

Ritenendo accettabile il valore di n_c calcolato con la formula di Dunkerley, si dovrebbe concludere col considerare sicuro il funzionamento della macchina alla velocità di 1500 giri/min.

Delle numerose approssimazioni fatte nel calcolo di n_c , alcune portano ad un valore di n_c approssimato in difetto: queste approssimazioni avvalorano la conclusione surripertata. Tra queste figurano quella insita nella formula di Dunkerley, quella che ritiene trascurabile l'irrigidimento dei mozzoni dei dischi della turbina, quella di considerare le masse concentrate dei dischi disposte nella mezziera degli stessi, quella di ritenere i vincoli semplici appoggi.

Altre ipotesi portano ad un valore approssimato in eccesso della velocità critica: tra queste figurano quella di ritenere rigidi i supporti della macchina e quella di ritenere trascurabile la massa dell'albero nel calcolo della velocità critica.

Sono proprio queste due ultime ipotesi, che, nel caso in esame, vanno valutate con la massima attenzione, in quanto, portando ad un valore in eccesso della prima velocità critica, possono far ritenere esente da pericoli la velocità di regime della macchina.

Il valore approssimato trovato costituisce tuttavia un valore di riferimento utile per i successivi calcoli, che si riterrà opportuno eseguire.

CAPITOLO 8

VELOCITÀ CRITICHE TORSIONALI

8.1 Introduzione

Nel Cap.2, parlando delle condizioni di funzionamento a regime gruppo di macchine, si è detto che, se almeno una delle macchine costituiscono presenta un momento (motore o resistente) variabile con periodo, anche la velocità angolare del gruppo varia con legge per intorno ad un valore medio costante ed il regime viene detto per motivo periodico.

Nello stesso capitolo si è detto che, per contenere tali variazioni entrati accettabili, sull'albero della macchina a regime periodico viene calcolato un volano di opportuno momento d'inerzia di massa.

Gli effetti delle variazioni periodiche del momento (motore o resistente) sono solo quelli ricordati, se i rotori delle due macchine e l'albero collega, possono essere considerati rigidi.

In realtà, a causa di queste variazioni, l'albero, che collega le due macchine, è sottoposto ad un momento torcente periodico e subisce per motivo una deformazione torsionale variabile con lo stesso periodo.

A questa torsione variabile dell'albero corrisponde un'oscillazione dei rotori ed il sistema, costituito dai due rotori e dall'albero, che li compie, durante la rotazione, delle oscillazioni torsionali forzate.

Se le ampiezze di queste oscillazioni torsionali risultano modeste, il ma potrà ancora essere considerato rigido.

Ma se al variare della velocità angolare del gruppo, la pulsazione

delle componenti armoniche del momento periodico eguaglia una delle pulsazioni torsionali naturali del sistema, si verifica un fenomeno di risonanza e le ampiezze delle oscillazioni torsionali possono raggiungere valori così elevati da portare alla rottura dell'albero.

Le velocità angolari, in corrispondenza delle quali si verifica il fenomeno di risonanza descritto, prendono il nome di "velocità critiche torsionali".

Dal punto di vista storico i primi fenomeni di risonanza torsionale si manifestarono alla fine del secolo scorso su alcuni piroscafi, mossi da macchine alternative a vapore a più cilindri: le frequenti rotture dell'albero di trasmissione, che collegava la macchina motrice all'elica, resero queste navi tristemente famose.

I primi studi del fenomeno ebbero origine in quel periodo, ma ancora negli anni che precedettero la prima guerra mondiale, si verificarono, a causa di risonanze torsionali, non previste in sede di progetto dell'impianto di propulsione, rotture degli alberi di trasmissione in alcuni sommergibili della stessa classe, mossi da motori diesel relativamente veloci.

Oggi, nella fase di progetto di un gruppo di macchine, nel quale è presente una macchina a regime periodico, si controlla se nel campo di funzionamento del gruppo si verifica una risonanza torsionale del tipo descritto.

Questo controllo comporta, come primo passo, il calcolo delle pulsazioni torsionali naturali del sistema.

Nota d'altra parte il ciclo secondo il quale funziona la macchina a regime periodico, è possibile determinare - per ogni velocità angolare di funzionamento del gruppo - il valore delle pulsazioni delle armoniche, che eccitano il sistema a vibrare torsionalmente: a questo proposito va ricordato che, noto il periodo della macchina, restano definiti i valori delle pulsazioni delle armoniche, che compongono, secondo la serie di Fourier, il momento periodico della stessa.

È così possibile stabilire se esistono velocità angolari, per le quali una pulsazione delle cause eccitanti uguaglia una delle pulsazioni proprie del sistema.

Se da questo calcolo risulta che nel campo di funzionamento del gruppo si verificano condizioni di risonanza, il progetto viene modificato.

Le modifiche riguardano in genere le rigidità o le masse del sistema: in questo modo vengono modificati i valori delle pulsazioni torsionali proprie del sistema e le condizioni di risonanza possono essere spostate a velocità angolari non comprese nel campo di funzionamento del sistema.

Calcoli di questo tipo dovrebbero essere effettuati per tutti i gruppi a regime periodico.

Gli impianti di propulsione navale, aerea e terrestre, nei quali la macchina

motrice è un motore alternativo, costituiscono una classe di sistemi: nici particolarmente esposta a pericoli di risonanze torsionali.

Anche nei gruppi fissi, nei quali è presente una macchina alter possono verificarsi pericolosi fenomeni di risonanza torsionale: si pe es., ad un gruppo elettrogeno, mosso da un motore diesel; oppure gruppo destinato alla produzione di aria compressa, costituito da un elettrico, che muove un compressore alternativo.

8.2 I sistemi discreti

I calcoli relativi alle vibrazioni torsionali libere e forzate, che si ver in un gruppo a regime periodico, vengono eseguiti sostituendo ai effettivi, a caratteristiche distribuite, sistemi discreti, costituiti di dischi, di noto momento d'inerzia di massa, collegati da tronchi d'al nota rigidità torsionale, supporti privi di massa.

Questi sistemi, che rispondono ai criteri di discretizzazione riport par.5.9, consentono di prevedere con buona approssimazione il con mento dei sistemi effettivi nei riguardi del fenomeno delle vibrazic sionali.

A titolo di esempio si consideri l'impianto di propulsione navale, sc camente rappresentato in fig.8.2-1,a): questo impianto è costituito motore diesel lento (1) ($n_{max} = 120$ giri/min) a quattro cilindri, due dal volano (2) del motore, da un lungo albero di trasmissione e dall'elica (4).

Il sistema discreto corrispondente è rappresentato in fig.8.2-1,b risulta costituito da sei dischi di momento d'inerzia di massa $Y_1, Y_2,$ e da cinque tronchi di rigidità K_1, K_2, \dots, K_5 , supporti privi di ma

È da notare che questo sistema presenta la particolarità di avere di estremità Y_1 ed Y_6 non vincolati elasticamente a punti fissi: ques ticularità deriva dal fatto che l'impianto di propulsione e quindi il discreto che lo rappresenta sono liberi di ruotare intorno al loro ass

Questa caratteristica è comune a tutti i gruppi richiamati nel pa introduttivo ed i corrispondenti sistemi discreti sono detti "ad liberi": si vedrà nel seguito che sistemi di questo tipo presentano u di vibrare particolare.

Riprendendo l'esame del sistema di fig.8.2-1,b), si osservi che quattro dischi corrispondono ai quattro manovellismi del motore, il disco al volano, il sesto all'elica.

La determinazione dei momenti d'inerzia di massa Y_5 e Y_6 del v

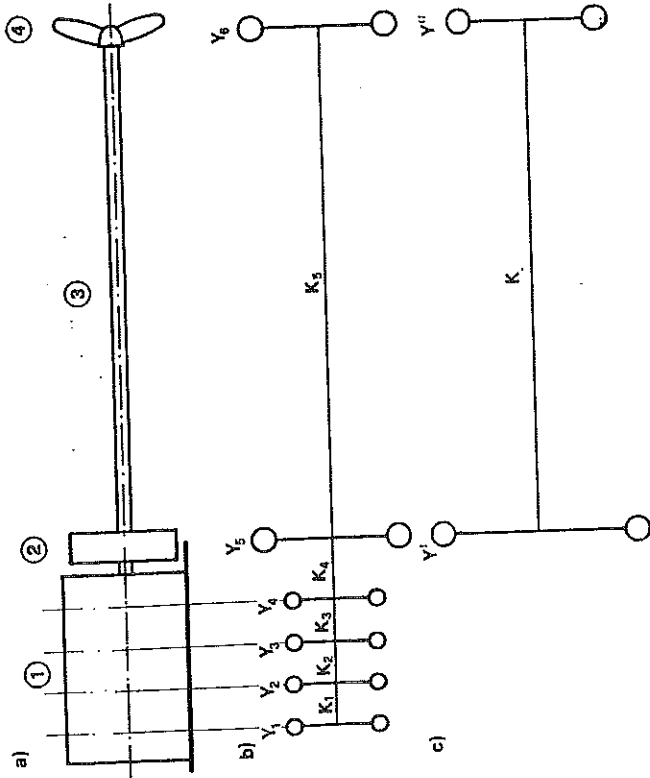


Fig. 8.2-1

dell'elica non presenta difficoltà concettuali ed in sede di progetto va fatta sulla base dei loro disegni costruttivi.

Per quanto si riferisce alla determinazione del momento d'inerzia di massa Y_i di ciascun manovellismo, occorre tener presente che esso risulta costituito da una parte costante, dovuta alle masse rotanti e da una parte variabile, dovuta alle masse della biella e del pistone, parti che si muovono di moto non rotatorio.

Per quanto si riferisce alla biella, essa può essere sostituita (v. par. 1.12 e par. 13.8) da un sistema equivalente approssimato, costituito da due masse concentrate nel bottone di manovella e nel piede di biella rispettivamente.

Si può quindi concludere che il momento d'inerzia di massa Y_i di un manovellismo si può ritenere somma di una parte costante Y_i' , dovuta alla manovella ed alla massa della biella concentrata nel bottone di manovella, e da una parte variabile Y_i'' , dovuta al pistone ed alla massa della biella concentrata nel piede di biella.

Indicando con M_a la massa del pistone e con m_1' la massa della biella concentrata nel piede della stessa, il valore di Y_i'' può essere determinato

riducendo (v. par. 1.13) queste masse all'asse del motore: per operare questa riduzione occorre eguagliare l'energia cinetica della massa $(M_a + m_1')$, che si muove con la velocità v_c del pistone, all'energia cinetica del volano equivalente, calcolato sull'asse del motore e che ruota quindi con la stessa velocità angolare ω del motore:

$$(M_a + m_1')v_c^2/2 = Y_i''\omega^2/2 \tag{8.2-1}$$

Se per v_c si assume il valore approssimato (v. par. 13.5):

$$v_c = \omega r \sin \theta \tag{8.2-1}$$

dalla 8.2-1 si ottiene:

$$Y_i'' = (M_a + m_1')r^2 \sin^2 \theta = (M_a + m_1')r^2(1 - \cos 2\theta)/2 \tag{8.2-1}$$

Da quanto detto, il valore del momento d'inerzia di massa Y_i di un manovellismo risulta dato da:

$$Y_i = Y_i' + Y_i'' \tag{8.2-1}$$

Se nello scrivere le equazioni del moto del sistema si utilizza il valore di Y_i'' , dato dalla (8.2-3), essendo questo valore variabile con θ , si ottiene un sistema di equazioni differenziali a coefficienti variabili, di difficile integrazione: per questo motivo si assume per Y_i'' un valore costante, pari al valore medio Y_{med}'' della grandezza periodica (8.2-3):

$$Y_{med}'' = (M_a + m_1')r^2/2 \tag{8.2-1}$$

Sempre riferendoci al sistema di fig. 8.2-1, il calcolo della rigidità K , troncato corrispondente all'albero di trasmissione, se questo tronco è a sezione costante, si effettua con la relazione:

$$K = GI_p/l \tag{8.2-1}$$

con:

G = modulo di elasticità del materiale dell'albero,

I_p = momento d'inerzia polare della sezione dell'albero,

l = lunghezza dell'albero

Se invece l'albero stesso è costituito da tronchi di diverso diametro, la rigidità K'_i di ciascun tronco si calcola con la (8.2-6), e la rigidità K con la formula delle rigidità in serie:

$$1/K = \sum_i (1/K'_i) \quad (8.2-7)$$

Meno immediato è il calcolo delle rigidità torsionali dei tronchi dell'albero a gomiti del motore, che in fig. 8.2-1, b) sono indicate con K_1, K_2, \dots, K_4 .

A questo riguardo si osservi, ad es., che K_1 è la rigidità torsionale di un'intera manovella del motore: questa circostanza risulta evidente dalla fig. 8.2-2, nella quale sono rappresentate due manovelle successive dell'albero motore ed il corrispondente sistema ridotto.

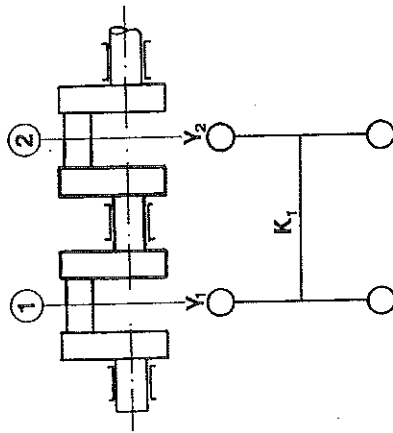


Fig. 8.2-2

La determinazione della rigidità torsionale di una manovella risulta complessa ed in genere incerta: per questo motivo le rigidità di organi di questo tipo sono in genere calcolate ricorrendo a formule empiriche.

8.3 Sistemi ridotti a due dischi

Un sistema discreto ad n dischi, definito nel modo descritto nel paragrafo precedente, è un sistema ad n gradi di libertà e le coordinate lagrangiane, che ne definiscono il moto, sono gli n spostamenti angolari θ_i degli stessi dischi.

Lo studio delle vibrazioni, libere e forzate, di un sistema di questo tipo comporta, come è noto, la soluzione di un sistema di n equazioni differenziali ordinarie (v. par. 5.26).

Capitolo 8

Una valutazione approssimata delle velocità critiche torsionali di un giro a regime periodico può però essere fatta, ricorrendo a sistemi più semplici.

A questo proposito si consideri l'impianto di propulsione navale fig. 8.2-1, a), caratterizzato dalla presenza di un lungo albero di trasmissione che collega il motore diesel al propulsore.

La rigidità torsionale K_s di questo tronco è molto più piccola delle rigidità torsionali K_i ($i = 1, 2, \dots, 4$) dei tronchi relativi al motore, ed è quindi possibile ritenere, in prima approssimazione, tali tronchi rigidi.

In questa approssimazione il sistema si riduce ad un sistema a due dischi (v. fig. 8.2-1, c), il primo di momento d'inerzia di m : $Y' = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$, pari cioè al momento d'inerzia di m dell'intero motore e del volano, il secondo di momento d'inerzia di m : $Y'' = Y_6$, corrispondente al propulsore.

Il tronco, che collega i due dischi, ha una rigidità $K = K_s$, pari cioè alla rigidità dell'albero di trasmissione.

Il sistema discreto a due dischi, ottenuto nel modo descritto, è un sistema a due gradi di libertà, il cui modello matematico è costituito da un sistema di due equazioni differenziali ordinarie, lineari, a coefficienti costanti e facile integrazione.

La soluzione di questo sistema consente di ottenere informazioni sui primi modi di vibrare del sistema a sei dischi.

Tali informazioni risultano tanto meglio approssimate quanto più accettabile è l'approssimazione di ritenere rigidi, rispetto ad altri, alcuni tronchi del sistema ridotto.

8.4 I modi di vibrare di un sistema a due dischi

Si consideri il sistema a due dischi ad estremi liberi, rappresentato in fig. 8.4-1.

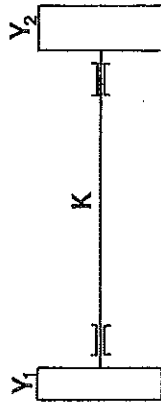


Fig. 8.4-1

Ritenendo trascurabili le azioni smorzanti, le equazioni del moto li

per questo sistema a due gradi di libertà si scrivono, come è noto (v. par. 5.23):

$$\begin{cases} Y_1 \ddot{\theta}_1 + k_{11} \theta_1 + k_{12} \theta_2 = 0 \\ Y_2 \ddot{\theta}_2 + k_{21} \theta_1 + k_{22} \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (8.4-1)$$

con:

Y_1 ed Y_2 = momenti d'inerzia di massa dei due dischi,

$k_{i,j}$ = coefficienti di rigidità del sistema,

θ_1 e θ_2 = spostamenti angolari dei due dischi.

In questo caso, indicata con K la rigidità torsionale del tronco che collega i due dischi, il calcolo dei coefficienti di rigidità $k_{i,j}$ è immediato.

Se si tiene presente infatti che, per definizione, $k_{i,j}$ rappresenta il momento, col segno cambiato, con il quale il sistema reagisce sul volano Y_i per una rotazione $\theta_j = 1$ del volano Y_j , fermi restando gli altri volani del sistema, si ottiene:

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= k_{22} = K \\ k_{1,2} &= k_{2,1} = -K \end{aligned} \quad (8.4-2)$$

Calcolati i valori dei coefficienti di rigidità $k_{i,j}$, la determinazione dei modi di vibrare del sistema in esame può farsi utilizzando i risultati ottenuti nel Cap. 5 per il sistema a 2 gradi di libertà a spostamento rettilineo (m_1, m_2, K_1, K_2, K_3).

Data la semplicità del sistema è tuttavia preferibile effettuare questa determinazione integrando le equazioni del moto (8.4-1).

Sostituendo nelle (8.4-1) i valori di $k_{i,j}$, dati dalle (8.4-2), le equazioni del moto libero del sistema in esame si scrivono:

$$\begin{cases} Y_1 \ddot{\theta}_1 + K \theta_1 - K \theta_2 = 0 \\ Y_2 \ddot{\theta}_2 + K \theta_2 - K \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (8.4-3)$$

Un integrale particolare delle (8.4-3) è del tipo (v. par. 5.23):

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos \omega t \\ \theta_2(t) = \Theta_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (8.4-4)$$

Sostituendo le (8.4-4) nelle (8.4-3) ed ordinando, si ottiene:

$$\begin{cases} (K - Y_1 \omega^2) \Theta_1 - K \Theta_2 = 0 \\ -K \Theta_1 + (K - Y_2 \omega^2) \Theta_2 = 0 \end{cases} \quad (8.4-5)$$

Capitolo 8

Le (8.4-5) costituiscono un sistema di due equazioni algebriche o nee in Θ_1 e Θ_2 : per soluzioni diverse dalla banale deve risultare n determinante Δ dei coefficienti di Θ_1 e Θ_2 :

$$\begin{vmatrix} K - Y_1 \omega^2 & -K \\ -K & K - Y_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante caratteristico (8.4-6) si ottiene l'equa caratteristica:

$$(K - Y_1 \omega^2)(K - Y_2 \omega^2) - K^2 = 0$$

che si può scrivere:

$$\omega^2 [Y_1 Y_2 \omega^2 - K(Y_1 + Y_2)] = 0$$

La (8.4-7) è soddisfatta per:

$$\omega = \omega_1 = 0$$

ovvero per:

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{K(Y_1 + Y_2)} / Y_1 Y_2$$

Per il primo modo di vibrare, caratterizzato dalla pulsazione ω_1 , dalla prima (o dalla seconda) delle (8.4-5) si ottiene:

$$K \Theta_1 - K \Theta_2 = 0 \quad (8.4-8)$$

Questa soluzione individua un modo di vibrare rigido in quanto, tando $\Theta_1 = \Theta_2$, il tronco K non subisce alcuna deformazione torsio:

Il significato fisico del valore nullo della pulsazione ω_1 , al qua risponde un valore infinito del periodo $T = 2\pi/\omega_1$, va ricercato c rando che, dando ai due dischi spostamenti iniziali congruenti col n esame:

$$\Theta_{1,0} = \Theta_{2,0} \quad (8.4-9)$$

il sistema si porta verso questa nuova posizione angolare e vi resta in tamente: infatti nessuna coppia di richiamo elastico si desta per il s di spostamenti iniziali (8.4-11).

Questo particolare modo di vibrare è comune a tutti i sistemi ad e liberi, indipendentemente dal numero di gradi di libertà che li con stinguere.

Per il secondo modo di vibrare, sostituendo nella prima delle (8.4-5) il valore di ω_2 dato dalla (8.4-9), si ottiene:

$$[K - Y_1 K(Y_1 + Y_2)/Y_1 Y_2] \Theta_1 = K \Theta_2$$

Da questa relazione si deduce:

$$K(1 - Y_1/Y_2 - 1)\Theta_1 = K\Theta_2$$

e quindi:

$$\Theta_1/\Theta_2 = -Y_2/Y_1 \quad (8.4-12)$$

La (8.4-12) definisce, insieme al valore di ω_2 , il secondo modo di vibrare e sta ad indicare che questo modo è caratterizzato dal fatto che i due dischi oscillano in versi opposti e con ampiezze inversamente proporzionali ai rispettivi momenti di inerzia di massa.

In fig. 8.4-2 sono riportate le linee elastiche relative ai due modi di vibrare.

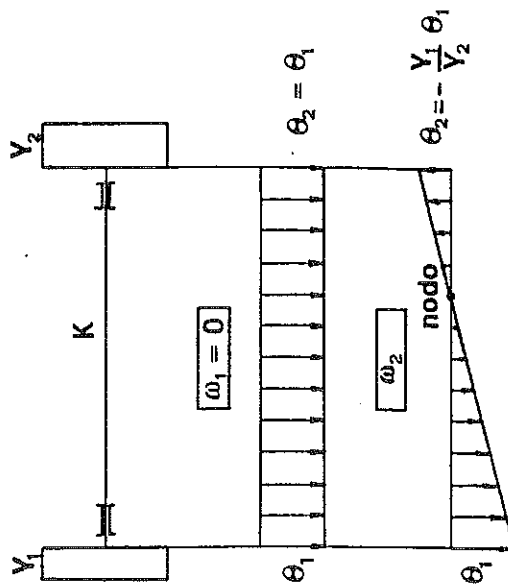


Fig. 8.4-2

La linea elastica relativa al moto rigido ($\omega_1 = 0$) mette in evidenza che sia i due volani che tutte le sezioni dell'albero ruotano dallo stesso angolo θ ed il sistema si comporta come rigido.

La linea elastica relativa al secondo modo di vibrare mette in evidenza che il nodo ($\theta = 0$) è più vicino al volano di maggiore momento di inerzia di

massa: per $Y_2 \rightarrow \infty$, $\Theta_2 \rightarrow 0$ ed il disco Y_2 si comporta come un i per il sistema (Y_1, K), sistema che tenderà a vibrare con una pulsa

$$\omega_2 = \sqrt{K/Y_1}$$

che è propria del sistema ad un grado di libertà che si ottiene per Y_2

8.5 Il moto forzato del sistema a due dischi

Si supponga che sul disco Y_1 del sistema a due dischi, definito nel grafo precedente, agisca (v. fig. 8.5-1) un momento armonico $M_0 \cos \omega t$ e il sistema compie un moto forzato, definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} Y_1 \ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) = M_0 \cos \omega t \\ Y_2 \ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

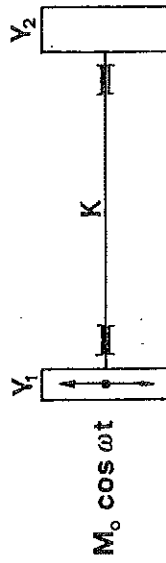


Fig. 8.5-1

L'integrale particolare del sistema di equazioni differenziali (8.5-1) rappresenta il moto forzato del sistema in esame, è del tipo:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos \omega t \\ \theta_2(t) = \Theta_2 \cos \omega t \end{cases}$$

e quindi ognuno dei due dischi compie un'oscillazione armonica della pulsazione del momento forzante $M_0 \cos \omega t$.

Le incognite del moto forzato risultano Θ_1 e Θ_2 , dovendosi ritenere ω assegnati.

Sostituendo le (8.5-2) nelle (8.5-1) si ottiene:

$$\begin{cases} -Y_1 \omega^2 \Theta_1 + K \Theta_1 - K \Theta_2 = M_0 \\ -Y_2 \omega^2 \Theta_2 + K \Theta_2 - K \Theta_1 = 0 \end{cases}$$

Ordinando le (8.5-3) in Θ_1 e Θ_2 , si può scrivere:

$$\begin{cases} (K - Y_1\omega^2)\Theta_1 - K\Theta_2 = M_0 \\ -K\Theta_1 + (K - Y_2\omega^2)\Theta_2 = 0 \end{cases} \quad (8.5-4)$$

Le (8.5-4) costituiscono un sistema di equazioni algebriche, non omogeneo nelle incognite Θ_1 e Θ_2 .

Risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} \Theta_1 = \frac{\begin{vmatrix} M_0 & -K \\ 0 & (K - Y_2\omega^2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{M_0(K - Y_2\omega^2)}{\Delta} \\ \Theta_2 = \frac{\begin{vmatrix} (K - Y_1\omega^2) & M_0 \\ -K & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{M_0K}{\Delta} \end{cases} \quad (8.5-5)$$

Poiché il determinante Δ , che compare al denominatore delle (8.5-5) è il determinante caratteristico del sistema omogeneo (8.4-3), esso tende a zero, quando ω tende ad uno dei due valori delle pulsazioni proprie del sistema. I valori di Θ_1 e Θ_2 tenderanno quindi ad infinito per:

$$\omega \rightarrow \omega_1 = 0$$

e per:

$$\omega \rightarrow \omega_2 = \sqrt{K(Y_1 + Y_2)/Y_1Y_2} \quad (8.5-6)$$

Da quanto detto si deduce che il sistema presenta due condizioni di risonanza.

Dalle (8.5-5) risulta inoltre che il rapporto tra le ampiezze Θ_1 e Θ_2 della vibrazione forzata, vale:

$$\Theta_1/\Theta_2 = (K - Y_2\omega^2)/K \quad (8.5-7)$$

Risulta quindi che:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 1 \quad (8.5-8)$$

e:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_2} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{K - Y_2}{K} \frac{K(Y_1 + Y_2)}{Y_1Y_2} = -Y_2/Y_1 \quad (8.5-9)$$

La (8.5-8) sta ad indicare che, quando la pulsazione ω del momento eccitante è molto piccola, le ampiezze Θ_1 e Θ_2 della "lenta" oscillazione forzata risultano praticamente uguali ed il moto forzato è in pratica un moto armonico rigido.

Dalla (8.5-9) si deduce che, quando la pulsazione ω è prossima alla pulsazione naturale ω_2 , il sistema oscilla secondo una linea elastica simile quella relativa al secondo modo di vibrare.

In condizioni lontane da quelle di risonanza e quindi per valori di ω molto diversi da ω_2 , i modi di vibrare, rigido ed elastico, sono entrambi presenti nelle (8.5-5): il moto armonico forzato risulta dalla sovrapposizione di due moti armonici aventi la stessa pulsazione ω , uno rigido e l'altro elastico.

Il moto forzato rigido può calcolarsi direttamente, considerando il sistema costituito dai due dischi Y_1 ed Y_2 rigidamente collegati:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_r(t)$$

e scrivendo per il principio di d'Alembert:

$$-(Y_1 + Y_2)\ddot{\theta}_r + M_0 \cos \omega t = 0 \quad (8.5-10)$$

Posto:

$$\theta_r = \Theta_r \cos \omega t \quad (8.5-11)$$

dalla (8.5-10) si ottiene:

$$-(Y_1 + Y_2)\omega^2 \Theta_r = M_0$$

e quindi:

$$\Theta_r = -\frac{M_0}{\omega^2(Y_1 + Y_2)} \quad (8.5-12)$$

La (8.5-12) mostra che l'ampiezza della vibrazione forzata rigida è direttamente proporzionale ad M_0 ed inversamente proporzionale a $(Y_1 + Y_2)$ e tende ad infinito per $\omega \rightarrow 0$ (risonanza col modo rigido vibrare).

Il segno meno di Θ_r , va interpretato nel senso che l'oscillazione rigida per $\omega > \omega_1 = 0$, in opposizione di fase col momento eccitante $M_0 \cos \omega t$.

Si osservi infine che al moto rigido forzato è collegata la variazione di velocità angolare in un gruppo a regime periodico (v. Cap. 2).

La deformazione elastica $\beta(t)$ del tronco K risulta data da:

$$\beta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) = (\Theta_1 - \Theta_2) \cos \omega t \quad (8.5-13)$$

con Θ_1 e Θ_2 forniti dalle (8.5-5).

La deformazione torsionale $\beta(t)$ del tronco varia con legge armonica di pulsazione ω , varia al variare di ω e diviene molto grande per ω prossima ad ω_2 ; infatti in queste condizioni l'ampiezza ($\Theta_1 - \Theta_2$) di β risulta molto grande, essendo Θ_1 e Θ_2 molto grandi e, per la (8.5-9), di segno contrario.

8.6 Velocità critiche torsionali

Come è stato già detto, si definiscono velocità critiche torsionali le velocità angolari in corrispondenza delle quali la pulsazione di una delle armoniche del momento, motore o resistente, eguaglia una delle pulsazioni proprie del sistema.

Calcolate le pulsazioni proprie del sistema, è quindi necessario determinare le pulsazioni delle componenti armoniche del momento.

Il momento periodico M , che agisce su una delle macchine del gruppo, il cui rotore supporremo rigido, può essere sviluppato in serie di Fourier (v. Cap. 5):

$$M = M_0 + \sum_1^m M_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad (8.6-1)$$

con:

M_0 = valore medio di $M = P/\Omega$,

P = potenza trasmessa,

Ω = velocità angolare del gruppo = $2\pi N/60$,

N = velocità angolare in giri/min,

M_n = ampiezza dell'armonica n -esima,

n = ordine dell'armonica n -esima,

ω = pulsazione dell'armonica fondamentale,

ϕ_n = angolo di fase dell'armonica n -esima.

Indicato con Θ (rad) il periodo del momento, motore o resistente, della macchina, inteso come la rotazione necessaria dell'albero della stessa, perché il momento M riassuma gli stessi valori, il periodo $T(s)$ di M è dato da:

$$T = \Theta/\Omega \quad (8.6-2)$$

e la pulsazione fondamentale ω , che figura nella (8.6-1), è data da (v. par. 5.7):

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\Omega/\Theta \quad (8.6-3)$$

Capitolo 8

Detta ω_j , con $j = 1, 2, \dots, p$, la generica pulsazione propria del sistema le velocità critiche torsionali Ω_{cr} sono quelle che soddisfano alla relazione

$$\omega_j = n\omega = n \frac{2\pi\Omega_{cr}}{\Theta}$$

che esprime la condizione di risonanza torsionale del sistema.

Si ricava quindi:

$$\Omega_{cr} = \frac{\Theta}{2\pi} \frac{\omega_j}{n} \text{ rad/s}$$

ovvero:

$$N_{cr} = \frac{60}{2\pi} \Omega_{cr} = \frac{60}{2\pi} \frac{\Theta}{2\pi} \frac{\omega_j}{n} \text{ giri/min}$$

A titolo di esempio si riprenda in esame l'impianto di propulsione di fig. 8.2-1,c) e si supponga che, noti i valori di Y' , Y'' e K , si sia calcolato per ω_2 il valore di 50 rad/s.

Per la determinazione delle pulsazioni delle azioni forzanti, derivanti dal motore diesel, si osservi che in ciascuno dei quattro cilindri del motore si completa in un giro, dal momento che si è supposto trattarsi di un motore diesel a due tempi.

Tenuto però conto che si sono supposti rigidi i tronchi che collegano i dischi Y_1, Y_2, \dots, Y_5 , corrispondenti al motore, sull'unico disco rigido del sistema a due dischi di fig. 8.2-1,c) agisce un momento, che è quello risultante dall'apporto dei quattro cilindri del motore: essendo il motore a due tempi, questo momento (v. Cap. 13) ha un periodo, che si completa in un quarto di giro del motore ($\Theta = \pi/2$).

Il periodo T di questa funzione periodica vale quindi:

$$T = \pi/2\Omega \quad ($$

e le velocità critiche si determinano con la condizione:

$$\omega_j = n\omega = n2\pi/T = 4n\Omega_{cr} \quad ($$

e risultano quindi date dalla relazione:

$$N_{cr} = 60\omega_2/8\pi n = 119.37/n \quad ($$

con $n = 1, 2, \dots$

Nella seguente tabella sono riportati, in funzione di n , i valori delle velocità critiche che si verificano nell'intervallo 0 ÷ 120 giri/minuto, nel quale dovrà operare l'impianto di propulsione.

n	1	2	3	4	5	6
N	119.37	59.7	39.8	29.8	23.8	19.9

Dall'esame di questa tabella si deduce che una velocità critica particolarmente pericolosa è quella di 119 giri/min; a questa velocità angolare infatti il sistema è in risonanza con l'armonica fondamentale del momento motore, la cui ampiezza è più grande di quella delle altre armoniche.

Poiché il valore di questa velocità angolare è molto vicino al valore massimo (120 giri/min), che limita l'intervallo di funzionamento dell'impianto di propulsione, in sede di progetto si dovranno apportare all'impianto delle modifiche, tali che si ottenga un valore più grande della pulsazione propria. In questo modo è possibile portare la velocità critica in questione ad un valore opportunamente superiore ai 120 giri/min.

L'esame approssimato fin qui esposto costituisce il primo passo di uno studio, che viene in genere approfondito facendo ricorso a modelli matematici più complessi di quelli a due gradi di libertà considerati.

Esercizio 8.I

Calcolare le pulsazioni delle vibrazioni torsionali libere del sistema a due gradi di libertà, rappresentato in fig. 8.I-1, e tracciare le linee elastiche normali, relative ai modi di vibrare del sistema.

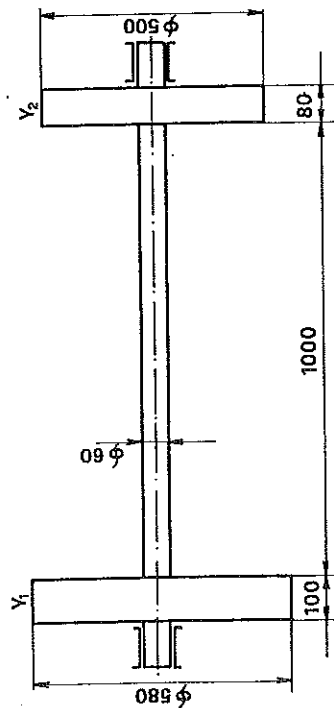


Fig. 8.I-1

L'albero ed i due dischi sono in acciaio.

Capitolo 8

Svolgimento

Il sistema ha due modi di vibrare, definiti dalle relazioni:

$$\omega_1 = 0 \quad ; \quad \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 1 \quad (\text{modo rigido})$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(Y_1 + Y_2)}{Y_1 Y_2}} \quad ; \quad \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = -\frac{Y_2}{Y_1} \quad (\text{modo elastico})$$

I valori di K (v. par. 5.16), Y_1 , Y_2 sono dati da:

$$K = G I_p / l$$

$$Y_1 = \delta(\pi/32) D_1^4 s_1$$

$$Y_2 = \delta(\pi/32) D_2^4 s_2$$

Con i dati assegnati risulta:

$$\delta = \text{densità dell'acciaio} = 7860 \text{ kg/m}^3$$

$$I_p = (\pi/32) d^4 = 1.272 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$K = 1.018 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$$

$$Y_1 = 8.732 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$Y_2 = 3.858 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Per il modo di vibrare elastico si ottiene:

$$\omega_2 = \sqrt{K(Y_1 + Y_2)/Y_1 Y_2} = 195 \text{ rad/s}$$

$$\Theta_1/\Theta_2 = -Y_2/Y_1 = -0.442$$

Con i risultati ottenuti sono state tracciate in fig. 8.I-2 le linee elastiche ($\Theta_1 = 1$).

Per il secondo modo di vibrare di pulsazione ω_2 , la distanza x^* del n. disco Y_1 si deduce dalla relazione:

$$x^*/l = \Theta_1/(\Theta_1 - \Theta_2) = 1/3.262$$

e quindi risulta data da:

$$x^* = 1/3.262 = 0.307 \text{ m}$$

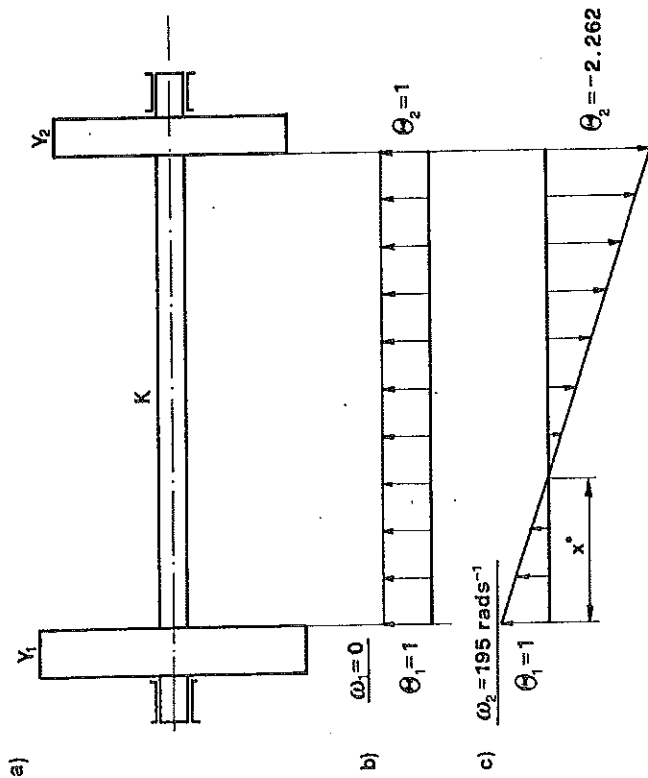


Fig. 8.I-2

Esercizio 8.II

Sul disco Y_1 del sistema dell'esercizio precedente agisce un momento armonico

$$M_0 \cos \omega t.$$

Determinare:

- le ampiezze delle oscillazioni forzate dei due dischi,
- la linea elastica dell'oscillazione forzata,
- l'ampiezza del moto rigido forzato,
- la linea elastica del moto elastico forzato,
- l'ampiezza della sollecitazione torsionale dell'albero.

Sono assegnati:

$$M_0 = 10^3 \text{ Nm}$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

Capitolo 8

Svolgimento

Le ampiezze Θ_1 e Θ_2 sono date dalle relazioni (v.par.8.5):

$$\Theta_1 = M_0(K - Y_2\omega^2)/\Delta$$

$$\Theta_2 = M_0 K/\Delta$$

con:

$$\Delta = \text{determinante dei coefficienti} = (K - Y_1\omega^2)(K - Y_2\omega^2) - K^2 = Y_1 Y_2 \omega^4 - K(Y_1 + Y_2)\omega^2$$

Con i valori assegnati risulta:

$$\Delta = -9.448 \cdot 10^9 \text{ N}^2 \text{ m}^2$$

$$\Theta_1 = -6.691 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\Theta_2 = -10.774 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

In fig.8.II-1,b) è riportata la linea elastica del moto forzato: è da notare che essa non presenta una sezione nodale.

L'ampiezza Θ_r del moto forzato rigido è data (v.la (8.5-12)) dalla relazione

$$\Theta_r = -M_0/\omega^2(Y_1 + Y_2) = -7.943 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Sottraendo ai valori di Θ_1 e Θ_2 il valore di Θ_r si ottengono le ampiezze $\Theta_{1,e}$ e $\Theta_{2,e}$ dell'oscillazione elastica forzata:

$$\Theta_{1,e} = \Theta_1 - \Theta_r = 1.252 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\Theta_{2,e} = \Theta_2 - \Theta_r = -2.831 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

In fig.8.II-1,c) è riportata la linea elastica tracciata con i valori di $\Theta_{1,e}$ e $\Theta_{2,e}$. La distanza x del nodo di questa oscillazione dal disco Y_1 si deduce dalla relazione:

$$x/l = \Theta_{1,e}/(\Theta_{1,e} - \Theta_{2,e})$$

Risulta quindi:

$$x = l \frac{1.252}{4.083} = 0.307 \text{ m}$$

Va osservato che la posizione x del nodo coincide con quella x del nodo relativo al secondo modo di vibrare (v.eser. precedente): si può quindi affermare che la linea elastica relativa al modo forzato elastico del sistema è simile alla linea elastica normale, riportata in fig.8.I-2,c).

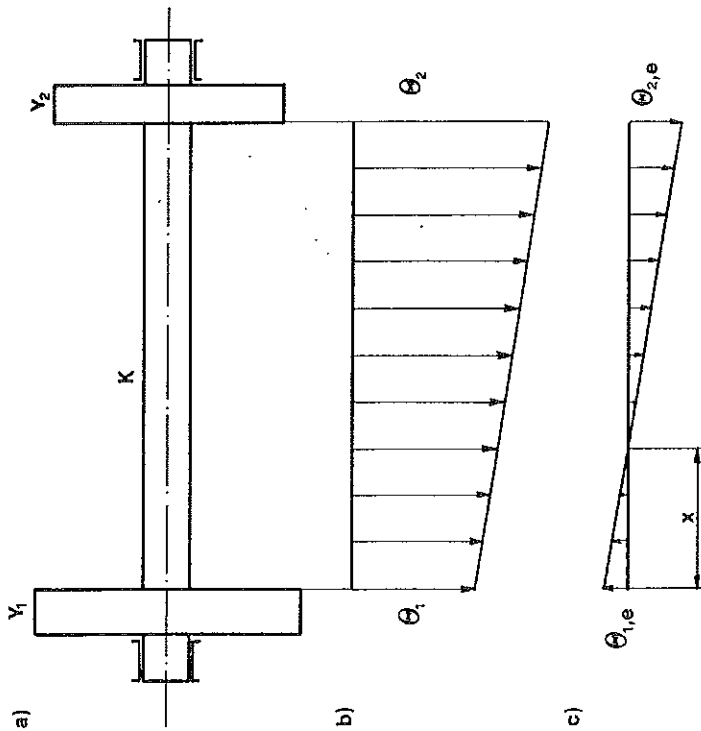


Fig. 8.II-1

La deformazione torsionale β dell'albero che collega i due dischi, definita come rotazione relativa delle sue sezioni estreme, è data da:

$$\beta = (\Theta_1 - \Theta_2) \cos \omega t$$

e varia quindi con legge armonica di pulsazione $\omega = 100$ rad/s. L'ampiezza B di questa deformazione vale:

$$B = \Theta_1 - \Theta_2 = \Theta_{1,e} - \Theta_{2,e} = 4.082 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Tenendo presente che la sollecitazione torsionale τ dell'albero è data da:

$$\tau = M_t d / 2I_p$$

con:

M_t = momento torcente,

d = diametro dell'albero,

I_p = momento d'inerzia polare della sezione dell'albero,

Capitolo 8

e che la deformazione β è, a sua volta, data da:

$$\beta = M_t / K$$

si deduce che:

$$\tau(t) = K \beta d / 2I_p$$

e quindi:

$$\tau(t) = \frac{K d}{2I_p} [\theta_1(t) - \theta_2(t)] = \frac{K d}{2I_p} (\Theta_1 - \Theta_2) \cos \omega t$$

Questa sollecitazione varia con legge armonica di pulsazione ω ed amp. T , il cui valore è dato da:

$$T = K d B / 2I_p = 9.8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Esercizio 8.III

Per il sistema considerato negli esercizi precedenti, tracciare le curve Θ_1 , Θ_2 , Θ_r , B e T al variare della pulsazione ω del momento eccit nell'intervallo $(0, 500)$ rad/s.

Svolgimento

Le relazioni, che esprimono le grandezze richieste in funzione di ω , sono:

$$\Theta_1 = M_0 \frac{(K - Y_2 \omega^2)}{\Delta}$$

$$\Theta_2 = M_0 \frac{K}{\Delta}$$

$$\Theta_r = \frac{-M_0}{\omega^2 (Y_1 + Y_2)}$$

$$B = \Theta_1 - \Theta_2$$

$$T = \frac{K d B}{2I_p}$$

con:

$$M_0 = 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$K = 1.018 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

$$Y_1 = 8.732 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$Y_2 = 3.858 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_p = 1.272 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$d = 60 \text{ mm}$$

$$\Delta = Y_1 Y_2 \omega^4 - K(Y_1 + Y_2) \omega^2$$

Utilizzando le relazioni ed i dati surriportati, sono state tracciate le curve riportate in fig. 8.III-1.

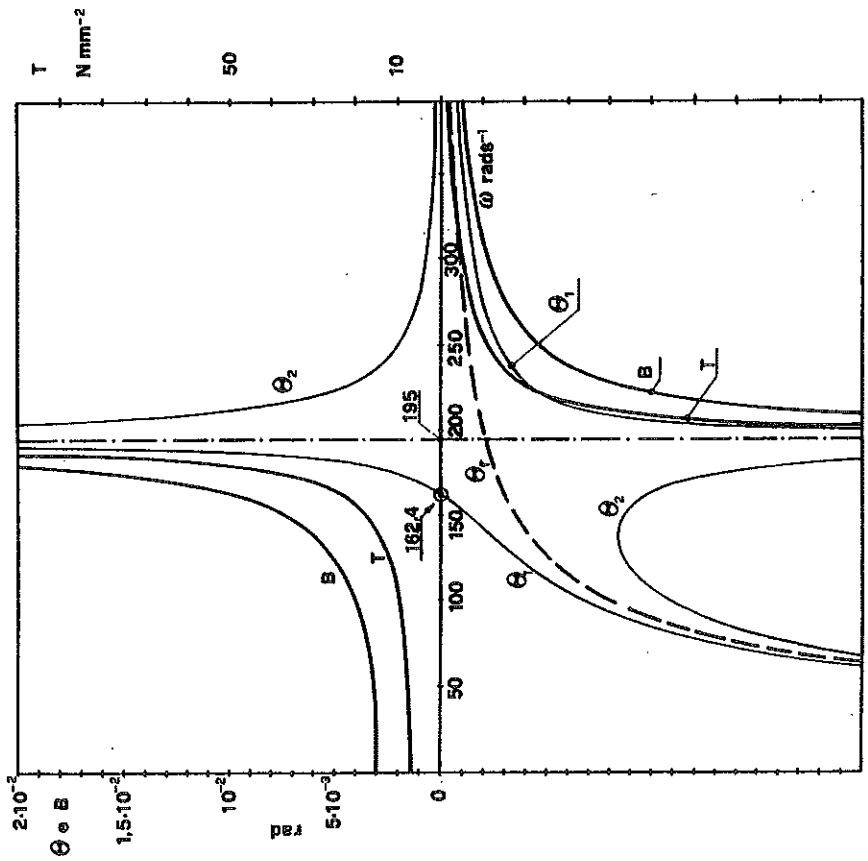


Fig. 8.III-1

Capitolo 8

Dall'esame di queste curve si deduce che:

- 1) le curve $\Theta_1(\omega)$ e $\Theta_2(\omega)$ presentano due asintoti, per $\omega = 0$ $\omega = 195$ rad/s rispettivamente: in corrispondenza di questi valori verificano le due risonanze del sistema;
- 2) per valori di $\omega < 162.4$ rad/s le ampiezze Θ_1 e Θ_2 sono tutte negative: il moto rigido prevale sul modo elastico del sistema e l'elastica non presenta nodi;
- 3) per $\omega = 162.4$ rad/s l'ampiezza Θ_1 del disco Y_1 , sul quale è applicato il momento eccitante, risulta nulla; questo risultato, che può apparire sorprendente, si giustifica osservando che il valore di Θ_1 si annulla per

$$K - Y_2 \omega^2 = 0$$

cioè per:

$$\omega = \sqrt{K/Y_2} = 162.4 \text{ rad/s}$$

È interessante osservare che la pulsazione suddetta coincide con quella naturale del sistema ad un grado di libertà, che si ottiene bloccando il disco Y_1 .

Questo risultato è in accordo con quanto è stato detto nei par. 24 e 25, Cap. 5;

- 4) la curva $\Theta_r = f(\omega)$ mette in evidenza che i valori di Θ_r sono negativi: essa presenta un asintoto per $\omega = 0$ e tende a zero per $\omega \rightarrow \infty$;
- 5) le curve $B = f(\omega)$ e $T = f(\omega)$ presentano un asintoto in corrispondenza della risonanza ($\omega = \omega_2$), mentre partono da un valore finito per $\omega = 0$. A questo riguardo va considerato che:

$$B = \Theta_1 - \Theta_2 = - \frac{M_0 Y_2}{Y_1 Y_2 \omega^2 - K(Y_1 + Y_2)}$$

e che per $\omega = 0$ è:

$$B = B_0 = M_0 Y_2 / K(Y_1 + Y_2) = 3.01 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

e quindi:

$$T = T_0 = K d B_0 / 2 I_p = 7.226 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

- 6) Al disopra della risonanza ($\omega > \omega_2$) le ampiezze Θ_1 , Θ_2 , Θ_r , B e T tendono tutte a zero per $\omega \rightarrow \infty$.

Esercizio 8.IV

Per il sistema rappresentato in fig. 8.IV-1 determinare la pulsazione ω_2 del modo di vibrare elastico e la corrispondente linea elastica normale.

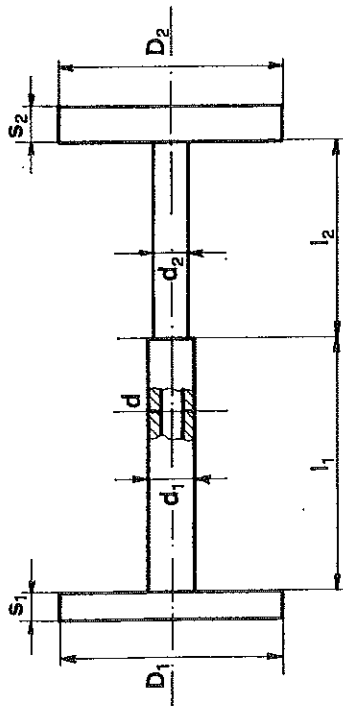


Fig. 8.IV-1

Le dimensioni del sistema, espresse in mm, sono:

$$D_1 = D_2 = 400$$

$$s_1 = 50$$

$$s_2 = 60$$

$$l_1 = 450$$

$$l_2 = 350$$

$$d_1 = 80$$

$$d_2 = 60$$

d = diametro di foratura dei due tronchi = 40

I due dischi e l'albero, che li collega, sono in acciaio.

Svolgimento

Il modo di vibrare elastico del sistema è definito dai valori di ω_2 e del rapporto Θ_1/Θ_2 :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(Y_1 + Y_2)}{Y_1 Y_2}}$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = -\frac{Y_2}{Y_1}$$

Essendo:

$$Y_1 = \delta(\pi/32)D_1^4 s_1 = 0.988 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$Y_2 = \delta(\pi/32)D_2^4 s_2 = 1.185 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$K = K_1 K_2 / (K_1 + K_2) = 0.173 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

$$K_1 = GI_{p_1}/l_1 = 0.670 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

$$K_2 = GI_{p_2}/l_2 = 0.233 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

$$I_{p_1} = (\pi/32)(d_1^4 - d^4) = 3.77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{p_2} = (\pi/32)(d_2^4 - d^4) = 1.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

risulta:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(Y_1 + Y_2)}{Y_1 Y_2}} = 567 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = -\frac{Y_2}{Y_1} = -1,2$$

Per tracciare la linea elastica normale si fissa $\Theta_1 = 1$ e si ricava:

$$\Theta_2 = -\frac{\Theta_1}{1,2} = -0,83$$

Nel caso in esame la linea elastica normale è una spezzata: infatti i due tronchi K_1 e K_2 , soggetti allo stesso momento torcente, presentano, a causa del diverso diametro, una deformazione torsionale per unità di lunghezza, d_i diversa:

$$d\beta/dl|_1 = M_t/K_1 l_1 = M_t/GI_{p_1}$$

$$d\beta/dl|_2 = M_t/K_2 l_2 = M_t/GI_{p_2}$$

e questi due diversi valori di $d\beta/dl$ rappresentano le inclinazioni dei due tronchi, di cui risulta costituita la linea elastica in questione.

Per tracciare la linea elastica si possono seguire due vie: la prima consiste nel ricavare il valore dell'ampiezza dell'oscillazione della sezione comune a tronchi; la seconda nel determinare la posizione x del nodo (v. fig. 8.IV-2).

L'ampiezza Θ può essere determinata calcolando l'ampiezza B della deformazione torsionale di uno dei due tronchi.

Prendendo in considerazione il tronco K_2 si può scrivere:

$$B_2 = \Theta - \Theta_2 = M_t/K_2$$

con:

$$M_t = \text{ampiezza del momento torcente} = -Y_2 \omega_2^2 \Theta_2$$

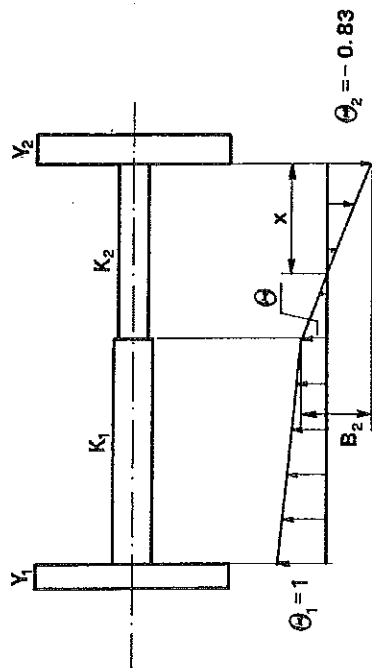


Fig. 8.IV-2

Risulta quindi:

$$\Theta = M_t / K_2 + \Theta_2 = (1 - Y_2 \omega_2^2 / K_2) \Theta_2 = - [1 - (Y_1 + Y_2) K_1 / Y_1 (K_1 + K_2)]$$

e con i dati assegnati:

$$\Theta = 0.527 \text{ rad}$$

Noti così i valori di $\Theta_1 = 1$, $\Theta = 0.527$, $\Theta_2 = -0.83$, si è potuta tracciare in fig. 8.IV-2 la linea elastica normale.

La stessa linea elastica si ottiene osservando che la sezione nodale, distante x da Y_2 , individua il sistema ad un grado di libertà, costituito dal disco Y_2 e da un tronco di rigidità $K_x = G I_p / x$, che oscilla con una pulsazione naturale pari ad ω_2 .

Si può quindi scrivere:

$$\omega_2 = \sqrt{K_x / Y_2} = \sqrt{G I_p / Y_2 x} = \sqrt{l_2 K_2 / x Y_2}$$

e ricavare:

$$x = K_2 l_2 / \omega_2^2 Y_2$$

Con i valori già calcolati risulta:

$$x = 0.214 \text{ m}$$

È da notare che, noto x , il valore di Θ risulta definito dalla relazione:

$$\frac{\Theta}{\Theta_2} = \frac{l_2 - x}{x}$$

Capitolo 8

ed è quindi dato da:

$$\Theta = (0.83 / 0.214)(0.350 - 0.214) = 0.527 \text{ rad}$$

valore che coincide con quello già calcolato, seguendo la prima via suggerita

Esercizio 8.V

Nel sistema, rappresentato in fig. 8.V-1, è presente un ingranaggio ridotti cui rapporto di trasmissione, $\varepsilon = n_1 / n_2$, è pari a 2.

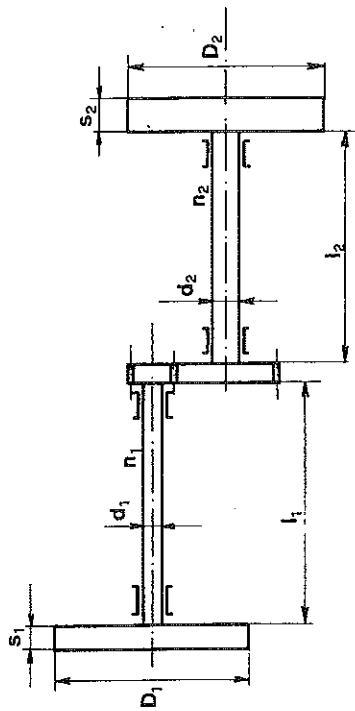


Fig. 8.V-1

Tenendo presente quanto riportato nel par. 1.13, si riduca il sistema a dell'albero 1 e, ritenendo trascurabili i momenti d'inerzia di massa delle ruote dell'ingranaggio, si determinino:

- le pulsazioni naturali del sistema,
- le corrispondenti linee elastiche normali.

I due dischi e gli alberi del sistema siano costruiti in acciaio ($G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\delta = 7800 \text{ kg/m}^3$) ed abbiano le seguenti dimensioni

$$D_1 = D_2 = 400 \text{ mm}$$

$$d_1 = 40 \text{ mm}$$

$$d_2 = 60 \text{ mm}$$

$$l_1 = 490 \text{ mm}$$

$$l_2 = 470 \text{ mm}$$

$$s_1 = 50 \text{ mm}$$

$$s_2 = 70 \text{ mm}$$

Si ritengano, al solito, trascurabili le masse degli alberi, presenti nel sistema.

Svolgimento

Con i dati assegnati si calcolano innanzi tutto i valori di Y_1, Y_2, K_1, K_2 .

$$Y_1 = \delta(\pi/32)D_1^4 s_1 = 0.988 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$Y_2 = \delta(\pi/32)D_2^4 s_2 = 1.383 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$K_1 = GI_{p1}/l_1 = 41.00 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

$$K_2 = GI_{p2}/l_2 = 216.6 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

Contrassegnando con un apice le grandezze relative al sistema ridotto, risulta:

$$Y'_1 = Y_1 = 0.988 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$Y'_2 = Y_2/\varepsilon^2 = 0.346 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$K'_1 = K_1 = 41 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

$$K'_2 = K_2/\varepsilon^2 = 54.15 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

È da notare che il valore di Y'_2 si calcola con la condizione che l'energia cinetica del disco ridotto sia la stessa di quello effettivo:

$$\frac{1}{2}Y'_2 n_1^2 = \frac{1}{2}Y_2 n_2^2$$

per cui risulta:

$$Y'_2 = Y_2/\varepsilon^2$$

Il valore di K'_2 si calcola con la condizione che l'energia di deformazione del tronco ridotto K'_2 sia la stessa di quella del tronco effettivo K_2 :

$$K'_2 \beta_2^2/2 = K_2 \beta_2^2/2$$

Tenendo presente che tutte le sezioni del tronco effettivo K_2 ruotano (ed oscillano) nel rapporto $1/\varepsilon$ rispetto a quelle del tronco ridotto K'_2 , coassiale col tronco K_1 , si può scrivere, indicando con Θ_I e Θ_{II} le rotazioni delle due ruote dentate:

$$\beta_2 = \Theta_{II} - \Theta_2 = \frac{1}{\varepsilon} (\Theta_I - \Theta'_2) = \frac{1}{\varepsilon} \beta'_2$$

e quindi:

$$\beta_2/\beta'_2 = 1/\varepsilon$$

Capitolo 8

ed infine:

$$K'_2 = K_2(\beta_2^2/\beta'_2{}^2) = K_2/\varepsilon^2$$

Ritenendo trascurabili i momenti d'inerzia di massa delle due ruote del sistema ridotto all'asse dell'albero 1 è quello rappresentato in fig. 8.V. Questa figura il tronco di rigidità K'_2 è stato disegnato con un diametro d a quello, d' , del tronco K_1 : in queste condizioni risulta:

$$K'_2/K_1 = l_1/l'_2$$

e quindi:

$$l'_2 = l_1 K_1/K'_2 = 0.757 l_1$$

SISTEMA EFFETTIVO

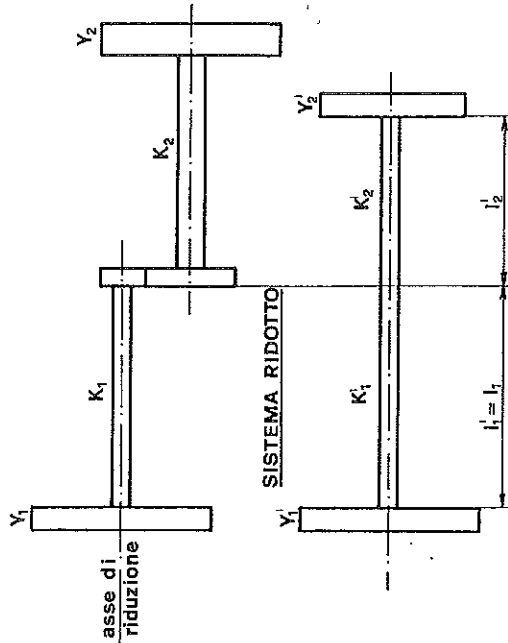


Fig. 8.V-2

Le pulsazioni naturali del sistema effettivo coincidono con quelle del sistema ridotto e sono pertanto date da:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K'(Y'_1 + Y'_2)}{Y'_1 Y'_2}}$$

con:

$$K' = K'_1 K'_2 / (K'_1 + K'_2) = 23.33 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

Per quanto si riferisce alle linee elastiche normali, in fig.8.V-3 sono state tracciate le linee elastiche normali relative al sistema ridotto: tali linee elastiche sono definite dalle note relazioni:

moto rigido: $\omega_1 = 0$; $\Theta_1 = \Theta_2 = 1$

moto elastico: $\omega_2 = 302 \text{ rad/s}$; $\Theta_1 = 1$; $\Theta_2 = -Y'_1/Y'_2 = -2.855$

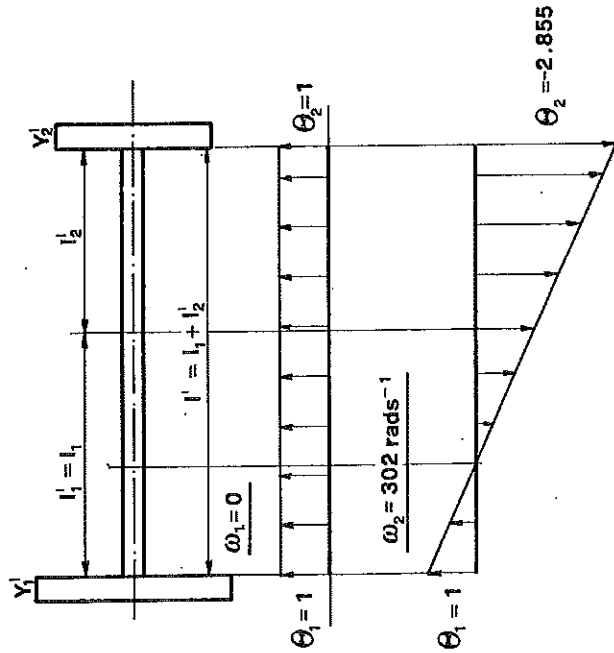


Fig. 8.V-3

In fig.8.V-4 sono riportate le linee elastiche del sistema effettivo: esse sono state tracciate, partendo da quelle del sistema ridotto di fig.8.V-3, tenendo presente le seguenti considerazioni:

- 1) le linee elastiche, relative al tronco K_1 del sistema effettivo, coincidono con quelle del sistema ridotto, relative allo stesso tronco,
- 2) le linee elastiche, relative al tronco di rigidità K_2 del sistema effettivo, si ottengono da quelle del sistema ridotto, riducendo nel rapporto $1/\varepsilon$ ($\varepsilon = 1/2$) le ampiezze di queste ultime e cambiandone il segno.

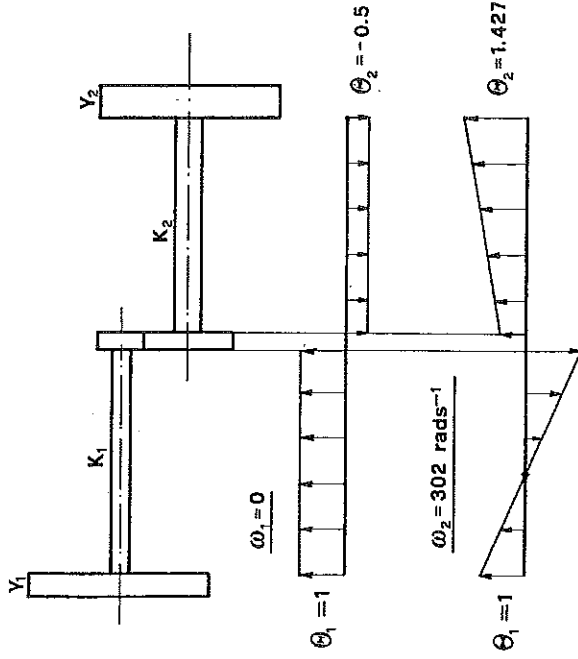


Fig. 8.V-4

Esercizio 8.VI

In fig.8.VI-1,a) è rappresentato il sistema discreto a 8 "masse" relative ad un impianto di propulsione navale.

L'impianto è costituito da un motore diesel lento, a due tempi, a sei dritti (masse Y_1, Y_2, \dots, Y_6), da un volano (massa Y_7), da un lungo albero di trasmissione e dall'elica (massa Y_8).

Oltre al moto rigido ($\omega = 0$; $\Theta_1 = \Theta_2 = \dots = \Theta_8 = \Theta_r$), il sistema ha altri sette modi di vibrare, ciascuno caratterizzato da una pulsazione propria da una linea elastica normale.

I valori delle masse e delle rigidità, che caratterizzano il sistema fig.8.VI-1,a) sono:

$$\begin{aligned}
 Y_1 = Y_2 = \dots = Y_6 &= 29 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 Y_7 &= 848.6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 Y_8 &= 271.7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 K_1 = K_2 = \dots = K_6 &= 76.5 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad} \\
 K_7 &= 1.63 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}
 \end{aligned}$$

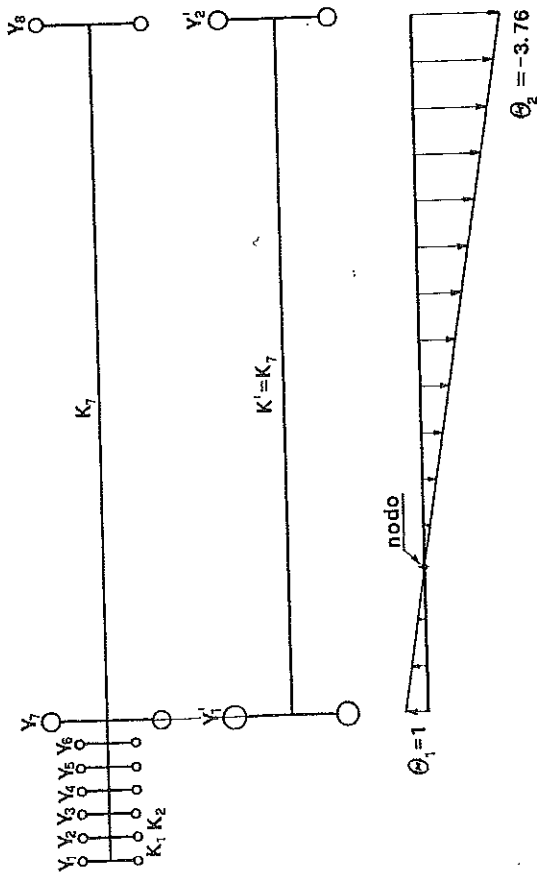


Fig. 8.VI-1

Si determini un valore approssimato della pulsazione ω_2 e della corrispondente linea elastica normale, ritenendo rigidi sia i tronchi che collegano le sei masse del motore, sia il tronco che collega il motore al volano: questa ipotesi è resa accettabile dalla circostanza che i valori delle K_i , con $i = 1 \div 6$, sono di due ordini di grandezza più grandi di quello, K_7 , del tronco che collega il volano all'elica.

Svolgimento

Nelle ipotesi fatte il sistema vibrante diviene quello rappresentato in fig.8.VI-1,b) con:

$$Y_1' = 6Y_1 + Y_7 = 1022.6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$Y_2' = Y_8 = 271.7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$K' = K_7 = 1.63 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$$

Per questo sistema il valore di ω_2 ($\omega_1 = 0$) risulta dato da:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K'(Y_1' + Y_2')}{Y_1'Y_2'}} = 27.6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Capitolo 8

È interessante osservare che il valore di ω_2 , che si ottiene considerando sistema a 8 masse di fig.8.VI-1,a), risulta essere pari a 26.7 rad/s e che pe tanto il valore approssimato ricavato è molto prossimo a quello esatto: lo scarto percentuale è infatti solo del 3.3%.

In fig.8.VI-1,c) è riportata la linea elastica normale ($\Theta_1 = 1$) relativa modo di vibrare di pulsazione ω_2 : questa linea elastica è stata tracciata tenendo conto che:

$$\Theta_2 = -Y_1'/Y_2' = -3.76$$

Esercizio 8.VII

Determinare i valori delle velocità critiche torsionali per l'impianto di propulsione navale, descritto nell'esercizio precedente, ritenendo valida l'approssimazione di considerare le masse del motore rigidamente collegate tra loro alla massa del volano.

La velocità massima dell'impianto è pari a 150 giri/min.

Va tenuto presente (v.Cap.13) che per un motore a sei cilindri, due tempi, periodo del momento motore si completa in una rotazione di 60 gradi dell'albero motore.

Svolgimento

Indicata con Ω la velocità angolare del motore, il periodo T del momento motore è dato da:

$$T = 2\pi/6\Omega$$

La pulsazione dell'armonica fondamentale di questa funzione periodica quindi data da:

$$\omega = 2\pi/T = 6\Omega$$

Le velocità critiche torsionali risultano pertanto essere quelle che soddisfano alla relazione:

$$n\omega = 6n\Omega_{cr} = \omega_2$$

e sono quindi date da:

$$\Omega_{cr} = \omega_2/6n \quad n = 1, 2, \dots$$

In Tab.I sono riportati i valori delle velocità critiche così calcolate.

Tab. I

n	1	2	3	4	5
N (giri/min.)	44	22	14.6	11	8.8

È da osservare che delle velocità critiche ricavate, la più pericolosa, nei riguardi della resistenza dell'impianto, è la prima riportata in tabella (44 giri/min).

Infatti in corrispondenza di questa velocità angolare si verifica un fenomeno di risonanza tra il modo di vibrare di pulsazione ω_2 e l'armonica fondamentale del momento motore: è da osservare che questa armonica ha un'ampiezza notevolmente più grande di quelle delle armoniche di ordine superiore ($n \geq 2$).

Per questo motivo, se non si prendono altri provvedimenti, è necessario che l'impianto non funzioni mai, in condizioni di regime, nell'intorno di questa velocità angolare.

CAPITOLO 9

TRASMISSIONE CON RUOTE DI FRIZIONE

9.1 La trasmissione del moto rotatorio

Nel Cap. I sono stati definiti meccanismi quei sistemi meccanici che realizza-
no la trasmissione del moto tra due membri di una macchina o tra di
macchine e nei quali non ha sede una trasformazione energetica, ma un
semplice trasmissione di moto e di potenza meccanica.

In quella occasione sono stati considerati (v. fig. 1.1-1) alcuni esempi
meccanismi: il meccanismo di spinta rotativa, il meccanismo di comando
valvola, la trasmissione con cinghia.

In ciascuno degli esempi riportati il problema che il meccanismo consen-
di risolvere è quello di ottenere che un organo meccanico si muova con un
legge desiderata, utilizzando il moto di un altro organo che si muove con
una legge in genere diversa: nel caso del meccanismo di spinta rotati-
si utilizza il moto alternativo del pistone per far ruotare la manovella
viceversa; nel meccanismo di comando valvola si utilizza il moto rotator
dell'asse a camme per ottenere il moto di apertura e chiusura della valvol

In questo capitolo e nei due successivi verranno esaminati i meccanismi
che realizzano la trasmissione del moto rotatorio, nei quali si utilizza il mo-
rotatorio di un organo o di una macchina per far ruotare un altro orga
od un'altra macchina.

Questi meccanismi prendono il nome di trasmissioni e comprendono
trasmissioni con ruote di frizione, quelle con organi flessibili e quelle c
ruote dentate.