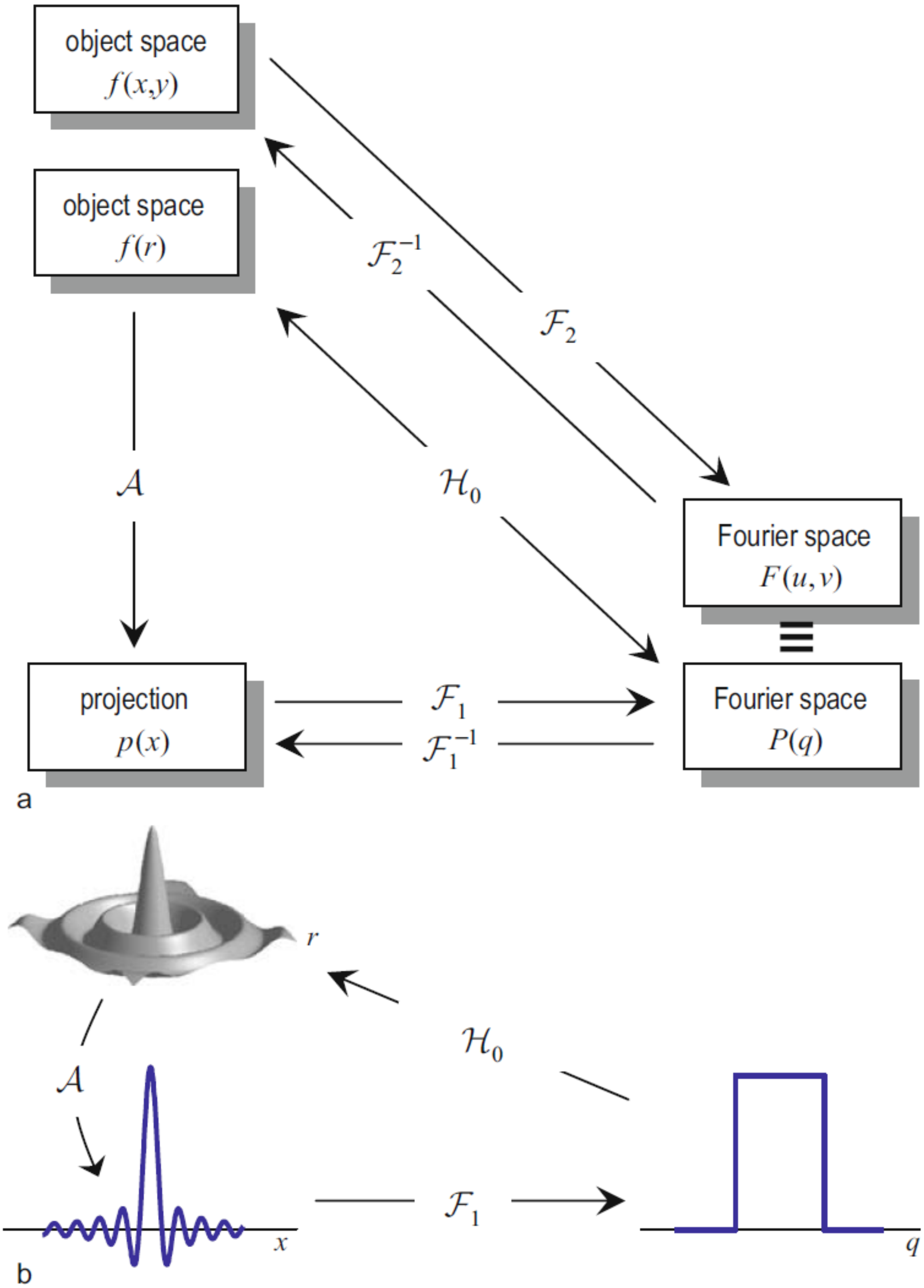


Figura 6: a) Fourier-Abel-Hankel cycle b) applicazione alla funzione jink(q) trasformata hankel della Rect

La chirp z-trasformata

La chirp z-tasformata è un algoritmo per il calcolo della Z-trasformata di una serie di lunghezza finita, valutata nel dominio della frequenza su campioni equispaziati appartenenti ad un percorso generalizzato nel piano z (Stearns e Hush 1999). Se si prendono in considerazione percorsi che rappresentano archi di cerchio unitario, si conserva il riferimento co la trasformata di trasformata di Fourier. La chirp z-trasformata è qui introdotta perché utilizzata nella ricostruzione con il ricostruzione con il linogramma.

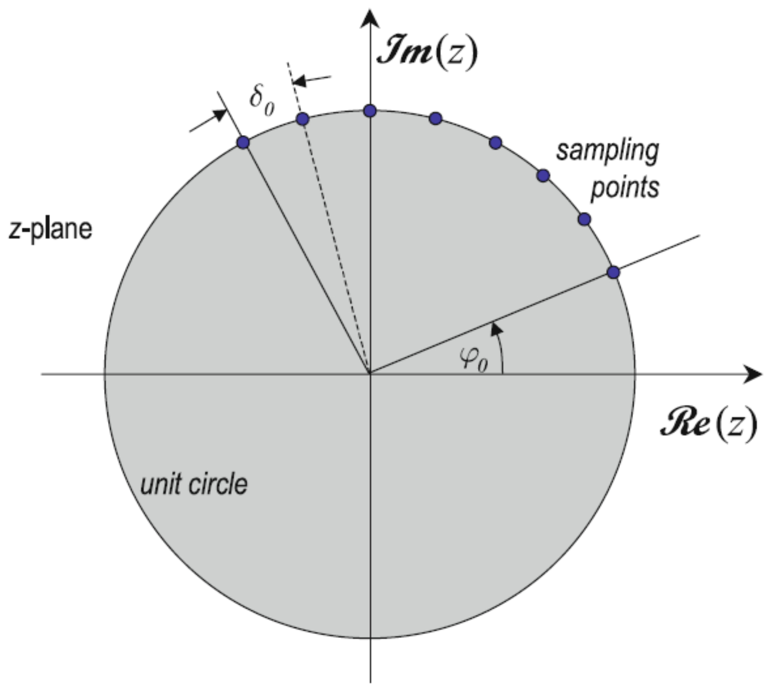


Figura 7: la chirp z-trasformata può essere usata per calcolare M campioni della z-trasformata sul cerchio unitario.

Posto che $\{x(n)\}_{n=0,\cdots,N-1}$ sia una serie di N campioni nel dominio dello spazio di cui vogliamo calcolate lo spettro, si può scrivere per calcolare la z-trasformata si può utilizzare la seguente espressione:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

poiché nel nostro caso la z-trasformata viene calcolata sul cerchio unitario, si può usare la sostituzione $z=e^{i2\pi u}$ e l'equazione precedente diventa uguale a quella della trasformata discreta di Fourier.

Considerando la trasformata di Fourier di N campioni sul cerchio unitario a partire dall'angolo φ_0 e ad intervalli pari a δ_0, i campioni lungo un arco possono essere descritti dalla:

$$z_k=AB^{-k} \text{ con } \mathrm{k}=0,\cdots,\mathrm{N}-1$$

dove

$$A=e^{i\varphi_0} \; e \; B=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_0}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione della z-trasformata si ottiene:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(AB^{-k}\right)^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)A^{-n}B^{nk} \text{ con } \mathrm{k}=0,\cdots,\mathrm{N}-1$$

Ricordando che $(\mathrm{k}-\mathrm{n})^2=k^2-2kn+n^2$, si ottiene l'identità di Bluestein (Bluestein,1970):

$$\text{kn} = \frac{1}{2}\left[k^2 + n^2 - (k-n)^2\right]$$

Che inserita nell'ultima espressione di X(z) da:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} B^{\frac{n^2}{2}} B^{\frac{k^2}{2}} B^{-\frac{(k-n)^2}{2}} = B^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n) A^{-n} B^{\frac{n^2}{2}}\right) B^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

Inoltre, sostituendo:

$$g_n = x(n) A^{-n} B^{\frac{n^2}{2}} \quad \text{e} \quad \text{h}_\text{n} B^{\frac{n^2}{2}}$$

si ottiene la convoluzione lineare

$$X(z_k) = B^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} g_n h_{k-n}$$

che può essere facilmente realizzata nel dominio della frequenza per mezzo della trasformata di Fourier.

Il nome "chirp" è dovuto alla forma di h_n

$$\text{h}_\text{n} = e^{i\delta_0 \frac{n^2}{2}} = e^{in\left(\delta_0 \frac{n}{2}\right)}$$

La cui parte immaginaria è illustrata in figura 8. h_n è una oscillazione complessa con la frequenza che aumenta linearmente.

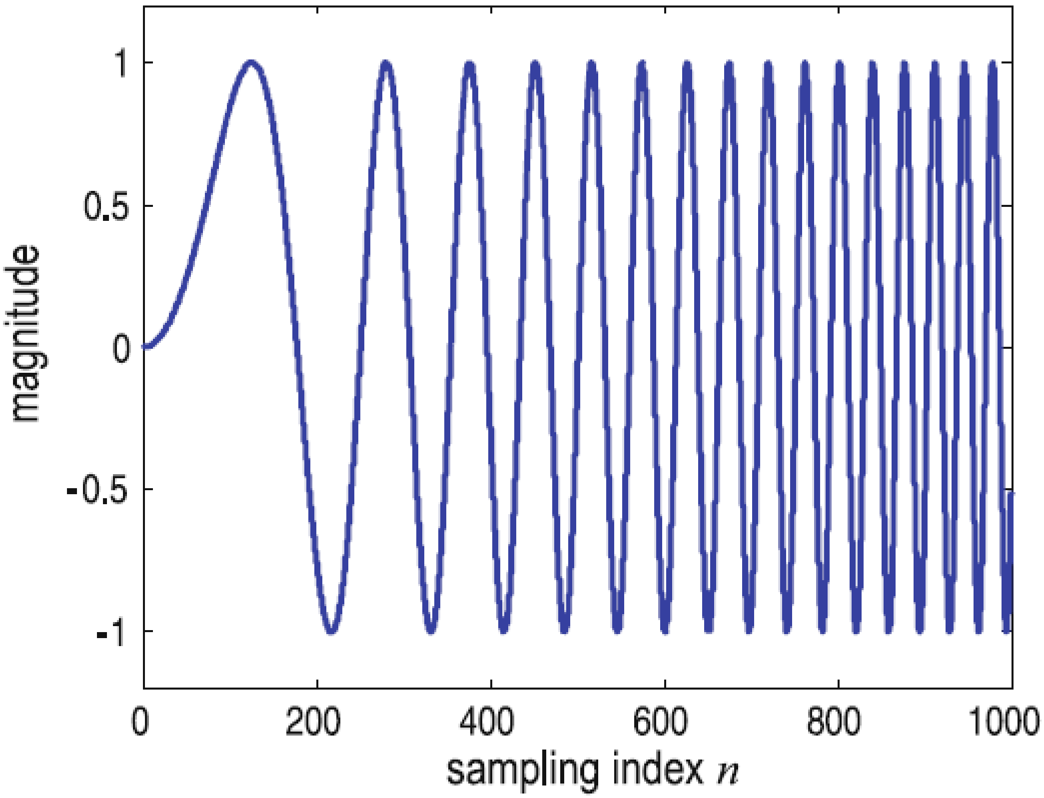


Figura 8: esempio di segnale chirp: il comportamento sinusoidale della parte immaginaria del segnale con la frequenza che aumenta linearmente.