

4. Legge di assorbimento

I raggi-X sono radiazioni di natura elettromagnetica in grado di attraversare i corpi opachi alla luce. Essi sono generati in un apposito tubo, detto radiogeno, che consiste in un'ampolla di vetro sotto vuoto (vedi figura) all'interno del quale sono presenti un anodo e un catodo a cui viene applicata una elevata differenza di potenziale elettrico (dell'ordine di decine di migliaia di Volt).

Riscaldato dal passaggio della corrente, il catodo emette, per eccitazione termica, un fascio di elettroni che vengono accelerati verso l'anodo, su cui impattano ad alta energia. Gli elettroni che colpiscono l'anodo, formato da un metallo pesante, tipicamente tungsteno o molibdeno, cedono la loro energia producendo calore e radiazioni che appartengono appunto alla banda dei raggi-X (in realtà solo l'1 dell'energia ceduta si trasforma in radiazione). Una parte del fascio di raggi-X così generato passa attraverso la finestra del tubo e viene indirizzato verso l'oggetto sottoposto ad analisi.

Sebbene un fascio di raggi-X sia composto da un gran numero di particelle discrete chiamate fotoni, che dispongono di una propria energia (misurata in unità di *elettron-Volt*), esso può essere modellato come un flusso continuo di energia.

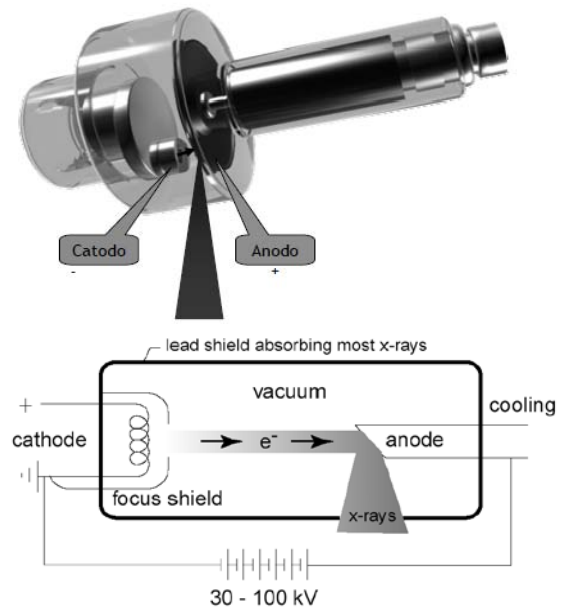


Figura 1: Tubo radiogeno e sua schematizzazione

Allo scopo di caratterizzare il comportamento di un fascio di raggi-X all'interno di un mezzo, quindi, il fascio viene modellato come un flusso continuo, ed inoltre si fanno le seguenti assunzioni:

- *Nessuna rifrazione o diffrazione*, cioè il fascio attraversa l'oggetto senza essere deviato. Tale ipotesi è una buona approssimazione della realtà poiché i fotoni possiedono un'alta energia.
- *I raggi-X sono monocromatici*, tutti i fotoni del fascio hanno la stessa energia.
- *Vale la legge di assorbimento di Beer (Beer's Law)*. All'interno di un mezzo, una radiazione incidente subisce un'attenuazione che dipende dalla natura del materiale attraversato. Detta allora $\mu(x)$ il coefficiente di assorbimento lineare del materiale, l'intensità del fascio di raggi-X, $I(x)$ rispetta la legge di assorbimento:

$$\frac{dI}{ds} = -\mu(\mathbf{x})I$$

dove s rappresenta la lunghezza del tratto di traiettoria percorsa dal fascio di raggi-X.

Si consideri prima il caso monodimensionale, detta s la coordinata spaziale, si può scrivere per $I(s)$ (misurata in unità di *elettron-Volts/sec*) la seguente equazione approssimata che predice la variazione d'intensità dovuta alla presenza di un materiale che giace nello spazio $s - s + \Delta s$

$$I(s + \Delta s) \approx -\mu(s)I(s)\Delta s$$

Ricordando che il fascio è composto da un gran numero di fotoni al secondo $N(s)$, per ipotesi dotati della stessa energia, si può scrivere:

$$N(s + \Delta s) \approx -\mu(s)N(s)\Delta s$$

E' chiaro che il termine $\mu(s)\Delta s$ rappresenta la probabilità che un fotone incidente sul materiale nel punto s sia assorbito. Implicitamente in questa relazione oltre a ipotizzare che i raggi-X viaggiano lungo una linea retta, si ipotizza anche che l'assorbimento sia un processo isotropo, non dipendente cioè dalla direzione lungo cui viaggiano i raggi-X. Questo modello monodimensionale risulta facilmente estendibile a problemi a due e tre dimensioni, che possono essere pensati come insiemi di fasci monodimensionali.

Supponiamo che il nostro fascio viaggi lungo una linea giacente in un piano, l'intensità i ed il coefficiente di assorbimento m lungo la linea possono per quanto detto essere pensati come funzioni della sola variabile indipendente s .

Se si vuole conoscere l'assorbimento tra due punti a e b è dunque necessario integrare l'equazione:

$$\int_a^b \frac{di}{i} = -\int_a^b m(s)ds$$

$$\log \left[\frac{i(b)}{i(a)} \right] = -\int_a^b m(s)ds$$

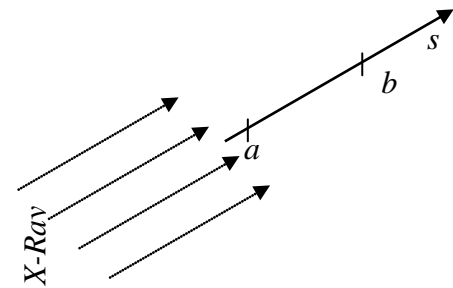


Figura 2: Retta di riferimento nel caso monodimensionale

Consideriamo ora il caso di una sorgente puntiforme nel piano di intensità I_0 . Se si considera la sorgente isotropa, il flusso sarà uguale in tutte le direzioni, e quindi l'intensità del flusso a distanza r dalla sorgente dipenderà solo da tale distanza. Per la legge della conservazione dell'energia si ottiene:

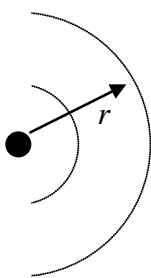


Figura 3: Rappresentazione di una sorgente puntiforme

$$I_0 = \int_{x^2+y^2=r^2} I(r)ds = 2\pi r I(r) \text{ da cui } I(r) = \frac{I_0}{2\pi r}$$

se I_0 è misurata in *electron-Volts/sec* allora $I(r)$ è misurata in *electron-Volts/(cm*sec)*.

Per una sorgente puntiforme è dunque possibile riscrivere la legge dell'assorbimento portando in conto la variazione che subisce l'intensità del fascio al variare della distanza r dalla sorgente, cioè l'attenuazione dovuta alla divergenza del fascio.

Si introduce allora nell'espressione del coefficiente di assorbimento la dipendenza dall'inverso di r :

$$\frac{dI}{dr} = -\frac{1}{r}I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{1}{r}dr$$

integrando l'equazione tra un $r_0 > 0$ e un generico r si ottiene:

$$I(r) = I(r_0) \frac{r_0}{r}$$

Ovviamente non è possibile calcolare l'integrale a partire da $r_0=0$ in quanto, a causa del modello puntiforme adottato, l'energia in 0 è infinita.

L'attenuazione subita dal fascio di raggi-X non dipende solo quindi dalle caratteristiche del mezzo attraversato, ma anche dall'allargamento a ventaglio del fascio. In genere nella tomografia a raggi-X si trascura l'attenuazione dovuta alla divergenza del fascio ipotizzando che tale attenuazione sia molto più piccola di quella dovuta all'assorbimento dell'oggetto in studio.

In una situazione reale la sorgente di raggi-X viene attivata per un periodo di tempo noto ed emette una energia conosciuta I_0 che incide sull'oggetto, mentre l'energia I_r emergente dall'oggetto lungo una linea l è misurata da un rivelatore di raggi-X. Il rapporto esistente tra le due intensità è dato dalla legge dell'assorbimento:

$$\log \frac{I_r}{I_0} = - \int_l \mu(\mathbf{x}) ds$$

Una radiografia tradizionale è normalmente ottenuta dirigendo un fascio di raggi-X attraverso un oggetto ed utilizzando come rivelatore una pellicola fotografica. La radiazione emergente viene evidenziata per effetto fotochimico su di una pellicola radiografica che quindi fornisce una misura dell'intensità del fascio dei raggi-X in quanto è ricoperta da uno speciale film sensibile alle radiazioni. Le zone della pellicola in cui le radiazioni sono meno intense, perché sono state assorbite dall'oggetto esposto alle radiazioni, risulteranno più chiare, mentre appaiono scure le zone in cui le radiazioni sono più intense, in quanto non sono state assorbite.

Il risultato impresso sulla pellicola fotografica è detto *proiezione* o ombra dell'oggetto. Nel caso in cui oggetti differenti generano le medesime proiezioni, non è possibile distinguere le due diverse configurazioni (vedi figura 3a e 3b).

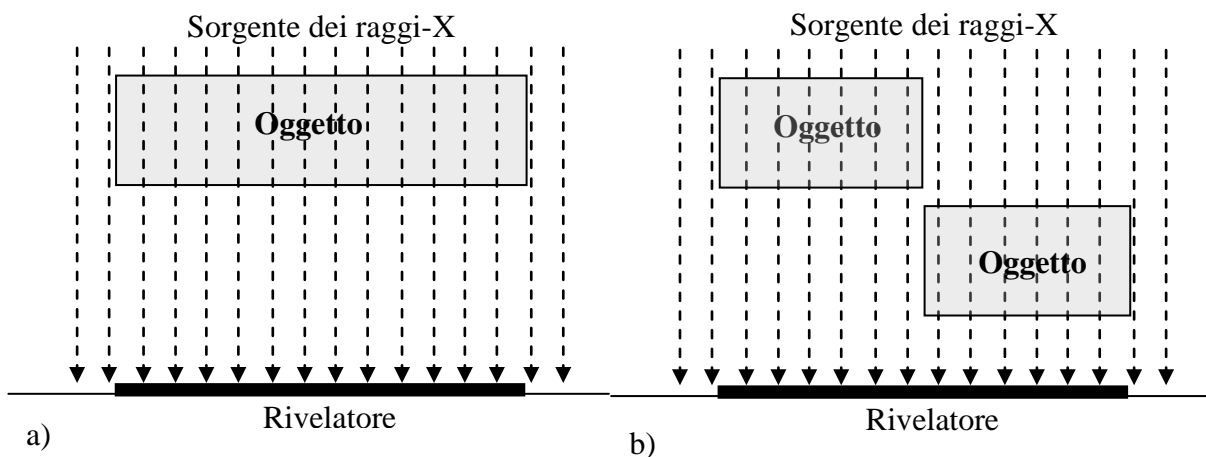


Figura 4: Schema di un sistema radiografico, a) a singolo oggetto; b) a due oggetti

Se si cambia proiezione diventa possibile distinguere i due oggetti (vedi figura in basso). Ovviamente più proiezioni si prendono più oggetti è possibile distinguere. La tomografia ha l'ambizioso obiettivo di ricostruire l'oggetto a partire dalle sue proiezioni.

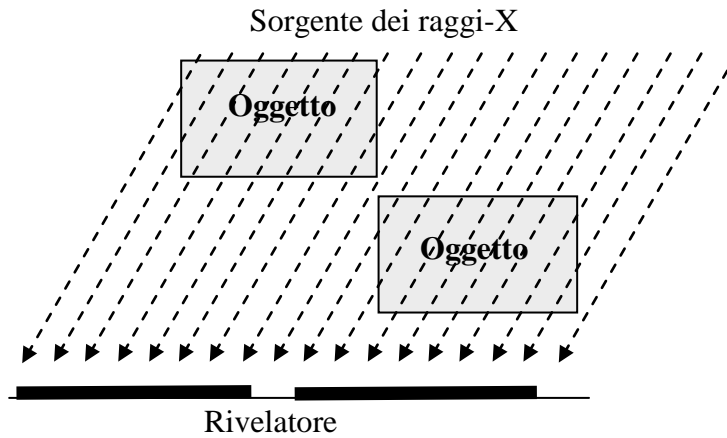


Figura 5: Schema a proiezione non ortogonale

4.1. Analisi di una sorgente puntiforme

In questo paragrafo si vuole analizzare il comportamento di un semplice sistema a due dimensioni, formato da una sorgente puntiforme da un corpo assorbente e da una superficie fotografica (vedi figura in basso). Si vuole calcolare il flusso sul punto P_ϕ appartenente alla superficie fotografica in termini di attenuazione del fascio dovuta sia all'assorbimento del corpo sia all'allargamento del fascio.

La geometria dell'apparato suggerisce di utilizzare le coordinate polari r e ϕ , con r distanza dalla sorgente e ϕ angolo rispetto alla perpendicolare al film passante per la sorgente. Per quanto detto nel paragrafo precedente, indicando il coefficiente di attenuazione per il corpo assorbente con $\mu_a(r, \phi)$ il coefficiente totale di attenuazione si ottiene aggiungendo il termine $\mu_s(r)=r^{-1}$, dovuto alla divergenza del fascio.

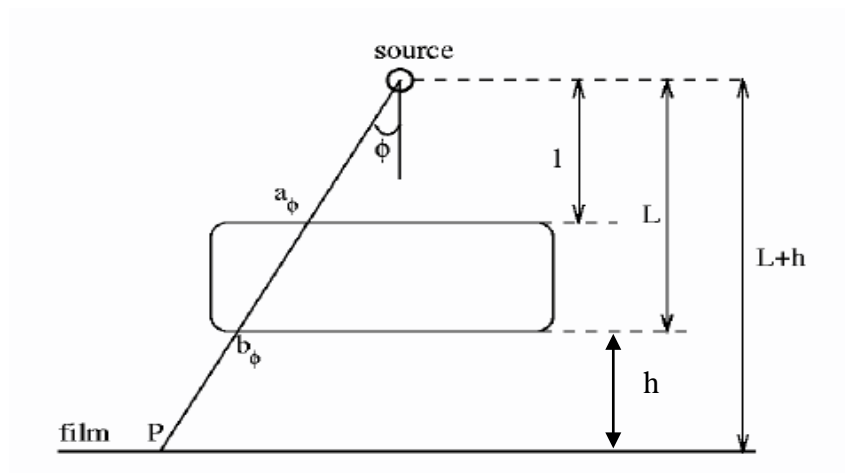


Figura 6: Apparato con sorgente puntiforme e rivelatore a pellicola fotografica

Per il fascio di raggi-X che viaggia lungo la linea che congiunge la sorgente con il film nel punto P_ϕ l'equazione differenziale che descrive l'attenuazione è data da:

$$\frac{dI}{dr} = -\left(\mu_a(r, \phi) + \frac{1}{r}\right)I$$

Supponendo di attivare la sorgente di raggi-X per un dato periodo di tempo, l'intensità totale risultante dalla radiazione viene indicata anch'essa con la lettera I_0 , per evitare di introdurre altre notazioni. Detti a_ϕ e b_ϕ il primo e l'ultimo punto di intersezione della traiettoria ad angolo ϕ con il corpo assorbente e le altre distanze h , L e $L+h$, come indicato in figura sopra, e integrando la precedente equazione da r_0 a r_ϕ (posizione del piano della pellicola) si ottiene:

$$\int_{r_0}^{r_\phi} \frac{dI}{I} = \int_{r_0}^{r_\phi} -\left(\mu_a(r, \phi) + \frac{1}{r}\right) dr$$

$$\log \frac{I(r_\phi, \phi)}{I_0(r_0, \phi)} = \log \frac{r_0}{r_\phi} - \int_{a_\phi}^{b_\phi} \mu_a(s, \phi) ds$$

passando agli esponenziali si ottiene:

$$\frac{I(r_\phi, \phi)}{I_0(r_0, \phi)} = \frac{r_0}{r_\phi} \exp\left[-\int_{a_\phi}^{b_\phi} \mu_a(s, \phi) ds\right] \Rightarrow I(r_\phi, \phi) = I_0(r_0, \phi) \frac{r_0}{r_\phi} \exp\left[-\int_{a_\phi}^{b_\phi} \mu_a(s, \phi) ds\right]$$

ricordando che:

$$a_\phi = \frac{l}{\cos \phi}, \quad b_\phi = \frac{L}{\cos \phi}, \quad r_\phi = \frac{L+h}{\cos \phi} \quad \text{e} \quad I_0(r_0, \phi) = \frac{I_0}{2\pi r_0}$$

si ottiene:

$$I(r_\phi, \phi) = I_0 \frac{\cos \phi}{2\pi(L+h)} \exp\left[-\int_{a_\phi}^{b_\phi} \mu_a(s, \phi) ds\right]$$

Si consideri ora il parametro *densità fotografica* o densità del film che è una misura del grado di annerimento di una emulsione fotografica dopo l'esposizione ad una radiazione. La densità del film in un punto è per definizione proporzionale al logaritmo della densità di energia totale incidente in quel punto:

$$\text{Densità del film} = \gamma \cdot \log(\text{energia totale})$$

con γ costante che porta in conto le caratteristiche della pellicola.

Allo scopo di valutare la densità del film, è dunque necessario calcolare l'energia coinvolta nel processo. Poiché il fascio non è perpendicolare al film fotografico, viene calcolata l'energia su una zona della pellicola sottesa dall'angolo $\Delta\phi$, data da:

$$\Delta F = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} I(r, \phi) \hat{r} \cdot \hat{n} ds, \quad \hat{r} = -(\sin \phi, \cos \phi)$$

Dove $\hat{n} = (0,1)$ è il versore normale alla pellicola e ds è la lunghezza del segmento di pellicola sotteso dall'angolo $\Delta\phi$.

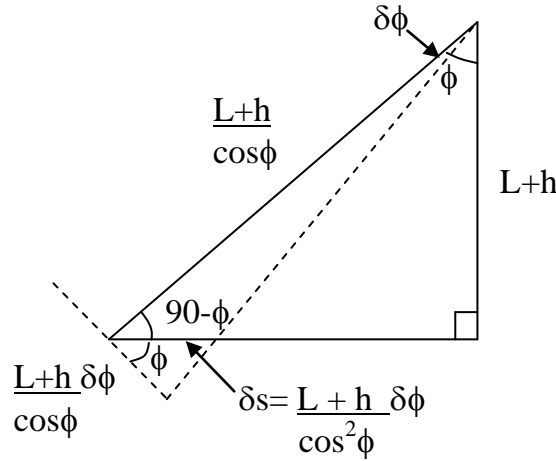


Figura 7: Derivazione del segmento $\Delta\phi$

Nell'ipotesi in cui $\Delta\phi$ è molto piccolo:

$$\sin(\Delta\phi) \approx \Delta\phi$$

quindi, in coordinate polari si ottiene:

$$ds = \frac{L+h}{\cos^2\phi} \Delta\phi$$

Nelle stesse ipotesi, inoltre vale che $\hat{r} \cdot \hat{n} = \cos\phi$ e l'integrale si può approssimare con:

$$\Delta F = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} I(r_{\phi}, \phi) \hat{r} \cdot \hat{n} \frac{L+h}{\cos^2\phi} d\phi \approx I_0 \frac{\cos^2\phi}{2\pi(L+h)} \exp\left[-\int_{a_{\phi}}^{b_{\phi}} \mu_a(s, \phi) ds\right] \frac{L+h}{\cos^2\phi} \Delta\phi$$

La lunghezza della pellicola sottesa dall'angolo è quindi approssimativamente:

$$\Delta S = \frac{L+h}{\cos^2\phi} \Delta\phi$$

La densità di energia al punto P_{ϕ} , dove la linea che forma un angolo ϕ con la sorgente, incontra la pellicola, è ΔF diviso per la lunghezza ΔS . In realtà ipotizzando $\Delta\phi$ tendente a zero si ottiene:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{I_0 \cos^2\phi}{2\pi(L+h)} \exp\left[-\int_{a_{\phi}}^{b_{\phi}} \mu_a(s, \phi) ds\right]$$

Per cui la densità del film sviluppato a P_{ϕ} è

$$\gamma \log \frac{dF}{ds} = \gamma \left[\log \frac{I_0 \cos^2\phi}{2\pi(L+h)} - \int_{a_{\phi}}^{b_{\phi}} \mu_a(s, \phi) ds \right]$$

dove il primo termine dipende dall'attenuazione dovuta all'allargamento del fascio. Per misurare l'attenuazione dovuta al solo corpo assorbente, posta $\delta(\phi)$ la densità del film al punto P_{ϕ} si ottiene:

$$-\int_{a_\phi}^{b_\phi} \mu_a(s, \phi) ds = \gamma^{-1} \delta(\phi) - \log \left[\frac{I_0 \cos^2 \phi}{2\pi(L+h)} \right]$$

Sulla parte destra dell'equazione si trova la quantità misurata, sulla parte sinistra l'integrale di linea del coefficiente di assorbimento. Ovviamente variando la posizione della sorgente e del rivelatore si possono misurare gli integrali di linea del coefficiente di assorbimento lungo un'altra famiglia di linee.

4.2. Considerazioni fisiche

La principale ipotesi utilizzata nel modello precedente riguarda la sorgente di raggi-X considerata monocromatica. In realtà un fascio di raggi-X contiene fotoni che hanno energie distribuite in un ampio intervallo. La distribuzione dei fotoni secondo la loro energia è in genere descritta dalla funzione *spettro*, $S(\epsilon)$.

Se ϵ_1 e ϵ_2 sono due valori di energia prossimi, l'energia complessiva dovuta a fotoni con energia compresa nell'intervallo $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ è pari a $S(\epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ o più precisamente:

$$\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} S(\epsilon) d\epsilon$$

L'andamento della funzione spettrale di energia è riportato in figura.

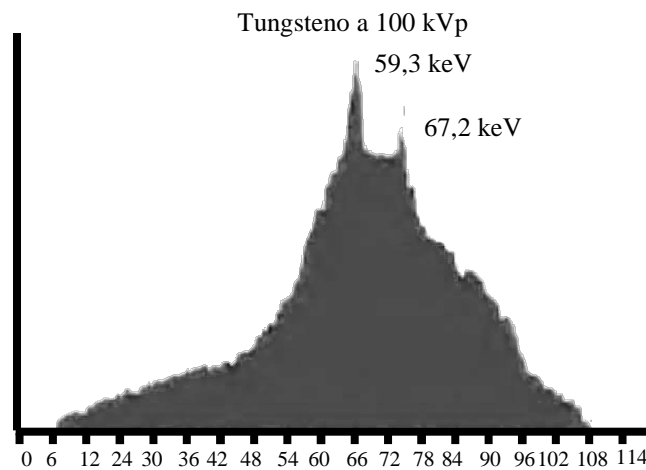


Figura 8: Spettro di energia del fascio

L'energia totale è data da:

$$\Psi_i = \int_0^{\infty} S(\epsilon) d\epsilon$$

Il coefficiente di attenuazione per un materiale è una funzione complessa dell'energia, decrescente monotonicamente all'aumentare dell'energia. Detti $I_i(\epsilon)$ e $I_0(\epsilon)$ rispettivamente il flusso di energia

incidente e emergente dall'oggetto analizzato, e ricordando che per i fotoni di energia ε , che viaggiano lungo una linea l , la legge dell'assorbimento è data da:

$$\frac{I_0(\varepsilon)}{I_i(\varepsilon)} = \exp\left[-\int_l \mu(x, \varepsilon) ds\right]$$

definito $S(\varepsilon)d\varepsilon$, il flusso di energia incidente vale che:

$$I_0(\varepsilon) = S(\varepsilon)d\varepsilon \exp\left[-\int_l \mu(x, \varepsilon) ds\right]$$

Poiché il coefficiente di assorbimento dipende da ε e l'assorbimento è maggiore a energia minore, la distribuzione di energia in uscita è spostata verso l'alto. L'energia di uscita è quindi data da:

$$S_{out}(\varepsilon) = S(\varepsilon) \exp\left[-\int_l \mu(x, \varepsilon) ds\right]$$

l'energia totale di uscita è allora:

$$\Psi_0 = \int_0^{\infty} S(\varepsilon) \exp\left[-\int_l \mu(x, \varepsilon) ds\right] d\varepsilon$$

Ricostruire la funzione del coefficiente di assorbimento è problema matematico molto complesso poiché l'energia totale Ψ_0 è una funzione non lineare del coefficiente di assorbimento $\mu(x, \varepsilon)$. Nel modello precedentemente utilizzato si evita di affrontare il problema ipotizzando il fascio monocromatico.

5. Angiografia sottrattiva

L'angiografia è la rappresentazione a scopo diagnostico dei vasi sanguigni o linfatici del corpo umano. In particolare l'*angiografia digitale sottrattiva* (DSA) è una speciale metodica che usa immagini radiografiche, riprese in momenti diversi, per visualizzare delle strutture vascolari altrimenti difficilmente visibili.

La tecnica prevede l'infusione di un mezzo di contrasto radio-opaco e idrosolubile all'interno dei vasi sanguigni e l'acquisizione di due differenti immagini, la prima senza mezzo di contrasto, detta maschera, la seconda quando il mezzo di contrasto è distribuito in maniera appropriata nelle strutture da visualizzare. L'uso di un agente di contrasto si rende necessario in quanto il sangue ha normalmente lo stesso coefficiente di attenuazione per i raggi-X dei tessuti circostanti. All'immagine ottenuta dopo l'introduzione del contrasto viene sottratta l'immagine maschera. In questo modo le strutture comuni nelle due immagini, caratterizzate dalla stessa intensità, vengono cancellate lasciando ben visibili solo le strutture riempite dal mezzo di contrasto.

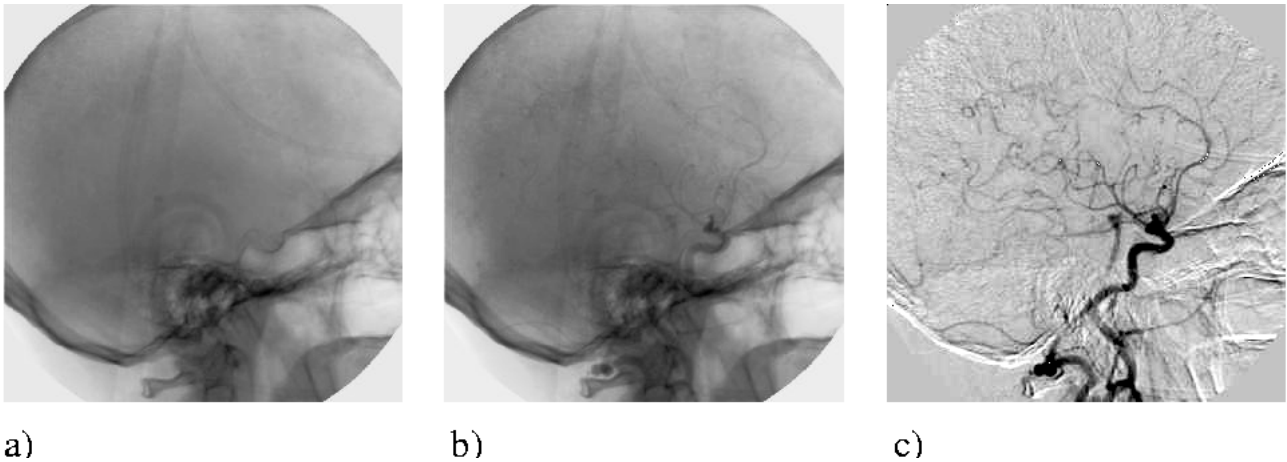


Figura 9: Esempio di immagine DSA,
a) immagine maschera; b) immagine con mezzo di contrasto; c) immagine differenza

La misura dell'intensità nell'immagine maschera è data dalla:

$$I_m(x, y) = I_0 \exp\left(-\int_{r_1}^{r_2} \mu(r) dr\right)$$

dove r_2-r_1 è lo spessore totale dei tessuti presenti nell'immagine. Se si riempie un vaso di spessore D con un mezzo di contrasto avente coefficiente di attenuazione pari a μ_c , l'intensità totale sarà data dal prodotto:

$$I_c(x, y) = I_0 \exp\left(-\int_{r_1}^{r_A} \mu(r) dr\right) \exp\left(-\int_{r_A}^{r_{A+D}} \mu_c(r) dr\right) \exp\left(-\int_{r_{A+D}}^{r_2} \mu(r) dr\right)$$

dove r_A è la posizione di ingresso dei raggi X nel vaso.

Sottraendo semplicemente I_c a I_m si ottiene un'espressione complessa che è influenzata notevolmente dall'attenuazione subita dai raggi-X lungo la loro traiettoria.

Se si applica una trasformazione logaritmica ad entrambi i membri si ottiene:

$$\log I_c - \log I_m = -\int_{r_1}^{r_A} \mu(r) dr - \int_{r_A}^{r_{A+D}} \mu_c(r) dr - \int_{r_{A+D}}^{r_2} \mu(r) dr + \int_{r_1}^{r_2} \mu(r) dr$$

$$\int_{r_A}^{r_{A+D}} (\mu(r) - \mu_c(r)) dr$$

Nelle condizioni in cui $\mu_c \gg \mu$, quindi, l'intensità dell'immagine differenza dipende unicamente dal coefficiente di assorbimento del mezzo di contrasto, che è proprio il risultato che ci si aspettava.

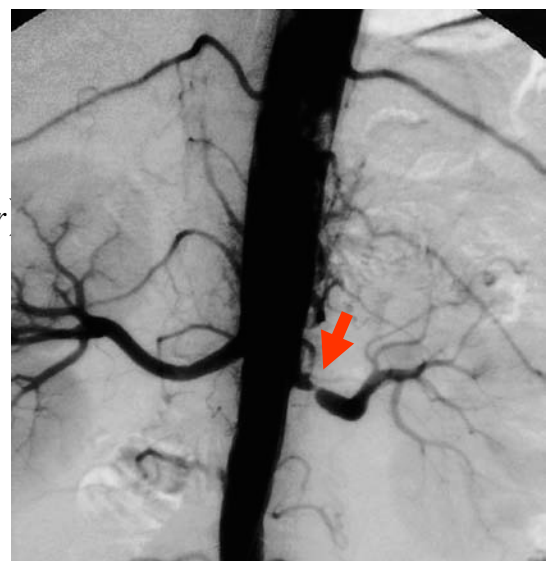


Figura 10: DSA dell'aorta addominale: stenosi della arteria renale sinistra (freccia)

Ovviamente tanto maggiore sarà il contrasto delle immagini ottenute, tanto più esse risulteranno facilmente interpretabili (vedi figura). È bene ricordare però che, per quanto detto nei paragrafi precedenti, il risultato appena trovato è completamente valido solo se si sta considerando un fascio di raggi-X monocromatico.

Ovviamente sebbene il principio di realizzazione di questa tecnica sia molto semplice, la pratica è più complessa. Spesso, infatti si ha a che fare con immagini dinamiche, cioè con una sequenza di immagini acquisite in un piccolo intervallo di tempo, normalmente la risoluzione temporale è di 30 frames al secondo, in quanto in questo modo si è in grado di visualizzare anche la velocità con cui il bolo di mezzo di contrasto si muove all'interno del vaso (vedi figura), e quindi di dare informazioni sulla funzionalità dell'organo interessato.

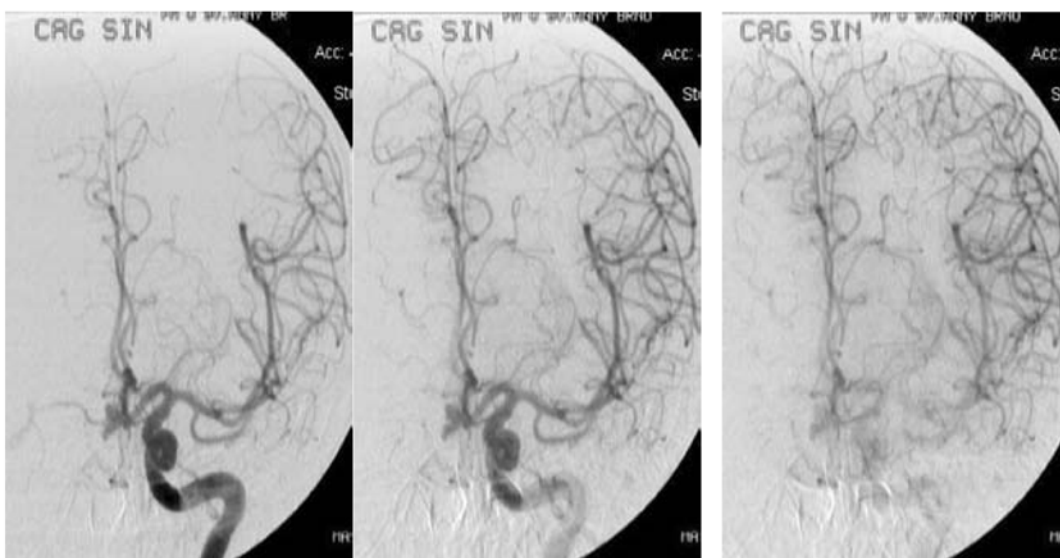


Figura 11: Sequenza di immagini per una angiografia sottrattiva durante il riempimento dei vasi da parte del mezzo di contrasto

Dovendo registrare e confrontare sequenze di immagini, diventa molto delicato il problema del movimento del paziente durante la registrazione della serie di immagini necessarie. Se tali operazioni dunque non sono eseguite con la dovuta attenzione, la differenza tra due immagini potrebbe non evidenziare solo le strutture a differente contrasto.

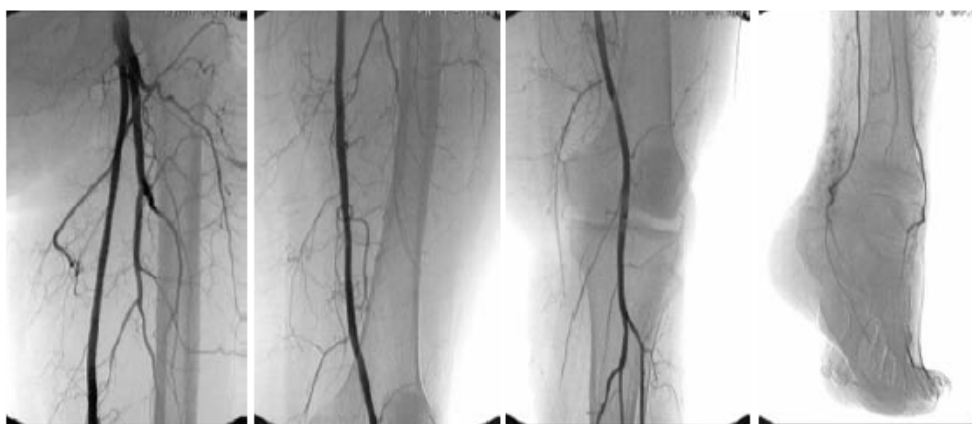


Figura 12: Esempio di angiografia sottrattiva nella vascolarizzazione delle estremità

6. Dalla proiezione alla tomosintesi

In un sistema di radiologia convenzionale, per effettuare una radiografia, si pone il paziente fra una sorgente di raggi-X e una lastra fotografica. I raggi-X, attraversando il paziente, vengono in parte o completamente assorbiti, secondo il tipo di tessuto che incontrano. Per esempio, le ossa assorbono quasi completamente i raggi X, mentre i muscoli e la pelle li fanno passare quasi (ma non completamente) intatti. La lastra fotografica è quindi colpita dai raggi-X che hanno attraversato il paziente, diventando più o meno scura in funzione dell'intensità del raggio che la colpisce.

La tonalità di grigio in un punto della lastra indica quindi esattamente *quanto* il fascio di raggi-X è stato assorbito dal corpo del paziente in quel punto: bianco, assorbimento completo; nero, nessun assorbimento; grigio, assorbimento parziale. Ciascun tipo di tessuto assorbe i raggi X in modo diverso, cambiando comportamento anche secondo il suo stato di salute (per esempio, il tessuto cerebrale sano assorbe più del tessuto cerebrale tumorale). La tonalità di grigio che appare sulla radiografia in un punto preciso è data dalla somma degli assorbimenti di tutti i tessuti attraversati dal raggio (vedi figura in basso), riassumendo per così dire in un unico valore tutto il suo viaggio.

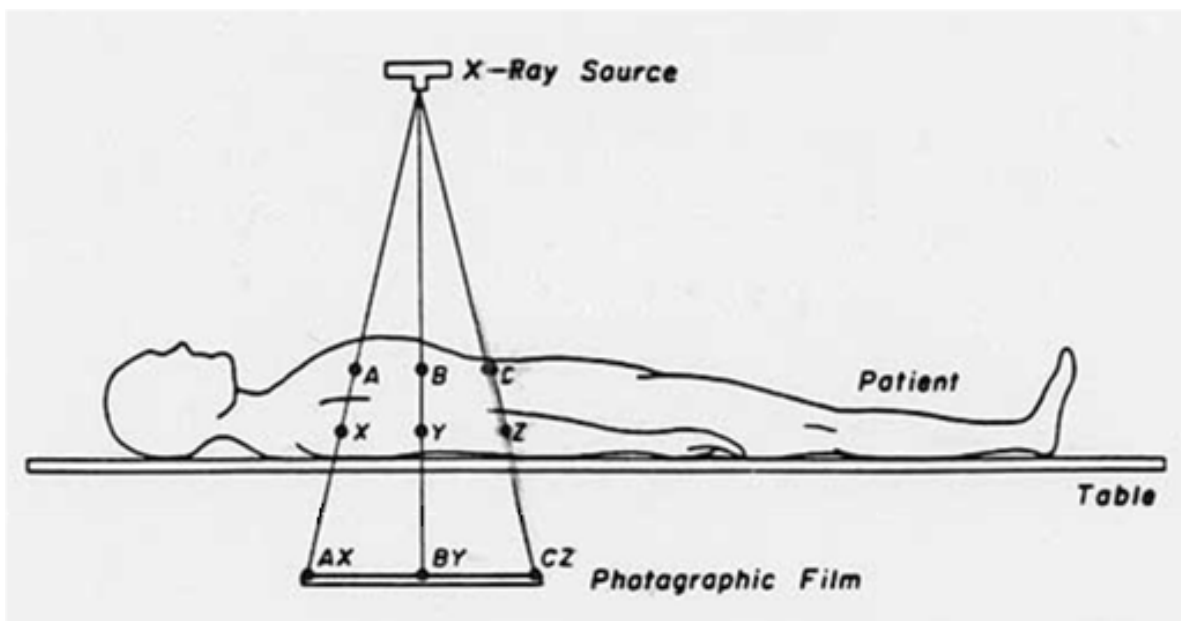


Figura 13: Rappresentazione di un sistema di radiologia convenzionale

Chiaramente, come vedremo più in dettaglio nel seguito, una sola *proiezione* non è sufficiente per ricostruire con precisione la disposizione dei tessuti del paziente in quanto una grande varietà di disposizioni diverse può produrre le stesse tonalità di grigio finali.

La figura seguente mostra delle immagini del cranio (a sinistra) e del ginocchio (a destra) ottenute con la radiologia tradizionale. Queste immagini mostrano l'elevata attenuazione dei raggi X all'interno del corpo dovute per esempio all'osso cranico e alle otturazioni dentali. Le piccole differenze in attenuazione che caratterizzano i tessuti molli, tuttavia, non sono facilmente visibili. La morfologia del cervello, in particolare, è completamente persa nel processo di calcolo della media. Inoltre nella radiografia del ginocchio anche le strutture ossee mostrano un contrasto scarso a causa della loro sovrapposizione.

Il primo tentativo di annullare o ridurre questo effetto lo si è avuto nel 1920 con l'introduzione del concetto di tomografia. La parola è composta da due parole greche Tomos (slice) e graphein (estrazione). La parola è stata proposta dal medico di Berlino Grossmann, il cui tomografo era in

grado di estrarre l'immagine di un'unica fetta del corpo (Grossmann). La figura 3 mostra un quadro storico del tomografo di Grossmann (a sinistra) (Lossau), e uno moderno scanner per la tomosintesi (a destra) (Harer et al.).

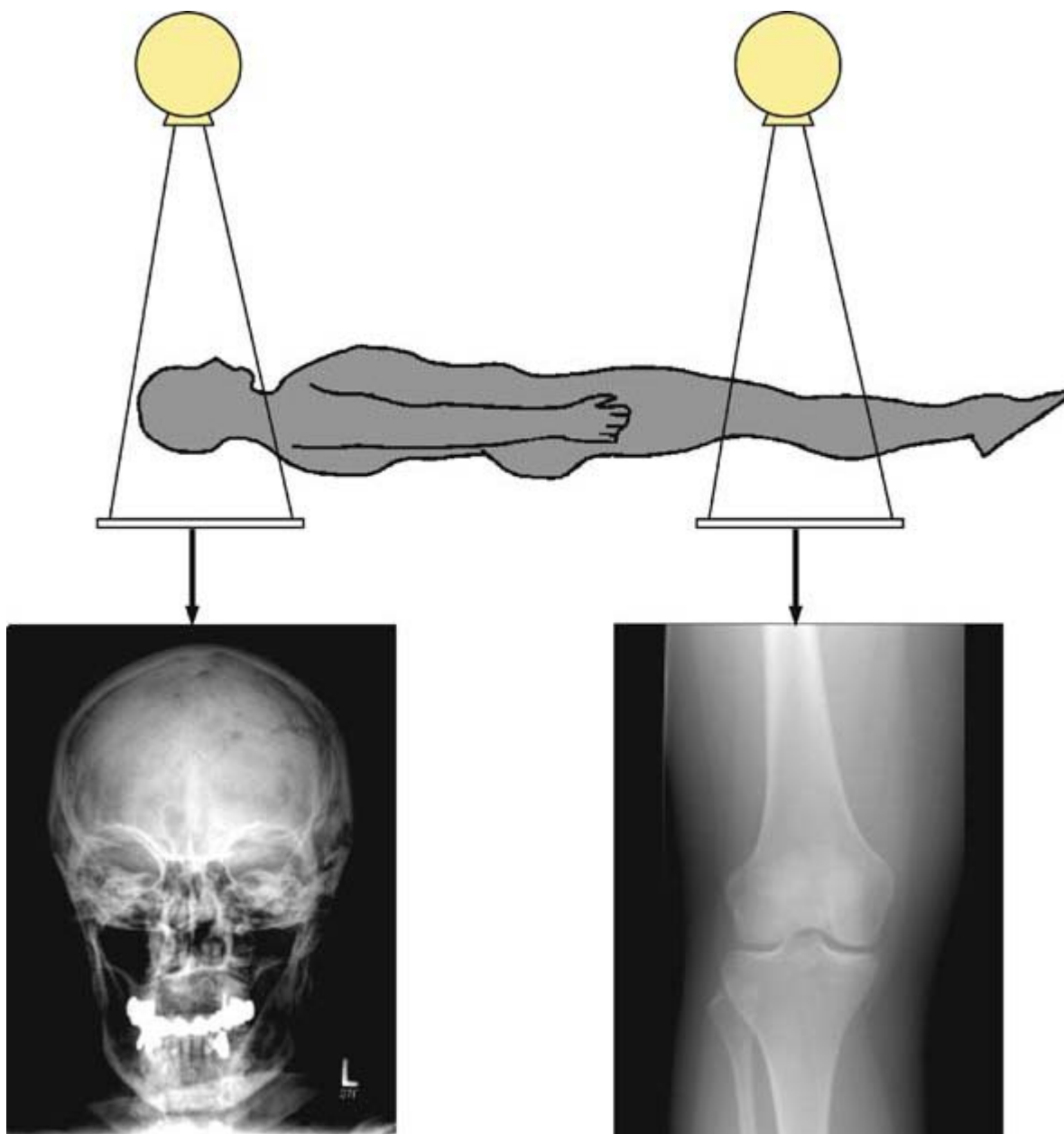


Figura 14: La figura mostra le immagini del cranio (a sinistra) e del ginocchio (a destra) ottenute con la radiologia tradizionale. Esse mostrano l'elevata attenuazione dei raggi X all'interno del corpo dovute all'osso cranico e alle otturazioni dentali. Le piccole differenze in attenuazione che caratterizzano i tessuti molli non sono facilmente visibili. La morfologia del cervello, in particolare, è completamente persa e nella radiografia del ginocchio anche le strutture ossee mostrano un contrasto scarso a causa della loro sovrapposizione.

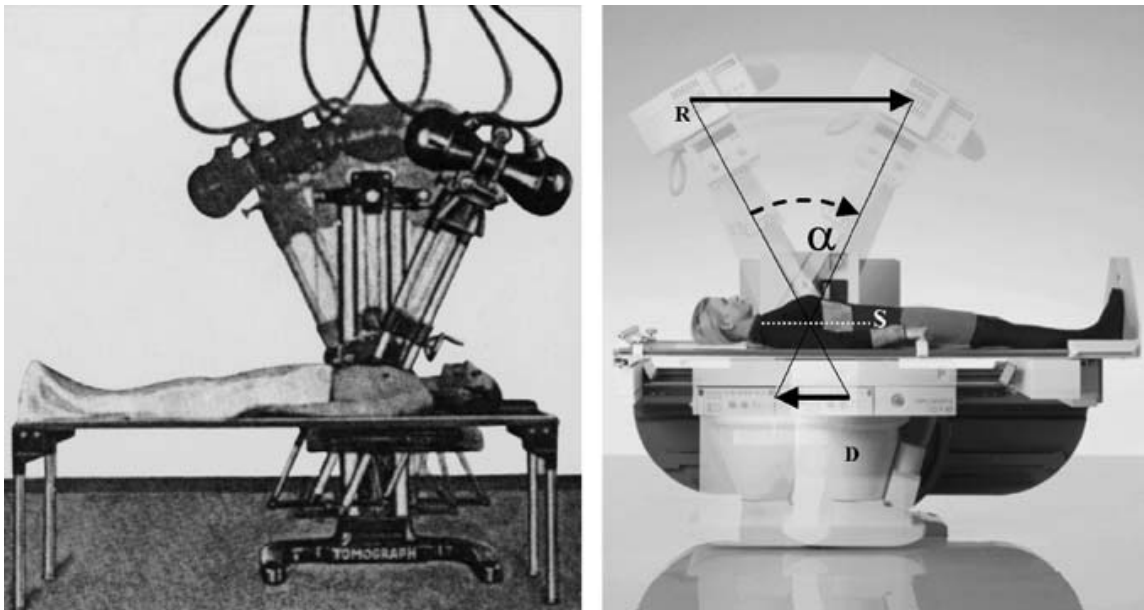


Figura 15: a sinistra lo storico tomografo proposto da Grossman; a destra il moderno tomografo digitale Sirograph T.O.P. prodotto dalla Siemens, la lastra radiografica è mossa in maniera sincrona con il generatore a raggi-x definendo una singola fetta. (cortesia della Siemens Medical Solutions)

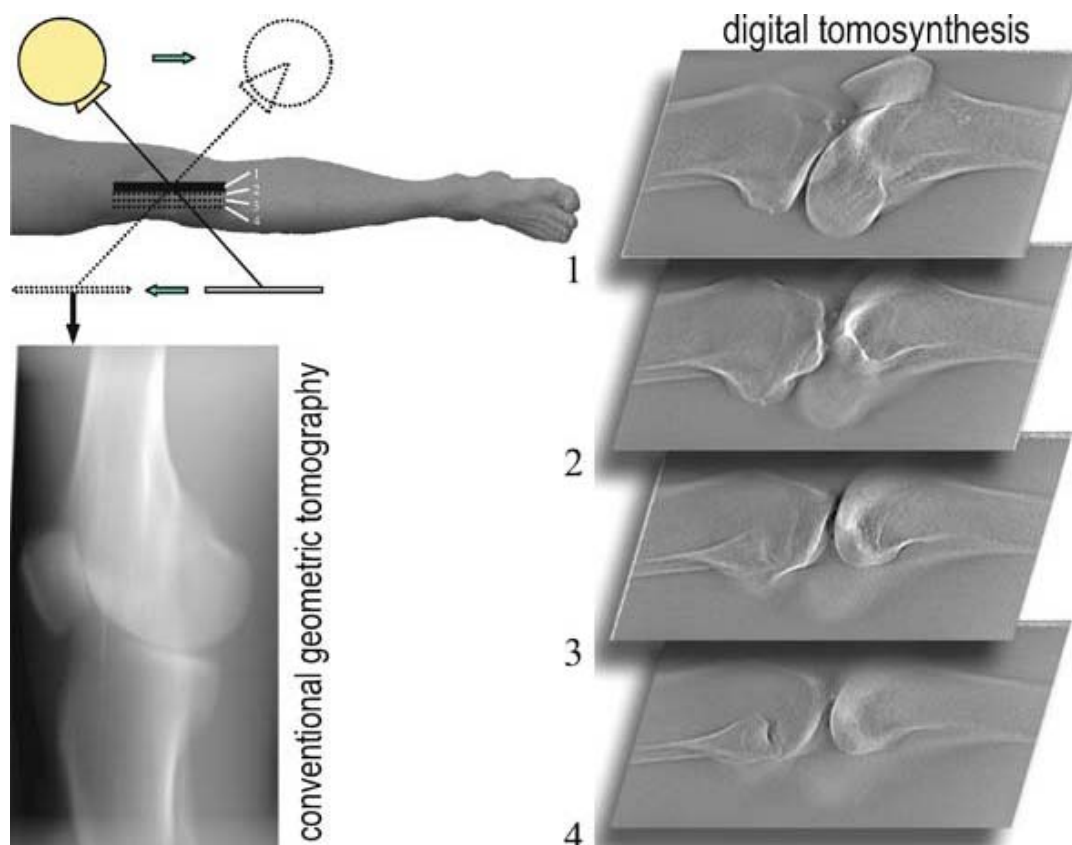


Figura16: I primi tentativi di creare sezioni radiografiche del corpo umano sono state effettuate utilizzando la tomografia geometrica convenzionale o analogico, nota anche come tomosintesi digitale se le immagini acquisite a raggi X sono digitalmente post-elaborazione. In questo processo, il tubo a raggi X e il rivelatore sono mossi in modo sincrono in direzioni opposte. Per questo motivo, le strutture situate sopra e sotto il piano del centro di rotazione sono sfocate (immagini di un phantom del ginocchio ottenute con tomo sintesi convenzionale e tomo sintesi digitale). Per gentile concessione di Siemens Medical Solutions (Harer et al)

Il principio della tomografia geometrica, sia essa convenzionale o analogica, è illustrato in Figura 4. Durante l'acquisizione delle immagini, il tubo a raggi X è mosso in una direzione e la lastra è mossa in direzione opposta in modo sincrono. Per questo motivo, solo i punti nel piano contenente il centro di rotazione sono messi a fuoco. Tutti i punti sopra e sotto questa regione sono invece sfocati, e lo sono di più a distanze maggiori dal centro di rotazione. Pertanto, il metodo può essere interpretato come "sfocatura tomografia." Si chiama poi "tomosintesi" se c'è una parte digitale di post-elaborazione delle immagini di proiezione.

Le informazioni sfocate sopra e sotto il centro di rotazione non scompaiono, ma si sovrappongono all'immagine nitida come una sorta di velo grigio o foschia. Pertanto, una riduzione sostanziale del contrasto è evidente. Tuttavia, il guadagno in termini di qualità rispetto ad una semplice radiografia è ben visibile nell'esempio di una fetta del ginocchio acquisita con la tomosintesi come mostrato in figura 4 (Harer et al.).

La tabella seguente offre una panoramica storica dei fondamentali metodi di tomografia analogica sviluppati.

Classe	Meccanica	Moto	Inventore
Stratigrafia	il tubo a raggi-X e la lastra sono perpendicolari al perno del pendolo	Lineare, circolare o a spirale	Alessandro Vallebona (1930)
Planigrafia	Il tubo a raggi X e la lastra si muovono su piani paralleli equidistanti con movimenti reciproci	Lineare, circolare o a spirale	André Edmond Marie Bocage (1921), Ziedses des Plantes (1921), Ernst Pohl (1932)
Tomografia	Il tubo a raggi-X e la lastra sono attaccati a un pendolo rigido ma il rivelatore è sempre parallelo al piano tomografico	Lineare	Gustav Grossmann (1935)

A causa della maggiore disponibilità di rivelatori elettronici a raggi X, i sistemi di tomosintesi stanno riguadagnando importanza scientifica (Stevens). La figura mostra la T.O.P. Siregraph di Siemens Medical Solutions, uno moderno scanner per tomosintesi (a destra). In questo sistema, le immagini di proiezione sono acquisite, con un intensificatore di brillantezza, durante il movimento e archiviate digitalmente. Ciò permette una ricostruzione differita dell'immagine che è superiore alla tecnica analogica di sfocatura.

La figura 4 permette un confronto diretto tra l'immagine analogica del ginocchio data dalla tomografia geometrica convenzionale (in basso a sinistra) e le singole fette acquisite con una distanza di 8mm usando la tomosintesi. L'angolo di sfocatura, α , determina la misura in cui al di fuori la fetta (S) i dettagli sono soppressi dalla sfocatura. Oltre alla classe di traiettoria (vedi tabella) del tubo a raggi X (R) e del rivelatore (D), l'angolo di sfocatura, α , determina la qualità dell'immagine. Maggiore è l'angolo, α , minore è l'artefatto, cioè l'ampiezza del segnale da strutture situate all'esterno alla fetta che si vuol ricostruire (Harer et al.).

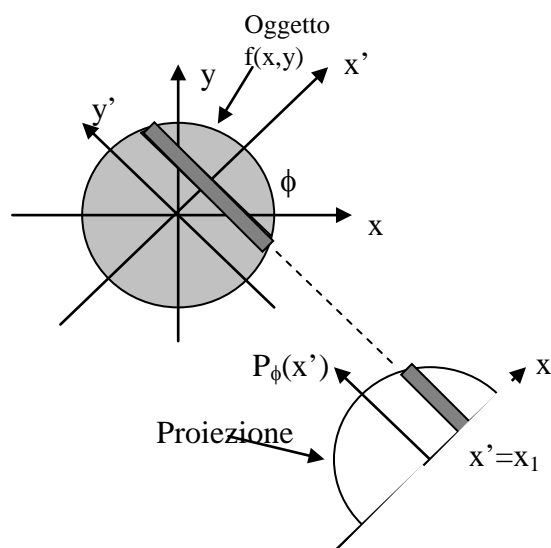
Un metodo simile, chiamato "ortotopantomografia", è oggi diffuso in radiologia dentale. In questo metodo, una vista panoramica dell'arco dentario è prodotta su un piano di immagine curvo per

seguire la mascella. Tuttavia, traiettorie sofisticate consentono una ricostruzione di fette di tomografia geometriche pure.

Aumentando il numero di proiezioni, ottenute da angolazioni diverse, è invece possibile ricostruire con buona precisione la disposizione esatta (e tridimensionale) dei tessuti del paziente. Questo è il principio fondamentale che c'è alla base della tomografia, già espresso nel 1917 dal matematico ungherese *J. Radon*, il quale affermava che: *“una qualsiasi sezione di un oggetto solido può essere ricostruita univocamente da un insieme infinito di proiezioni dello stesso”*¹. Solo verso la fine degli anni '60 però, il fisico *A. M. Cormack* e l'ingegnere *G.N. Hounsfield* riuscirono a mettere a punto gli algoritmi per ricostruire le immagini delle sezioni di un oggetto mediante un numero finito (anche se elevato) di proiezioni.

Oggi, il termine "tomografia", nonostante le altre modalità di generazione, quali la MRI (risonanza magnetica) e la PET (tomografia a emissione di positroni), è ancora comunemente associato alla tomografia computerizzata (TC) o, più precisamente, alla TC a raggi X. La tomografia computerizzata è indicata anche con il termine TAC (tomografia assiale computerizzata). La tomografia computerizzata evita la sovrapposizione di piani sfocati e produce un contrasto così grande che anche il tessuto molle può essere ben visualizzato. Il salto di qualità della diagnostica per immagini ha portato al successo enorme della TC.

La forma più semplice di proiezione è illustrata in figura in basso. Essa è ottenuta come integrale di linea dell'oggetto $f(x,y)$, calcolato lungo una linea retta e rappresenta le caratteristiche di assorbimento di una striscia la cui larghezza finita è determinata principalmente dalle dimensioni del detettore.



**Figura 17: Trasformata di Radon o proiezione (integrale di linea) di un oggetto $f(x,y)$.
In figura è mostrata la trasformata o proiezione ad un dato angolo Φ**

Il parametro fisico di interesse, quindi, in una tomografia a raggi-X, è il coefficiente di assorbimento, che quantifica la tendenza di un oggetto ad assorbire i raggi-X. In genere, esso varia da punto a punto in un oggetto, si considera nullo o tendente a zero al di fuori esso ed è definito

¹ Vale la pena sottolineare che Radon non aveva in mente alcuna applicazione medica quando, nel 1917 nel corso delle sue ricerche in Teoria della Misura, formulò la teoria denominata appunto *trasformata di Radon*; del resto ai suoi tempi i computer erano di là da venire e i raggi-X una novità recente ancora guardata con sospetto.

positivo come la densità. Strutture anatomiche differenti hanno coefficienti di assorbimento differente, l'osso ha un coefficiente di assorbimento molto più elevato di quello dei tessuti molli e differenti tessuti molli hanno coefficienti di assorbimento leggermente differenti. La tabella 1 riporta i tipici valori di assorbimento per differenti parti del corpo, i valori sono dati in *unità di Hounsfield*, quantità adimensionale definita per confronto con il coefficiente di assorbimento dell'acqua:

$$H_{\text{tessuto}} = \frac{\mu_{\text{tessuto}} - \mu_{\text{acqua}}}{\mu_{\text{acqua}}} * 1000$$

Il coefficiente di assorbimento dell'aria (-1000) ed il coefficiente di assorbimento dell'osso definiscono l'intervallo di valori normalmente presente in una situazione clinica, quindi il *range dinamico*, cioè l'intervallo dei valori possibili, in tale situazione è di circa 2000 *unità di Hounsfield*. Dalla tabella appare evidente che la variazione del coefficiente di assorbimento presente nei tessuti molli è di circa il 2% del range totale, per cui risulta necessario stimare il coefficiente di assorbimento con un errore inferiore a mezzo punto percentuale sul fondo scala.

Materiale	Coefficiente di Assorbimento in <i>unità di Hounsfield</i>
acqua	0
aria	-1000
osso	1086
sangue	53
grasso	-61
materia bianca/grigia	-4
tessuto del seno	9
muscoli	41
tessuti molli	51

Tabella 1: Coefficienti di assorbimento dei tessuti umani per un fascio di raggi-X a 100 KeV.

Definito il coefficiente di assorbimento come una funzione $\mu(\mathbf{x})$ nello spazio \mathbf{R}^3 , per definire una fetta bidimensionale è necessario fissare un sistema di coordinate $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Per ogni valore di $x_3=c$ si definisce la fetta bidimensionale, funzione di due variabili:

$$f_c(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2, c)$$

La conoscenza delle funzioni $\{f_c(x_1, x_2): c \in [a, b]\}$ è equivalente a conoscere $\mu(\mathbf{x})$ per tutti gli \mathbf{x} nell'insieme

$$\{(x_1, x_2, x_3): -\infty < x_1 < \infty+, -\infty < x_2 < \infty+, a < x_3 < b\}$$

La scelta del sistema di coordinate è arbitrario ma è fondamentale in ogni sistema tomografico, in cui, per convenzione, la fetta è definita fissando l'ultima coordinata. In generale differenti sistemi di coordinate portano a raccolte di fette differenti. Nella pratica è la macchina a raggi-X a fissare il suo sistema di coordinate.

Nel campo delle immagini mediche si assume che l'aria sia trasparente ai raggi-X, cioè che il coefficiente di assorbimento $\mu(\mathbf{x})$ sia nullo al di fuori del paziente. In termini matematici, inoltre, la funzione $\mu(\mathbf{x})$ ha supporto finito, e cioè esiste un insieme finito di punti dove la funzione non svanisce, molte funzioni nelle immagini mediche sono considerate a supporto finito.

7. Le generazioni della TC

Storicamente, quattro generazioni distinte di CT sono nate. La loro classificazione riguarda sia il modo in cui i tubi a raggi X e rivelatori sono costruiti, sia il modo in cui si muovono intorno al paziente.

Prima generazione – traslazione e rotazione del fascio di raggi-X

La prima generazione di TC utilizza un tubo a raggi X che emette un fascio molto stretto di raggi X, che viene selezionato dal cono di raggi X per mezzo di un collimatore (pinhole) appropriato. Questa geometria viene chiamata “pencil beam” (fascio a matita). Un singolo rivelatore è situato sul lato opposto del campo di misura rispetto al tubo a raggi X. La traslazione è sincrona con il movimento del tubo radiogeno. Lo spostamento lineare è ripetuto a diversi angoli di proiezione. A seconda delle caratteristiche specifiche di attenuazione dei tessuti, l'intensità dei raggi X viene attenuata nel suo percorso attraverso il corpo. La quantità di attenuazione dei raggi X è misurata dal rivelatore e successivamente memorizzata in forma numerica. Per ogni angolo, questo passaggio produce una semplice radiografia unidimensionale, detta generalmente profilo radiografico. Tuttavia, da questa radiografia iniziale, non è ancora possibile determinare la distribuzione spaziale dei coefficienti di attenuazione del tessuto. E' chiaro che, per poter determinare la posizione spaziale di due oggetti su una linea di proiezione, è necessario disporre almeno di una proiezione laterale. Questo è l'approccio adottato dalla CT, che provvede ad osservare un oggetto da tutti i lati, variando l'angolo di proiezione da 0° a 180°

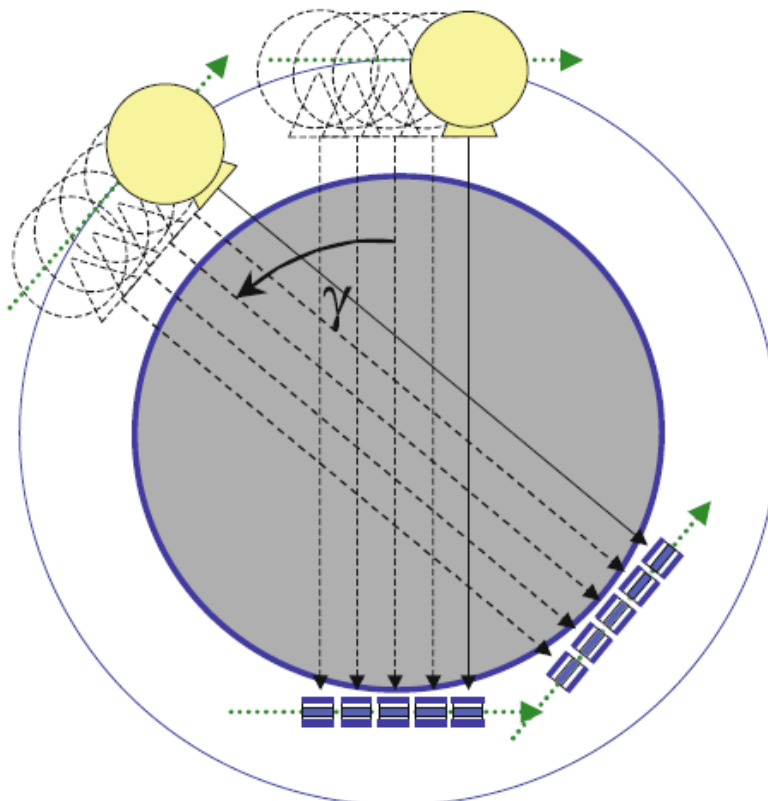


Figura 18: Prima generazione – roto-traslazione del fascio di raggi-X



**Figura 19: il primo scanner per il capo è stato costruito nel “Central Research Laboratories” EMI a Londra.
Per gentile concessione di General Electric Medical Systems**

Seconda generazione – roto-traslazione di uno stretto fascio di raggi-X

La tomografia computerizzata della seconda generazione ha una sorgente di raggi X con un fascio a ventaglio stretto e una matrice di rivelatori composta da circa 30 elementi. Tuttavia, poiché l'angolo di apertura del fascio a ventaglio è piccolo, il tubo a raggi X e la matrice di rivelatori devono essere ancora spostati linearmente prima che l'angolo di proiezione possa essere regolato su un'altra proiezione. Nei primi esemplari degli scanner di seconda generazione, l'angolo del fascio a ventaglio era di circa 10° .

Nonostante permanga ancora la necessità dello spostamento lineare, il tempo di acquisizione si riduce a pochi minuti a fetta, poiché la matrice di rivelatori è in grado di misurare più intensità contemporaneamente.

Tuttavia, il campo di misura è ancora piccolo gli scanner e il tempo necessario a generare una immagine è ancora alto. La figura 20 dà un'idea delle dimensioni del campo di misura. Per queste limitazioni gli scanner di prima e seconda generazione sono stati principalmente utilizzati nella diagnostica per immagini del cranio. Il cranio, infatti, può essere fissato nello scanner per ridurre o evitare il movimento durante il periodo di acquisizione. Non è possibile utilizzare questa classe di tomografi per esplorare il torace o l'addome che richiedono campi di vista più ampi, o il cuore ed il polmone che con i loro movimenti intrinseci producono artefatti nelle immagini ricostruite. Nella stessa situazione ci si trova per il diaframma e per gli organi molli del ventre. I metodi matematici di ricostruzione si basano sull'assunzione che tutti i punti di una fetta sono esplorati dai raggi X al

variare dell'angolo di proiezione tra 0° e 180° . Un oggetto in movimento che si sposta fuori del piano dell'immagine durante la rotazione del tubo a raggi X, a causa dei movimenti del paziente, si tradurrà inevitabilmente in un errore nella ricostruzione dell'immagine. Questi errori sono chiamati artefatti da movimento.

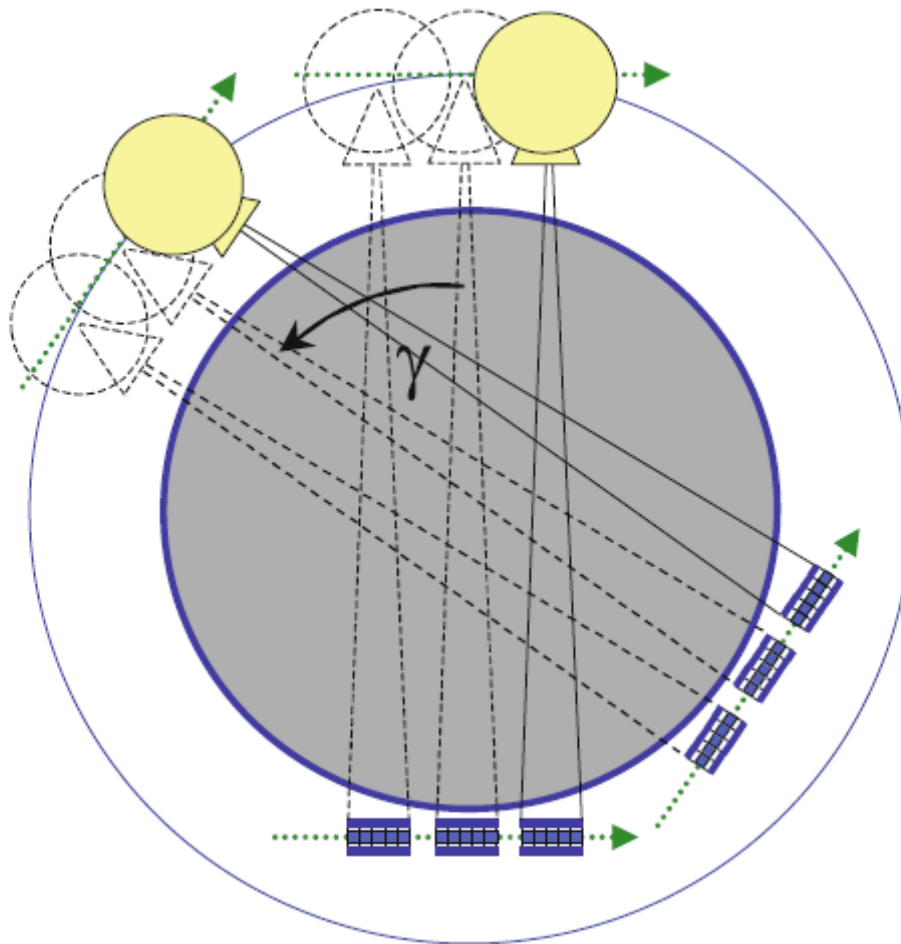


Figura 20: Seconda generazione – roto-traslazione ridotta del fascio di raggi-X

Terza generazione – rotazione di un fascio di raggi-X ad apertura ampia

Il principale obiettivo dei progettisti negli anni settanta è stato quello di ridurre il tempo di acquisizione di una fetta a meno di 20s, ciò era necessario per acquisire una immagine del ventre con un errore minimo, mentre i pazienti trattenevano il respiro. Un passo importante per raggiungere questo obiettivo è stata l'idea di estendere il concetto di fan-beam presente nella seconda generazione con l'aumento dell'angolo del fascio a ventaglio e l'introduzione di una matrice di rivelatori proporzionalmente più lunga. La figura 21 fornisce una illustrazione schematica del principio di uno scanner di terza generazione.

Attualmente, l'angolo di un fascio a ventaglio è in genere compreso tra 40° e 60° e la matrice di rivelatori di solito è costruita come un arco formato da un numero di elementi compreso tra i 400 e 1.000. In questo modo è ora possibile coprire contemporaneamente con il fascio di raggi X l'intero campo di misura, che è ora sufficientemente ampio da coprire il torso, per ogni angolo di proiezione γ . Questa soluzione porta la terza generazione dei sistemi TC ad eliminare completamente il movimento traslatorio del tubo radiogeno e a ridurre notevolmente il tempo di acquisizione, poiché

una rotazione continua può avvenire senza l'interruzione per uno spostamento lineare. La maggior parte degli scanner CT attualmente in uso sono sistemi fan-beam della terza generazione. La figura 22 mostra un set-up sperimentale di uno scanner di terza generazione con una unità di ingrandimento meccanico sviluppata nei laboratori di ricerca della Philips.

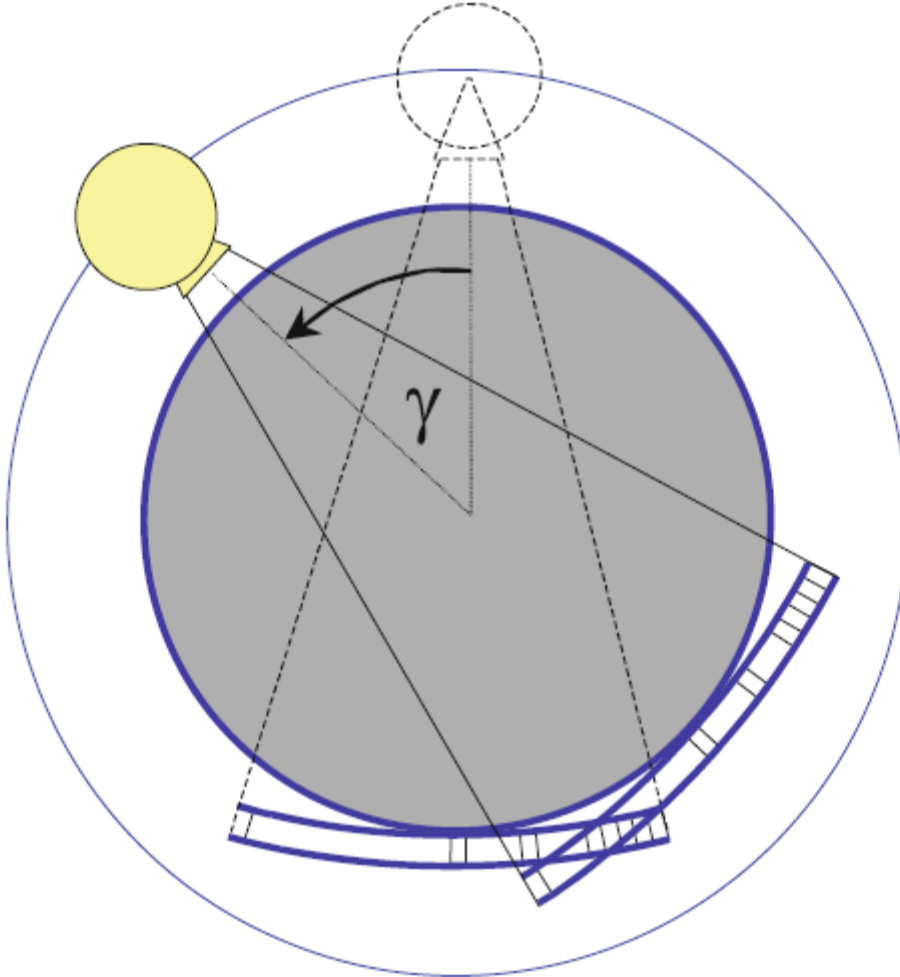
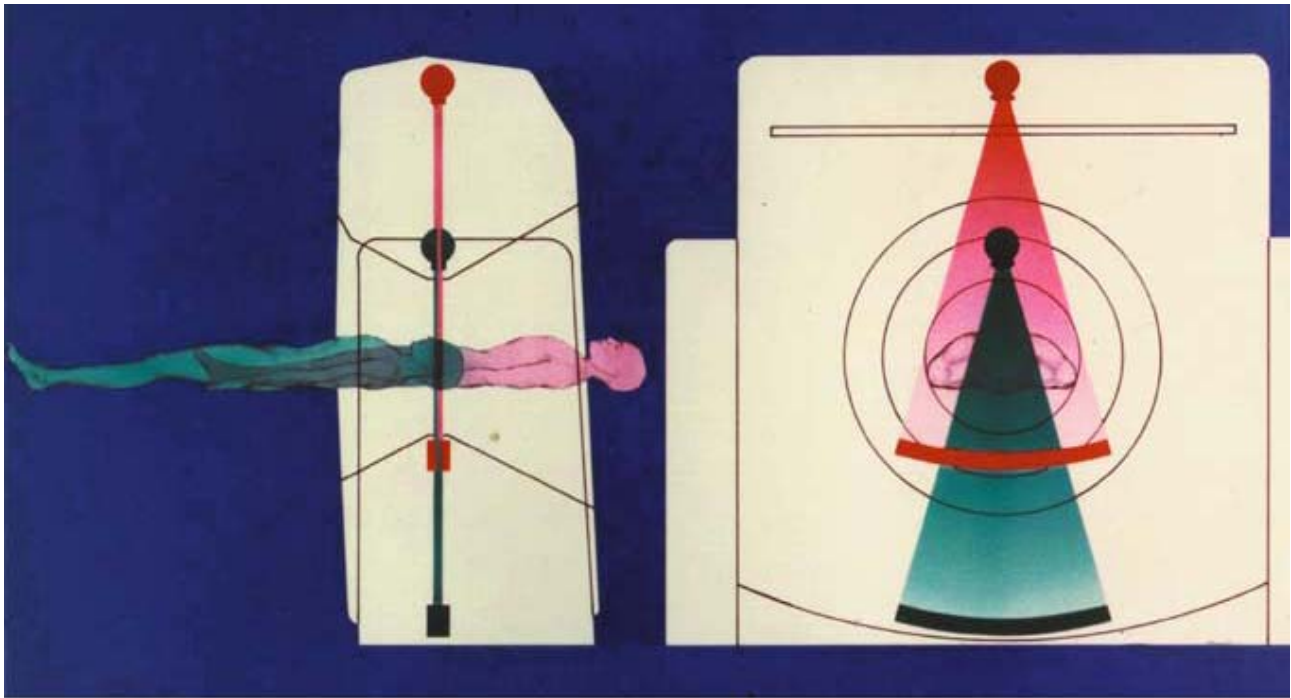
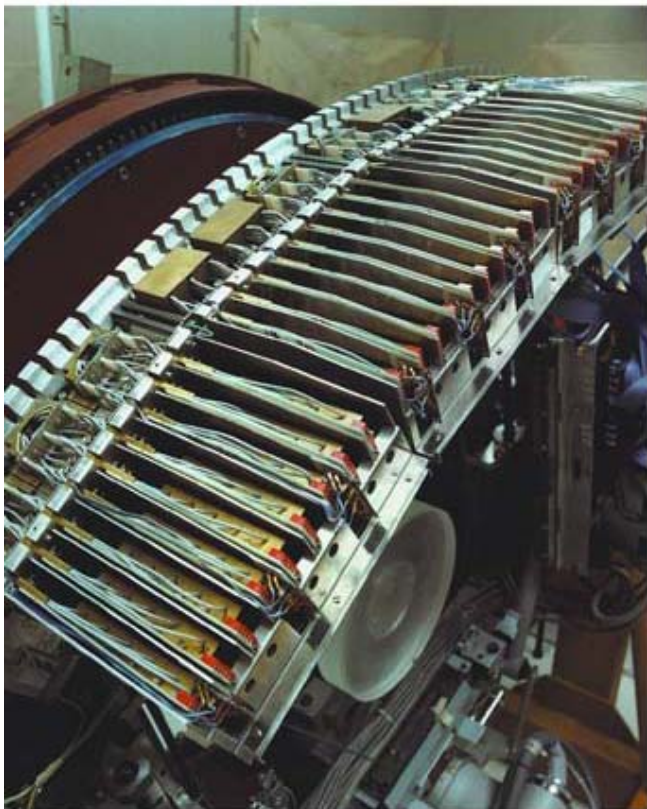


Figura 21: Terza generazione – rotazione del fascio a ventaglio dei raggi-X

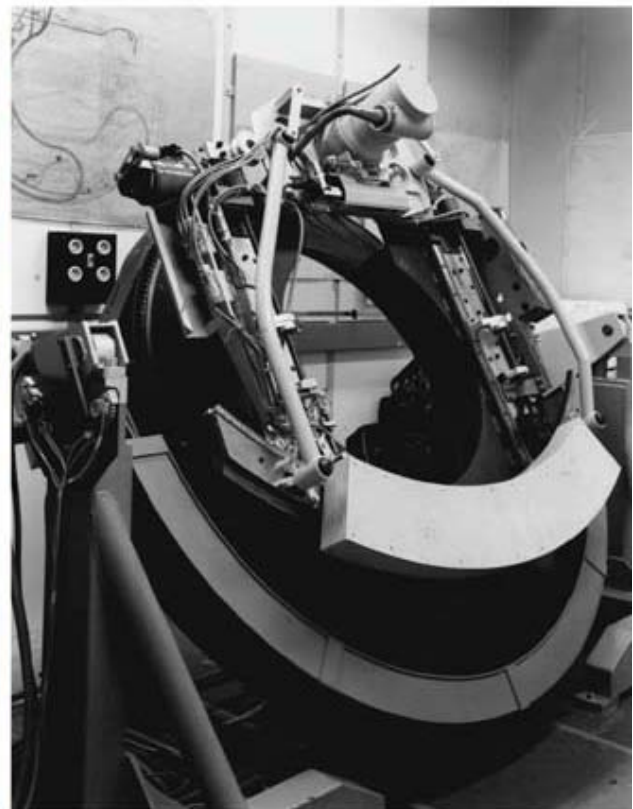
Un errore tipico delle immagini ottenute con scanner di terza generazione è il così detto "artefatto ad anello". Un singolo rivelatore difettoso, o anche non sufficientemente calibrato, nella matrice dei rivelatori comporta un errore caratteristico a forma di anello nel tomogramma ricostruito. Questo artefatto è tipico in immagini da scanner di terza generazione, ma non appare nelle immagini ottenute con tomografi di quarta generazione.



a



b



c

Figura 22: a) il principio dell'ampliamento geometrico del fascio nel 1977. Due possibili posizioni della disposizione tubo/rivelatore per ottimizzare lo scanner sia per la testa sia per il corpo, pur mantenendo una dimensione limitata del rivelatore. b) modulo rivelatore a 192 canali. c) modello di laboratorio per il test dell'ampliamento geometrico del fascio. Per gentile concessione di Leon de Vries, Sistemi di PhilipsMedical

Quarta generazione – rotazione della sorgente su un anello chiuso di rivelatori.

La quarta generazione di scanner CT non si discosta dalla tomografia di terza generazione per quanto riguarda il tubo radiogeno. La fonte fan-beam ruota continuamente attorno al campo di misura senza alcun spostamento lineare. La differenza è nell'anello dei rivelatori che ora è chiuso e fisso e contiene fino a 5.000 elementi. Il tubo radiogeno può ruotare sia all'esterno (Fig. 23, a sinistra) che all'interno (Fig. 23, a destra) dell'anello rivelatore .

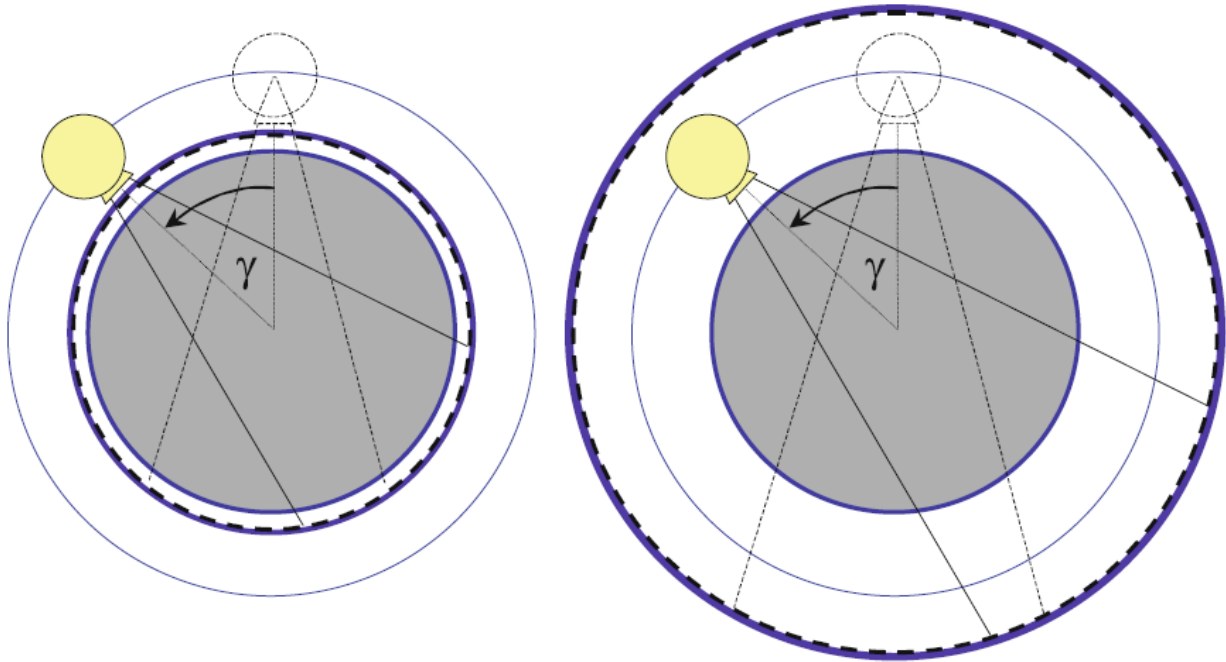


Figura 23: Quarta generazione – rotazione del fascio a ventaglio dei raggi-X su un anello chiuso di rivelatori.

Se il tubo radiogeno è posto al di fuori dell'anello rivelatore, è necessario evitare che il fascio di raggi X attraversi i rivelatori da dietro, per questo motivo l'anello rivelatore è dinamicamente allontanata dal percorso del tubo, in modo, che la linea che congiunge il tubo e la sezione appropriata dell'anello rivelatore passi solo attraverso il paziente (e il tavolo paziente) e non attraverso l'elettronica che è posta dietro i rivelatori.

Con la quarta generazione dei tomografi si introduce anche il concetto di "fans inverso", centrato sui rivelatori piuttosto che sul fuoco dei raggi X. In figura 24 si mostra lo schema del fan inverso. Una fan inverso è anche chiamato "fan rivelatore". Un fan inverso può essere molto denso, limitato solo dalla frequenza di campionamento a cui i singoli rivelatori possono essere letti e quindi, a differenza di tomografi di terza generazione, questo scanner non è limitato alla risoluzione spaziale del singolo fascio a ventaglio.

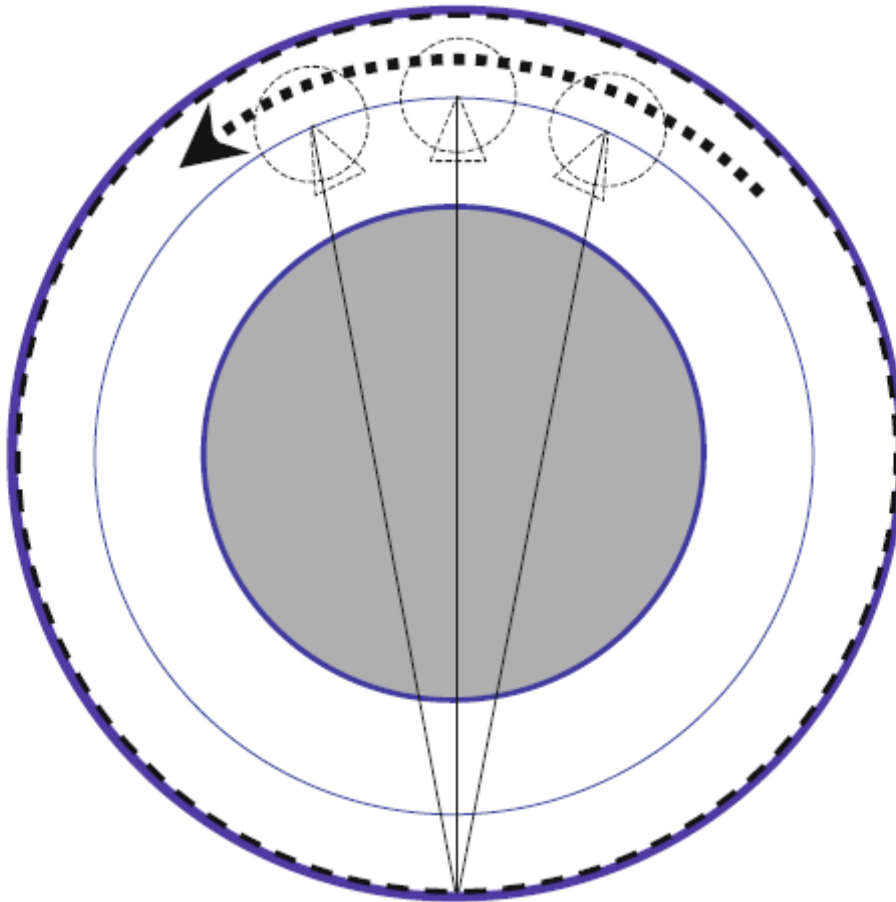


Figura 24: La quarta generazione di scanner CT utilizza un "fan inverso", il cui centro è situato in un singolo rivelatore. Un fan inverso può essere molto denso, limitato solo dalla frequenza di campionamento a cui i singoli rivelatori possono essere letti e quindi, a differenza di tomografi di terza generazione, questo scanner non è limitato alla risoluzione spaziale del singolo fascio a ventaglio.

TC spirale – moto lungo un percorso a spirale

Un altro sviluppo, che ha rappresentato un grande balzo in avanti nella capacità a partire dalle TC di terza generazione, ha portato a quello che viene identificato da Bushberg et al. (2002) come la sesta generazione di scanner per tomografia. Si riferisce alla introduzione della tecnologia ad anelli, che consente campionamento spirale o elicoidale.

Poiché il tubo a raggi X deve essere continuamente alimentato, la mobilità è stata inizialmente limitata dal collegamento tra il tubo radiogeno e il sistema di alimentazione normalmente realizzato con un cavo elettrico che montato su un rocchetto doveva essere steso in una direzione e riavvolto con attenzione in un'altra, durante il movimento a spirale del tubo. Questo procedimento ha rappresentato il principale ostacolo alla riduzione del tempo di acquisizione. Il campionamento del fascio a raggi X doveva essere interrotto e ricominciare dopo un certo angolo di rotazione. Anche se i dati potevano essere raccolti sia durante le rotazioni in senso orario che antiorario esistevano limiti al raggiungimento delle alte velocità a causa del crescente momento torsionale. Questo problema è stato risolto con l'introduzione della tecnologia ad anelli. In questa tecnologia, l'energia è fornita tramite contatti striscianti, posti tra la parte esterna delle unità di campionamento, in quello che

viene chiamato il gantry (portale), e l'unità di campionamento rotante. In questo modo l'unità di campionamento che trasporta la sorgente di raggi X e, nel caso degli scanner di terza generazione, la matrice di rivelatori, può ruotare in modo continuo.

La figura 25 mostra diverse tecnologie per il trasferimento di energia. A sinistra, la tecnologia ad anelli, che abbiamo discusso in precedenza, applicata ad su uno scanner Siemens Somatom AR.T CT. Tuttavia, per i dispositivi più compatti si preferisce rendere l'unità di campionamento indipendente dalla sorgente di energia esterna durante la rotazione per mezzo di accumulatori. Un esempio è riportato sulla destra della fig. 25, che mostra uno scanner portatile Philips Tomoscan MCT con i coperchi rimossi. Come risultato dell'applicazione della tecnologia ad anelli, frequenze di rotazione di due al secondo, "scanner sub-second", sono ormai comuni. L'uso degli anelli insieme al movimento continuo del lettino del paziente attraverso l'unità di campionamento ha permesso una nuova tecnica di acquisizione delle immagini in forma di spirale.



Figura 25: Diversi metodi di trasferimento di energia per l'unità in rotazione. Nel Siemens Somatom AR.T (a sinistra), è usata la tecnologia ad anelli. Nel CT scanner compatto Tomoscan della Philips M (a destra) viene usata una matrice di accumulatore

Rotazione di un fascio a cono

Non è stata finora proposta una definizione comune delle nuove generazioni di CT, comunque in Bushberg et al., uno scanner dotato di un fascio a forma di cono di raggi X e un rivelatore piano è indicato come settima generazione. Tuttavia, anche all'interno della classe degli scanner cone-beam, si ha la necessità di distinguere tra sistemi che utilizzano solo una piccola apertura del cono, come nel caso di un multistrato (multi-linea) e sistemi che usano addirittura un cono simmetrico di raggi X.

Per meglio comprendere la motivazione che portano allo sviluppo di sistemi TC cone-beam, è necessario fare riferimento al passaggio avvenuto dal fascio a matita (o stretto) al fan-beam, che ha offerto, oltre ad una riduzione dei tempi di acquisizione, il vantaggio di sfruttare la sorgente di raggi X in modo più efficace. Si è già ricordato che l'efficienza della trasformazione dell'energia utilizzata nella generazione dei raggi X è pari a circa l'1%. Poiché il calore prodotto all'interno del tubo a raggi X definisce essenzialmente la capacità fisica del tubo e limita pertanto il tempo di misura, il passaggio successivo per lo sviluppo di apparecchiature TC porta all'utilizzo di un fascio di raggi X a forma di cono, che è prodotto naturalmente dal tubo radiogeno. Sia il fascio a matita sia la geometria fan-beam sono create per mezzo di adeguati pin-hole o collimatori a fessura, che modella l'originale profilo dell'intensità fornito dal tubo radiogeno, riducendone l'efficienza.

Dal punto di vista tecnologico, ci sono tre importanti problemi che devono essere risolti prima di applicare in modo efficace la geometria cone-beam ad un sistema TC. Il primo è lo sviluppo di un rivelatore flat-panel per sostituire la linea o le linee di rivelatori. In secondo luogo, l'enorme quantità di dati grezzi che vengono prodotti in un tempo inferiore al secondo, che deve essere trasferito dalla unità di campionamento in rotazione al computer per la ricostruzione delle immagini. La larghezza di banda richiesta per il trasferimento di questa enorme quantità di dati rappresenta ancora oggi una importante sfida tecnica. In terzo luogo, c'è il problema della ricostruzione, di cui la matematica è un po' più sofisticata rispetto al metodo bidimensionale. La figura seguente mostra un prototipo di uno scanner CT cono-beam presso i laboratori Siemens.

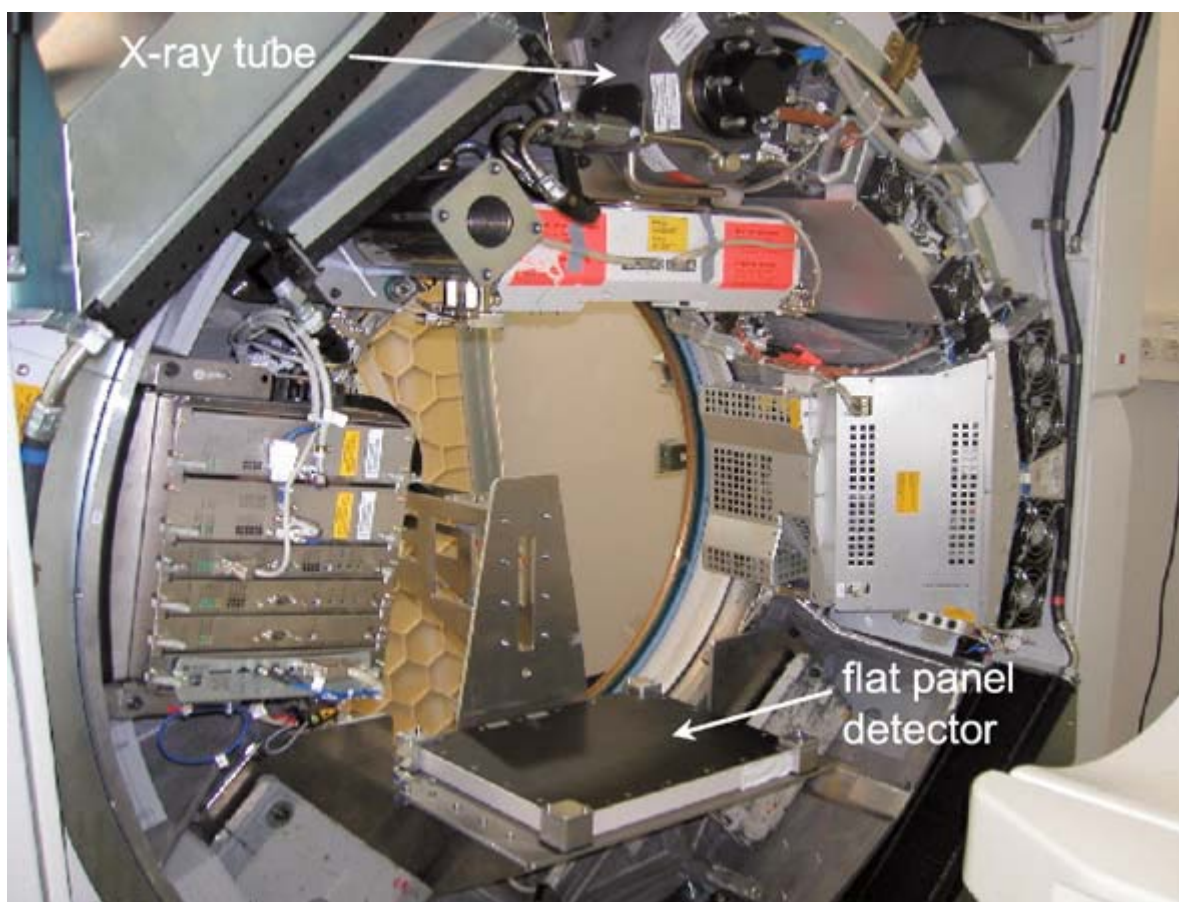


Figura 26: Prototipo di uno scanner CT cono-fascio, dotato di un rivelatore di piatto. Per gentile concessione della SiemensMedical Solutions

8. Lo spazio delle rette nel piano

Una linea nel piano è un insieme di punti che soddisfano un'equazione nella forma:

$$ax + by = c \quad (1)$$

dove i coefficienti a , b e c sono dei numeri reali fissati, con a e b non contemporaneamente nulli. Inoltre poiché $a^2 + b^2 > 0$, è possibile modificare l'equazione (1) nel modo seguente, ottenendo lo stesso insieme di punti:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dove i coefficienti $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ sono i coseni direttori² della retta e definiscono un punto ω sul cerchio unitario e $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ è un numero reale qualunque. Quindi una linea nel piano può essere rappresentata da due parametri il vettore unitario ω e il numero reale t .

La linea $l_{t,\omega}$ è l'insieme dei punti che soddisfano l'equazione:

$$(x, y) \cdot \omega = t$$

Dove $(x, y) \cdot \omega$ è un prodotto scalare e quindi poste le componenti del vettore unitario $\omega = (\omega_1, \omega_2)$:

$$(x, y) \cdot \omega = x\omega_1 + y\omega_2$$

Ovviamente se un insieme di punti soddisfa l'equazione precedente soddisferà anche l'equazione per $(-t, -\omega)$ da cui segue che $l_{t,\omega} = l_{-t,-\omega}$.

Spesso si caratterizza il punto sul cerchio unitario con due numeri reali:

$$\omega(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Ovviamente poiché le funzioni \cos e \sin sono periodiche di periodo 2π tale risulta anche ω . Si può quindi scrivere:

$$\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = t$$

Inoltre definito il versore perpendicolare $\hat{\omega}(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ e quindi un sistema di riferimento nel piano, per ogni numero reale s si ha che:

$$(x, y) \equiv t\omega + s\hat{\omega}$$

Quindi lo spazio delle rette nel piano può essere descritto dalla relazione:

$$\omega \cdot (t\omega + s\hat{\omega}) = t$$

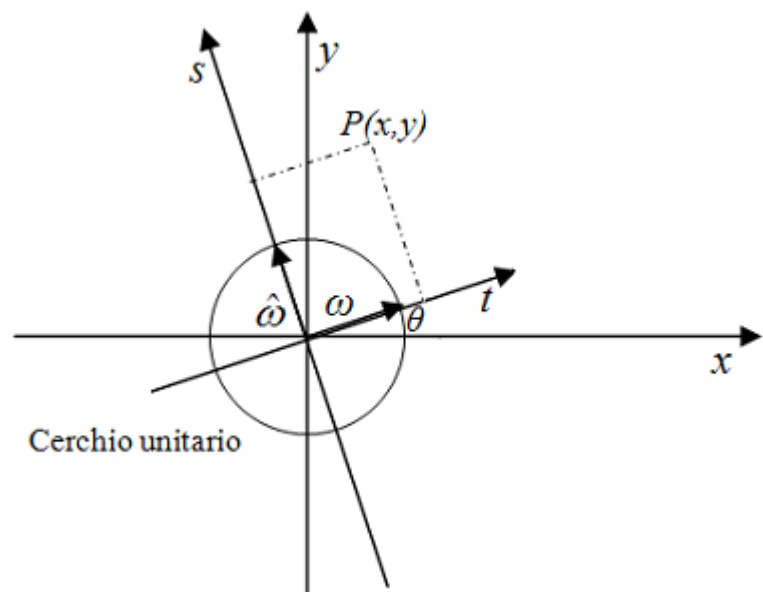


Figura 27: Coordinate di un punto nei diversi sistemi di riferimento

² I coseni direttori di una retta sono i coseni degli angoli che la retta forma con gli assi del sistema di riferimento.

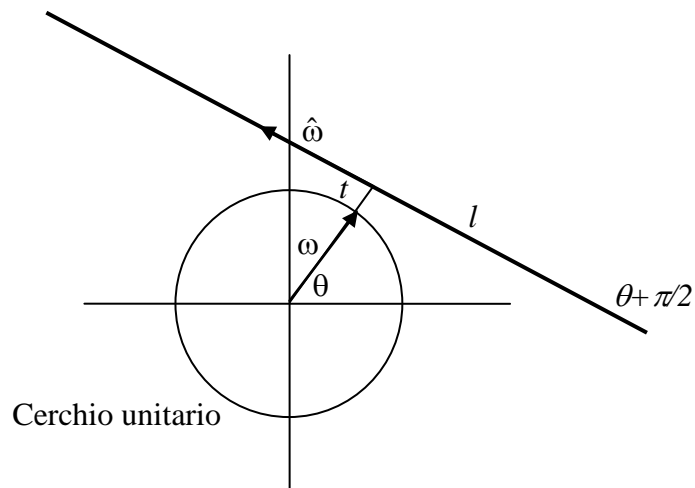


Figura 28: La retta nel piano

I vettori $\hat{\omega}$ e $-\hat{\omega}$ sono entrambi perpendicolari a ω ed inoltre $\hat{\omega}$ è caratterizzato dalla condizione che la matrice $2 \times 1 \begin{pmatrix} \omega \\ \hat{\omega} \end{pmatrix}$ ha determinante +1; ciò significa che la coppia (t, ω) individua nel piano una linea orientata.

Il vettore $\hat{\omega}$ rappresenta la direzione “positiva” lungo la linea $l_{t,\omega}$, mentre il vettore ω rappresenta la direzione perpendicolare alla linea. Il numero t è detto “*parametro affine*” ed il suo modulo rappresenta la distanza della linea dall’origine delle coordinate.