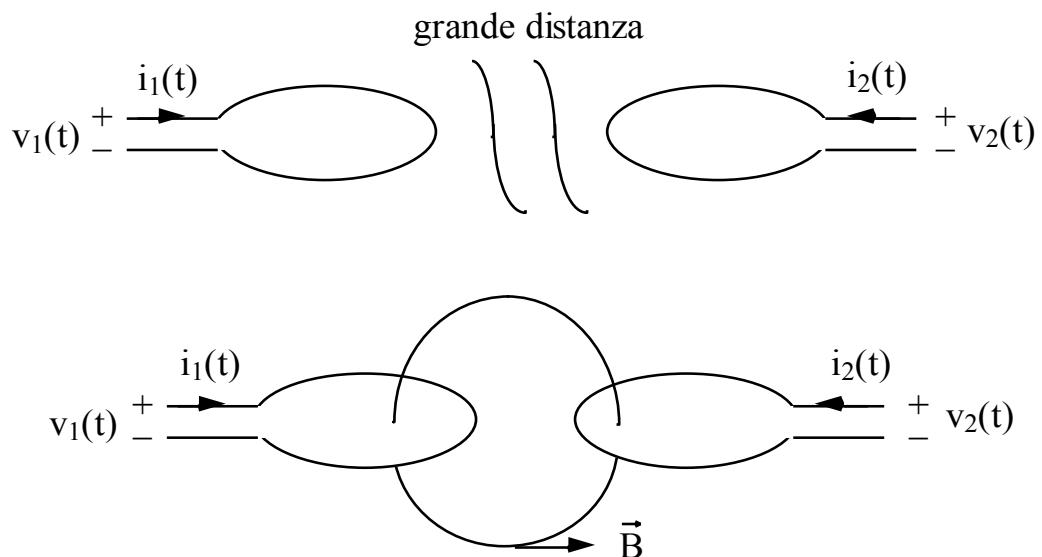


## 8.22 Accoppiamento mutuo

Dopo aver presentato il trasformatore ideale, vale la pena introdurre qualche aspetto della realtà fisica: nella pratica tecnica, il trasformatore è una macchina elettrica costituita, nella sua più semplice accezione, da due circuiti mutuamente accoppiati, come quelli schematicamente indicati in Figura 8.100. Per la verità, le due spire sono spesso avvolte su un supporto di materiale ferromagnetico, ma questo dettaglio al momento è poco interessante e verrà chiarito in quel che segue.



**Figura 8.100:** circuiti elettromagneticamente non accoppiati ed accoppiati.

In un primo momento si immagini che le due spire siano poste a grande distanza, tanto che i campi magnetici sostenuti da una spira non interagiscano con quelli dell'altra. In questa situazione, ai capi delle due spire si raccoglieranno le tensioni

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}, \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

In ciò non vi è nulla di veramente nuovo: era già noto che ai capi di un induttore percorso da una corrente variabile dovesse manifestarsi una tensione variabile. Le due costanti  $L_1$  e  $L_2$  sono le induttanze proprie dei due avvolgimenti e sono da ritenersi quantità positive.

Si avvicinino ora i due avvolgimenti: in questa nuova situazione, i campi prodotti dalle due spire interagiranno ed alle due precedenti tensioni si sommeranno due nuovi contributi, secondo le generiche relazioni

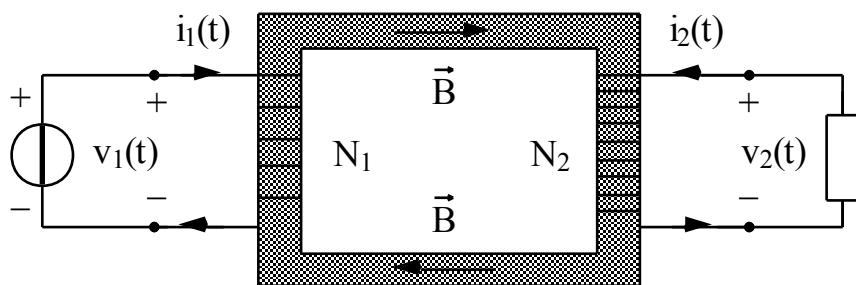
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \text{un nuovo termine dovuto alla } \textit{seconda} \text{ spira,} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + \text{un nuovo termine dovuto alla } \textit{prima} \text{ spira.} \end{cases}$$

Per comprendere appieno il funzionamento di due circuiti accoppiati, è doveroso allora specificare meglio che cosa rappresentino questi due nuovi contributi. Il primo circuito genera un campo magnetico variabile nel tempo ed induce nel secondo circuito una f.e.m. variabile, che determina il passaggio di una corrente. Questa corrente indotta nel secondo circuito, a sua volta, produce un campo magnetico variabile nel tempo, che genera nel primo circuito una seconda forza elettromotrice, e così via. Le stesse cose possono essere dette per il secondo circuito e si dice così che i due circuiti sono mutuamente accoppiati per mezzo del campo di induzione magnetica. La due correnti variabili nel tempo sono, in ultima analisi, sostenute non solo dai rispettivi generatori, ma anche dall'induzione dovuta all'altra.

Naturalmente, non tutte le linee di campo prodotte dal primo (e dal secondo) circuito si concatenano con il secondo (o con il primo) circuito; alcune saranno

disperse nel senso che, pur essendo prodotte da uno dei due circuiti, non raggiungono l'altro. Si paragoni la spira ad una fontana che schizza acqua (il campo di induzione magnetica nella metafora) in tutte le direzioni: solo una piccola parte dell'acqua spruzzata raggiunge la seconda spira. Ai fini pratici è necessario evitare, almeno limitare, questa dispersione, e pertanto un accoppiamento mutuo non viene realizzato in aria, ma le due spire vengono avvolte, come mostrato in Figura 8.101, su un supporto di materiale ferromagnetico, *un buon ferro*, che ha il compito di intrappolare la maggior parte delle linee di campo induzione magnetica al suo interno. I due avvolgimenti vengono, pertanto, realizzati su un materiale ferromagnetico che, a causa della elevata permeabilità magnetica, riesce a trattenere gran parte del campo di induzione magnetica al suo interno, rendendo il *ferro* tubo di flusso per questo campo. Questo argomento va approfondito nei corsi di Macchine Elettriche, allorquando si presentano in maniera più specifica e diffusa i circuiti accoppiati su un materiale ferromagnetico.

Nella Figura 8.101 si è rappresentato anche un alimentatore collegato alla porta primaria ed un carico collegato alla porta secondaria, per ricordare il maggiore impiego che viene fatto del trasformatore monofase.



**Figura 8.101:** due avvolgimenti su *ferro*.

Tornando al generico accoppiamento di Figura 8.100, le relazioni che lo definiscono sono quindi

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}, \\ v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

Quando si opera in regime sinusoidale, ricordando che al posto della derivata rispetto al tempo è possibile sostituire l'operatore  $j\omega$ , i precedenti legami nel dominio del tempo si trasformano nelle nuove relazioni algebriche complesse

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \bar{I}_2, \\ \bar{V}_2 = j\omega M_{21} \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2. \end{cases}$$

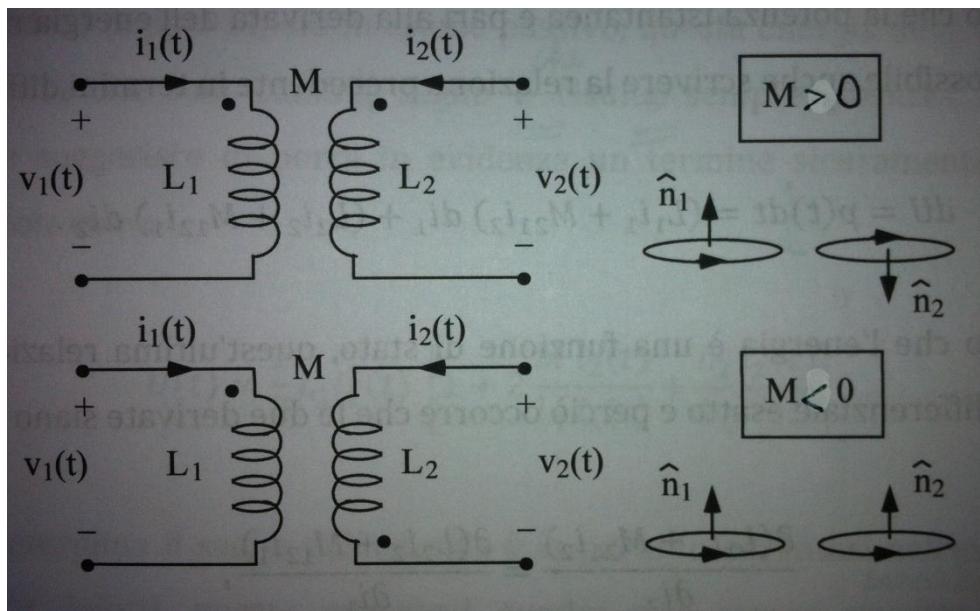
Si noti come i valori delle due tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ , al generico istante temporale  $t$ , non dipendono da quelli delle correnti allo stesso istante, ma dalle loro derivate. I coefficienti di autoinduzione  $L_1$  e  $L_2$ , come si è già sottolineato, sono positivi; quelli di mutua induzione  $M_{12}$  e  $M_{21}$  possono essere positivi oppure negativi a seconda dei riferimenti scelti per i versi delle correnti. Ora accade, come si mostrerà nel seguito, che

$$M_{12} = M_{21},$$

vale a dire che le due induttanze mutue del doppio bipolo sono uguali. Questo legame è molto importante, in quanto riduce da quattro a tre i parametri che caratterizzano un doppio bipolo accoppiamento mutuo:

1.  $L_1$ , detto autoinduttanza del circuito primario,
2.  $L_2$ , detto autoinduttanza del circuito secondario,
3.  $M$ , detta mutua induttanza.

I primi due sono sempre positivi; il terzo può assumere qualsiasi segno. Il segno di  $M$  dipende dal senso di avvolgimento delle spire e dal verso delle correnti. Supponendo di fissare il verso delle correnti, per indicare anche sullo schema grafico il segno di  $M$ , si adotta la convenzione mostrata in Figura 8.102.



**Figura 8.102:** convenzioni di segno per  $M$ .

Si osservi con attenzione la Figura 8.102: se alle due porte del doppio bipolo è stata fatta, come d'abitudine, la convenzione dell'utilizzatore, allora  $M$  è positivo quando i due pallini neri sono affiancati; in caso contrario,  $M$  è da ritenersi negativo. Il segno del flusso di mutua induzione dipende dalla convenzione scelta per il primo e per il secondo circuito. Pertanto, anche se per il calcolo del flusso si conviene di scegliere sempre come verso della normale quello che 'vede' il verso positivo della circuitazione in senso antiorario (terna levogira), resta ancora un grado di libertà nella scelta delle due normali relative ai due circuiti, come è indicato sempre nella Figura 8.102.

Dimostrare che i due coefficienti di mutua induzione sono uguali non è cosa semplicissima e, per comprenderla appieno, c'è bisogno di strumenti avanzati

del calcolo differenziale. Si parta dalla potenza istantanea assorbita dal doppio bipolo accoppiamento mutuo, definita dalla relazione

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = \left( L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left( M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2 .$$

Ricordando che la potenza istantanea è pari alla derivata dell'energia rispetto al tempo, è possibile scrivere la relazione precedente in termini differenziali

$$dU = p(t) dt = (L_1 i_1 + M_{21} i_2) di_1 + (L_2 i_2 + M_{12} i_1) di_2 .$$

Allora, dato che l'energia è una funzione di stato, quest'ultima relazione deve risultare un differenziale esatto, dato che solo sotto questa ipotesi una variazione finita di energia non dipende dal percorso seguito, cioè risulta indipendente dal modo in cui si è andati dalla condizione iniziale a quella finale. Pertanto, occorre che siano uguali le due derivate

$$\frac{\partial(L_1 i_1 + M_{21} i_2)}{\partial i_2} = \frac{\partial(L_2 i_2 + M_{12} i_1)}{\partial i_1} ,$$

da cui discende immediatamente l'asserto

$$M_{12} = M_{21} = M .$$

Dimostrato che c'è bisogno di un solo coefficiente per descrivere l'accoppiamento mutuo, è opportuno chiedersi se tra questi tre parametri non esista qualche altro legame. La risposta a questa domanda discende, come non è difficile rendersi conto, ancora dalla considerazione dell'energia elementare

$$dU = L_1 i_1 \, di_1 + L_2 i_2 \, di_2 + M(i_1 \, di_2 + i_2 \, di_1) .$$

Essa può essere integrata membro a membro e fornire, a meno di una costante additiva di integrazione, che si assume nulla per correnti nulle, l'energia assorbita dal nostro doppio bipolo al generico istante  $t$  di funzionamento

$$U(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) .$$

Essendo il doppio bipolo in esame passivo, questa energia deve descrivere una quantità che non cambi segno e che risulti sempre positiva. La sua forma funzionale suggerisce di porre in evidenza un termine, sicuramente positivo, riscrivendola in modo che

$$U(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) \left[ 1 + 2 \frac{M}{L_1} \frac{i_2(t)}{i_1(t)} + \frac{L_2}{L_1} \frac{i_2^2(t)}{i_1^2(t)} \right] .$$

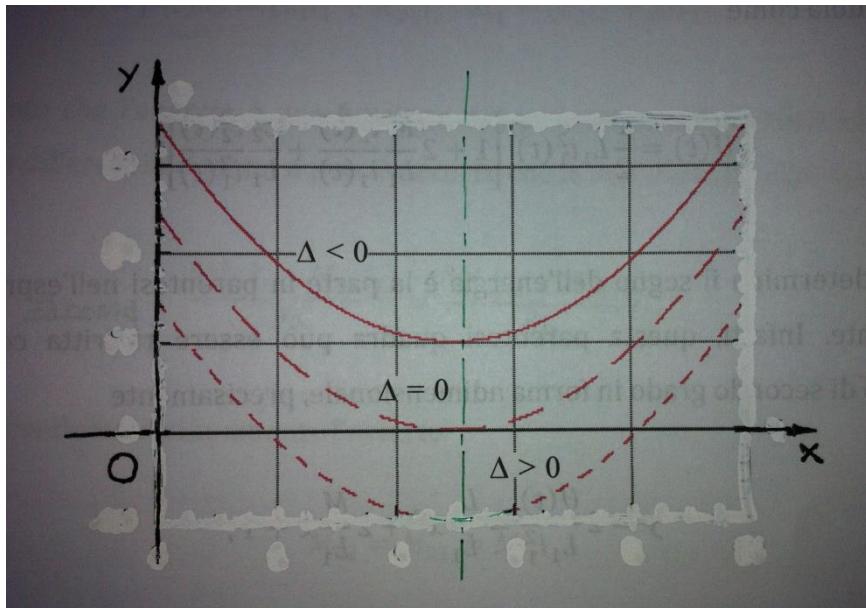
Ciò che determina il segno dell'energia è la parte in parentesi quadra nell'espressione precedente, che può essere allora pensata come un trinomio di secondo grado in forma adimensionale, precisamente

$$y = 2 \frac{U(t)}{L_1 i_1^2} = \frac{L_2}{L_1} x^2 + 2 \frac{M}{L_1} x + 1 ,$$

in cui si è indicato con  $x = i_2(t)/i_1(t)$  il rapporto tra le due correnti. Ora, affinché anche il secondo membro sia una quantità sempre positiva, al più nulla, si deve avere per tutti i valori della variabile  $x$ , cioè per ogni condizione di funzionamento, che il discriminante del trinomio non sia positivo

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{M}{L_1}\right)^2 - \frac{L_2}{L_1} \leq 0.$$

Si riconosce nella funzione  $y$  definita in precedenza una parabola; più precisamente, si tratta dell'insieme di parabole ad asse verticale, disegnato in Figura 8.103. Questa figura lascia intuire anche graficamente il motivo per cui il discriminante deve essere minore di zero: se così non fosse, allora per alcuni valori della variabile  $x$ , che rappresentano, in ultima analisi, possibili condizioni di funzionamento, potrebbe accadere che l'energia diventi negativa, eventualità che bisogna scongiurare, se si vuole che il doppio bipolo sia passivo.



**Figura 8.103:** energia assorbita dal doppio bipolo accoppiamento mutuo.

In altri termini, è essenziale fare in modo che l'equazione di secondo grado

$$\frac{L_2}{L_1}x^2 + 2\frac{M}{L_1}x + 1 = 0$$

ammetta soltanto radici complesse e coniugate, al più, reali e coincidenti, e ciò si ottiene imponendo semplicemente che il discriminante non sia positivo, vale a

dire sia negativo o nullo. Ora, imporre che il discriminante sia minore di zero, equivale a scrivere che

$$M^2 \leq L_1 L_2 .$$

Si tratta di una condizione che deve sempre essere verificata, per fare in modo che l'energia assorbita dal mutuo accoppiamento sia, in ogni istante e per qualunque valore del rapporto tra le correnti di uscita e di ingresso, una quantità positiva, al più nulla in un punto. Comunque, nel caso limite

$$M^2 = L_1 L_2 ,$$

si è in condizione di *accoppiamento perfetto* ed esiste un valore del rapporto delle correnti per cui l'energia del campo di induzione magnetica è nulla. In questa particolare condizione di funzionamento è evidente che i campi magnetici, sostenuti dalle due bobine, siano uguali in modulo ed opposti in verso, in modo da produrre un campo risultante nullo. Se, invece, accade che

$$M^2 < L_1 L_2 ,$$

si è in condizioni di *accoppiamento non perfetto* e l'energia presenta un minimo, il cui valore è positivo. Al coefficiente  $k$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

viene dato il nome di *coefficiente di accoppiamento*: esso varia tra  $-1$  e  $1$  e, quando  $k \rightarrow \pm 1$ , l'avvolgimento tende ad essere perfetto.

- *Accoppiamento perfetto*

Si soffermi, ora, l'attenzione su un caso particolare di accoppiamento, quello perfetto. Come si è già sottolineato in precedenza, si parla di accoppiamento perfetto quando tra i diversi parametri sussiste la relazione  $M^2 = L_1 L_2$ , che si può porre, introducendo un nuovo parametro  $a$ , nella forma equivalente

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a .$$

Operando in regime sinusoidale, si può scrivere che

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 , \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 . \end{cases}$$

Dividendo membro a membro queste due ultime equazioni, allo scopo di considerare il rapporto tra la tensione alla porta primaria e quella alla porta secondaria, si ha

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{j\omega L_1}{j\omega M} \cdot \frac{\bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2}{\bar{I}_1 + \frac{L_2}{M} \bar{I}_2} = \frac{L_1}{M} = a \rightarrow \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a ,$$

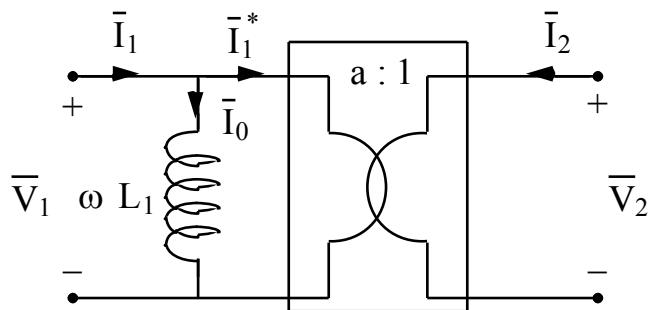
cioè, si è ottenuta la prima relazione che definisce il trasformatore ideale. Si ricava poi la corrente  $\bar{I}_1$ , riscrivendo la prima equazione nella forma

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} - \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 .$$

Siccome  $L_1 = Ma$ , la precedente relazione diventa

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{a} \bar{I}_2 .$$

Questa ultima uguaglianza richiama alla memoria quella già vista nel caso del trasformatore ideale  $\bar{I}_2 = -a\bar{I}_1$ . Ma, come si osserva, vi è la presenza anche di un altro addendo, che può essere interpretato come una corrente relativa alla prima maglia, che attraversa la reattanza  $\omega L_1$ , posta in parallelo alla porta primaria.



**Figura 8.104:** primo circuito equivalente in accoppiamento perfetto.

Si osservi con cura la Figura 8.104: la rete mostrata soddisfa l'equazione per le tensioni che definisce il trasformatore ideale ed, in forza della LKC, deve essere

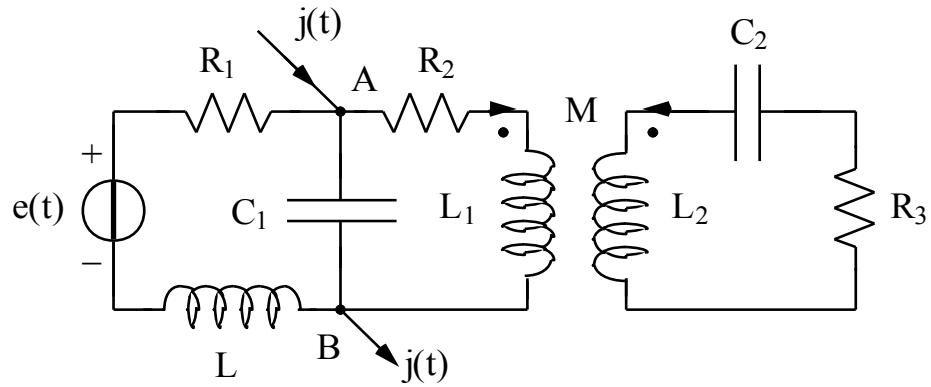
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1^* + \bar{I}_0 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} .$$

Ciò che conta davvero ricordare è che si è fatto tutto ciò per capire che si passa dal concetto di trasformatore ideale a quello più realistico dell'accoppiamento mutuo, aggiungendo alla prima maglia del trasformatore ideale una induttanza, proprio come mostrato in Figura 8.104.

Si fa notare esplicitamente che, nel caso in cui l'induttanza  $L_1$  assuma valori molto elevati, la precedente relazione approssima molto bene quella del trasformatore ideale, tanto che si può scrivere

$$\bar{I}_1 \cong -\frac{1}{a} \bar{I}_2, \text{ se } L_1 \rightarrow \infty.$$

**Esempio 12** - Si valutino le potenze, attiva e reattiva, erogate dal generatore di tensione nella rete operante in regime sinusoidale.



Dati:  $e(t) = E \sin(\omega t)$ ,  $j(t) = -J \cos(\omega t + \pi/4)$ ,  $\omega = 1 \text{ krad/s}$ ,  $E = 100\sqrt{2}$ ,  $J = 20$ ,  $R_1 = R_2 = 10$ ,  $R_3 = 2.5$ ,  $L = 5 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 0.1 \text{ mF}$ ,  $C_2 = 0.4 \text{ mF}$ ,  $L_1 = 10 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 2.5 \text{ mH}$ ,  $|M| = 5 \text{ mH}$ .

Per applicare il metodo dei fasori, si calcolano anzitutto le reattanze

$$X = \omega L = 5, \quad X_1 = \frac{1}{\omega C_1} = 10, \quad X_2 = \frac{1}{\omega C_2} = 2.5, \quad X_{L1} = \omega L_1 = 10$$

e poi si trasformano le sinusoidi nei fasori corrispondenti, secondo una convenzione ai valori efficaci, assumendo

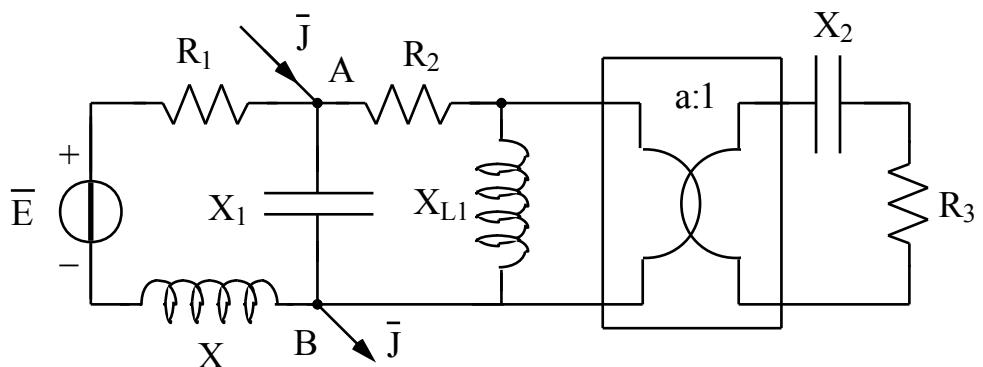
$$e(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t) \rightarrow \bar{E} = 100, \\ j(t) = -20 \cos(\omega t + \pi/4) \rightarrow \bar{J} = 10\sqrt{2} e^{-j\pi/4} = 10(1-j).$$

La condizione

$$M^2 = L_1 L_2 = 25 \cdot 10^{-6}$$

manifesta la presenza di accoppiamento perfetto e la rete assegnata può essere trasformata come indicato in figura, avvalendosi di un trasformatore ideale caratterizzato da un rapporto di trasformazione pari a

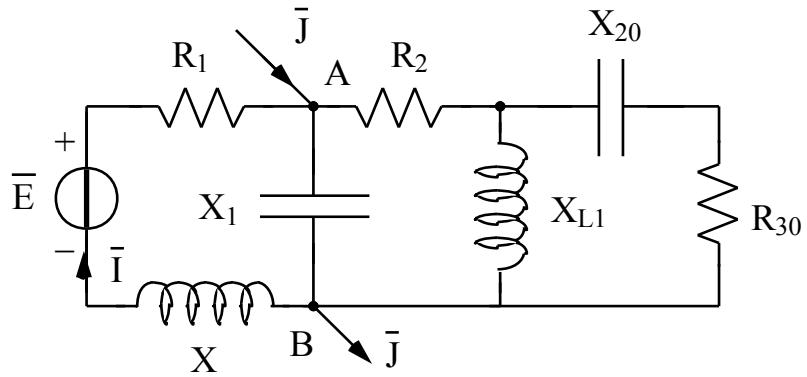
$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a = 2.$$



Riportando al primario la resistenza  $R_3$  e la reattanza  $X_2$ ,

$$R_{30} = a^2 R_3 = 10, \quad X_{20} = a^2 X_2 = 10,$$

la rete può ulteriormente semplificarsi come di seguito mostrato.

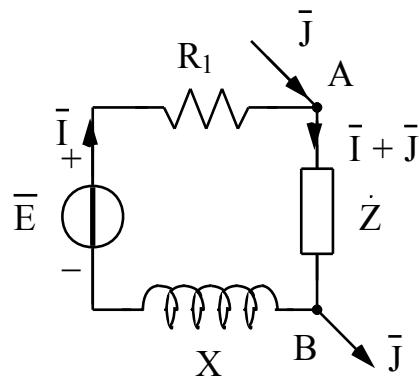


Dovendo valutare la potenza complessa erogata

$$\dot{P} = \bar{E} \bar{I}^* = P_E + jQ_E ,$$

occorre determinare la corrente  $\bar{I}$  che interessa il generatore di forza elettromotrice. Appare immediata l'opportunità di semplificare ulteriormente la rete, valutando l'impedenza equivalente 'vista' dai morsetti  $AB$ , comprensiva della reattanza  $X_1$

$$\dot{Z} = (-jX_1) \parallel [R_2 + (jX_{L1}) \parallel (R_{30} - jX_{20})] = 5 - 10j .$$



Applicando la LKT, si può scrivere

$$\bar{E} = (R_1 + jX) \bar{I} + \dot{Z} (\bar{I} + \bar{J}).$$

Dalla precedente relazione si deduce immediatamente che

$$\bar{I} = \frac{\bar{E} - \dot{Z}\bar{J}}{R_1 + jX + \dot{Z}} = 6 + 12j.$$

In definitiva, la potenza è data da

$$\dot{P} = P_E + jQ_E = 600 - 1200j \rightarrow P_E = 0.6 \text{ kW}, Q_E = -1.2 \text{ kVAr}.$$

Terminato l'esempio, si ritorni all'accoppiamento perfetto. Se, per ricavare la corrente, invece di usare la prima relazione che definisce la tensione alla prima porta, si fosse deciso di usare l'altra che fornisce la tensione alla seconda porta

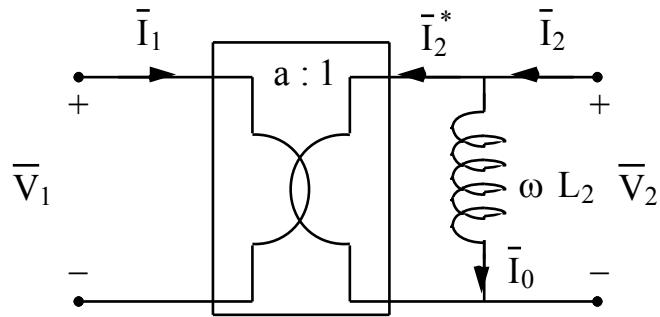
$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2,$$

con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si sarebbe potuto scrivere

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{j\omega a L_2} - \frac{1}{a} \bar{I}_2 = -\frac{1}{a} \left( \bar{I}_2 - \frac{\bar{V}_2}{j\omega L_2} \right).$$

Nella Figura 8.105 si riporta anche il circuito equivalente che corrisponde a questa equazione: la reattanza  $\omega L_2$  è posta in parallelo alla porta secondaria e

$$\bar{I}_2^* = \bar{I}_2 - \bar{I}_0 = \bar{I}_2 - \frac{\bar{V}_2}{j\omega L_2}.$$



**Figura 8.105:** secondo circuito equivalente in accoppiamento perfetto.

Il circuito equivalente di Figura 8.105, tuttavia, viene scarsamente adoperato, dato che per consuetudine il carico viene posto in parallelo alla porta secondaria e, pertanto, conviene utilizzare il circuito di Figura 8.104, al fine di realizzare efficacemente il riporto al primario.

- *Accoppiamento non perfetto*

Anche in questo caso si comincia dalle due relazioni che definiscono il doppio bipolo accoppiamento mutuo e, poiché si è in condizioni di accoppiamento non perfetto, deve essere

$$M^2 < L_1 L_2 .$$

Le induttanze proprie  $L_1$  e  $L_2$  sono dei numeri positivi che, dovendo soddisfare la precedente diseguaglianza, è sempre possibile immaginare come la somma di due contributi positivi

$$L_1 = L_1^{(1)} + L_1^{(2)} , \quad L_2 = L_2^{(1)} + L_2^{(2)} ,$$

in cui i due contributi  $L_1^{(1)}$  e  $L_2^{(1)}$  vengono scelti in maniera tale da soddisfare l'uguaglianza

$$M^2 = L_1^{(1)} L_2^{(1)} .$$

Questa scomposizione, che potrebbe apparire un mero artificio matematico, trova un riscontro nelle applicazioni. Prima di procedere oltre, è opportuno spiegarla con un esempio numerico. Si supponga che siano stati assegnati i valori

$$L_1 = 10 \text{ mH} , \quad L_2 = 6 \text{ mH} , \quad M = 5 \text{ mH} .$$

È facile controllare che il doppio bipolo lavora in condizioni di accoppiamento non perfetto, essendo

$$M^2 = 25 \cdot 10^{-6} < L_1 L_2 = 60 \cdot 10^{-6} .$$

Tuttavia è sempre possibile immaginare che  $L_1$  sia la somma di due induttanze

$$L_1 = (5 + 5) \text{ mH} \quad \text{oppure} \quad L_1 = (8 + 2) \text{ mH} .$$

L'importante è che la somma delle due induttanze in cui si immagina scomposto il valore di  $L_1$  diano, in ogni caso, per somma 10 mH. La stessa cosa si può pensare di fare per  $L_2$ .

Riassumendo, si è immaginato di scomporre in due contributi le autoinduttanze delle porte primaria e secondaria e le suddivisioni imposte verificano il sistema

$$\begin{cases} L_1^{(1)} + L_1^{(2)} = L_1 , \\ L_2^{(1)} + L_2^{(2)} = L_2 . \\ L_1^{(1)} L_2^{(1)} = M^2 . \end{cases}$$

costituito da tre equazioni e quattro incognite

$$L_1^{(1)}, \ L_1^{(2)}, \ L_2^{(1)}, \ L_2^{(2)}.$$

Una incognita è di troppo e, pertanto, è possibile fissarla a piacimento: in genere, si usa considerare  $L_2^{(2)}$  nullo, ma si sarebbe potuto altrettanto correttamente considerare nullo  $L_1^{(2)}$ , e semplificare il precedente sistema come

$$\begin{cases} L_1^{(1)} + L_1^{(2)} = L_1, \\ L_2^{(1)} = L_2. \\ L_1^{(1)} L_2 = M^2. \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce i tre valori

$$L_1^{(1)} = \frac{M^2}{L_2}, \quad L_1^{(2)} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}, \quad L_2^{(1)} = L_2.$$

Ad esempio, usando i valori assegnati in precedenza, risulta il sistema

$$\begin{cases} L_1^{(1)} + L_1^{(2)} = 10 \cdot 10^{-3}, \\ L_2^{(1)} = 6 \cdot 10^{-3}, \\ L_1^{(1)} = 4.1\overline{6} \cdot 10^{-3}, \end{cases}$$

che fornisce i tre valori

$$L_1^{(1)} = 4.1\overline{6} \text{ mH}, \quad L_1^{(2)} = 5.8\overline{3} \text{ mH}, \quad L_2^{(1)} = 6 \text{ mH}.$$

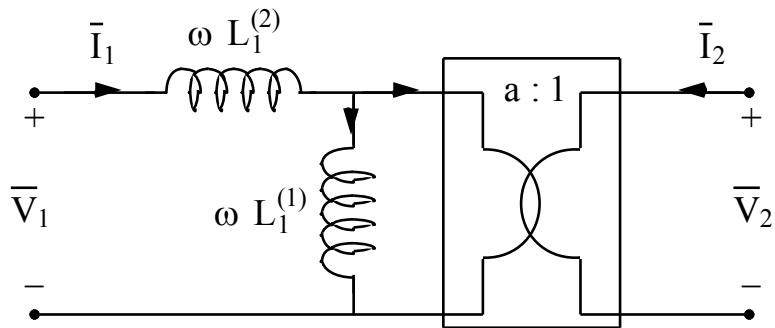
Sostituendo la scomposizione appena sviluppata nella definizione del doppio bipolo, si ottiene

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega \left[ L_1^{(1)} + L_1^{(2)} \right] \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2, \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2^{(2)} \bar{I}_2. \end{cases}$$

Queste relazioni si possono, ovviamente, scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1^{(1)} \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 + \boxed{j\omega L_1^{(2)} \bar{I}_1}, \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2^{(2)} \bar{I}_2. \end{cases}$$

Se nella prima relazione fosse assente il termine  $j\omega L_1^{(2)} \bar{I}_1$ , si poteva concludere che si era in presenza delle stesse equazioni del caso dell'accoppiamento perfetto. Tuttavia, l'aggiunta di questo termine comporta soltanto la piccola, ma sostanziale, modifica indicata in Figura 8.106.



**Figura 8.106:** *primo circuito equivalente in accoppiamento non perfetto.*

Allora, quando si è in condizioni di accoppiamento non perfetto, è possibile passare dall'accoppiamento perfetto a quello non perfetto, aggiungendo in serie alla prima porta una induttanza di valore  $L_1^{(2)}$ .

Resta solo da specificare il valore della costante  $a$ . Dalla relazione imposta che definisce la parte di accoppiamento perfetto

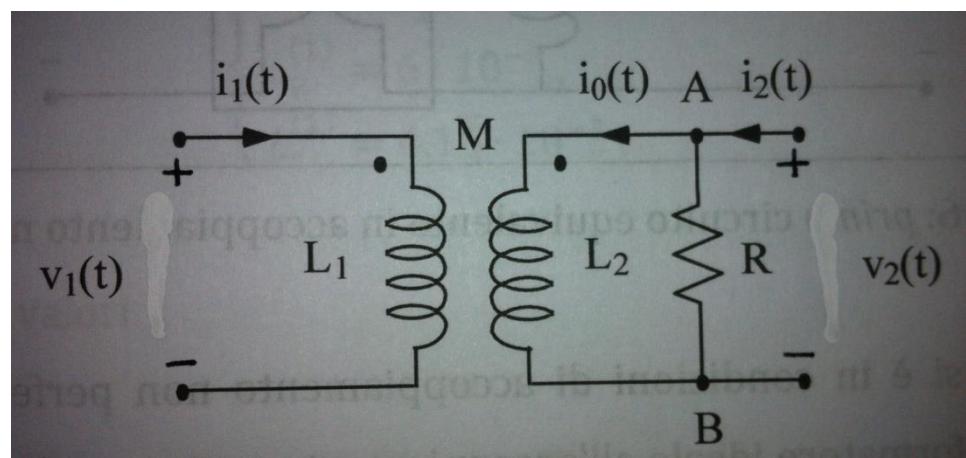
$$L_1^{(1)} L_2 = M^2 ,$$

segue immediatamente che

$$a = \frac{L_1^{(1)}}{M} = \frac{M}{L_2} \quad (\text{nell'esempio } a = 0.8\bar{3}) .$$

In genere, se il trasformatore è ben progettato, l'induttanza  $L_1^{(2)}$ , anche detta induttanza longitudinale, è piccola rispetto alle altre due  $L_1^{(1)}$  e  $L_2$ , dette induttanze trasverse o trasversali, che sono più grandi: è compito del corso di Macchine Elettriche fornire qualche valore più preciso di questi parametri. Per ora basta riassumere dicendo che, con riferimento al circuito di Figura 8.106, il generico parametro longitudinale di un trasformatore è più piccolo di quello trasversale.

**Esempio 13** - Il doppio bipolo mostrato in figura opera in regime sinusoidale. Determinare la sua rappresentazione in termini di impedenze.



Dati:  $L_1 = L_2 = 20 \text{ mH}$ ,  $M = 10 \text{ mH}$ ,  $R = 20$ ,  $\omega = 1 \text{ krad/s}$ .

La rappresentazione in termini di impedenze è formalmente definita per mezzo della trasformazione lineare di carattere generale

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \dot{Z}_{11}\bar{I}_1 + \dot{Z}_m\bar{I}_2, \\ \bar{V}_2 = \dot{Z}_m\bar{I}_1 + \dot{Z}_{22}\bar{I}_2, \end{cases}$$

che, nel caso in cui il doppio bipolo si riduca ad un accoppiamento mutuo, diventano

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_0, \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_0. \end{cases}$$

Nel caso in esame, alle due relazioni ora scritte va aggiunta quella che esprime la LKC al nodo  $A$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 + \frac{\bar{V}_2}{R}.$$

Eliminando da queste relazioni la corrente  $\bar{I}_0$ , si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 - j\omega M \frac{\bar{V}_2}{R}, \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 - j\omega L_2 \frac{\bar{V}_2}{R}, \end{cases}$$

che individua una rappresentazione implicita per il doppio bipolo in esame. Dalla seconda equazione, portando tutti i termini in  $\bar{V}_2$  al primo membro, discende pure che

$$\bar{V}_2 = \frac{j\omega MR}{R + j\omega L_2} \bar{I}_1 + \frac{j\omega L_2 R}{R + j\omega L_2} \bar{I}_2 ,$$

da cui, per confronto, si ricavano le due impedenze

$$\dot{Z}_m = \left[ \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} \right]_{\bar{I}_2=0} = \frac{j\omega MR}{R + j\omega L_2} = 5 + 5j , \quad \dot{Z}_{22} = \left[ \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \right]_{\bar{I}_1=0} = \frac{j\omega L_2 R}{R + j\omega L_2} = 10 + 10j .$$

Sostituendo la tensione  $\bar{V}_2$  appena trovata nella prima equazione, si ha pure

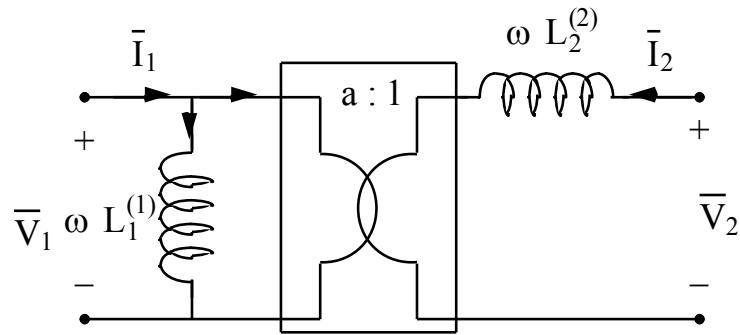
$$\dot{Z}_{11} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} = 2.5 + 17.5j .$$

Per controllare i calcoli sviluppati, lo studioso lettore può riottenere la matrice delle impedenze nella via più usuale, vale a dire adoperando le definizioni

$$\dot{Z}_{11} = \left[ \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \right]_{\bar{I}_2=0} , \quad \dot{Z}_m = \left[ \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} \right]_{\bar{I}_2=0} = \left[ \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} \right]_{\bar{I}_1=0} , \quad \dot{Z}_{22} = \left[ \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \right]_{\bar{I}_1=0} .$$

È evidente che dovrà ritrovare le stesse impedenze calcolate in precedenza.

Si discute, infine, in qualche dettaglio il caso in cui  $L_1^{(2)}$  viene scelto pari a zero. In questo caso, seguendo un ragionamento simile a quello appena sviluppato, non è difficile verificare che si può adoperare il circuito mostrato in Figura 8.107.

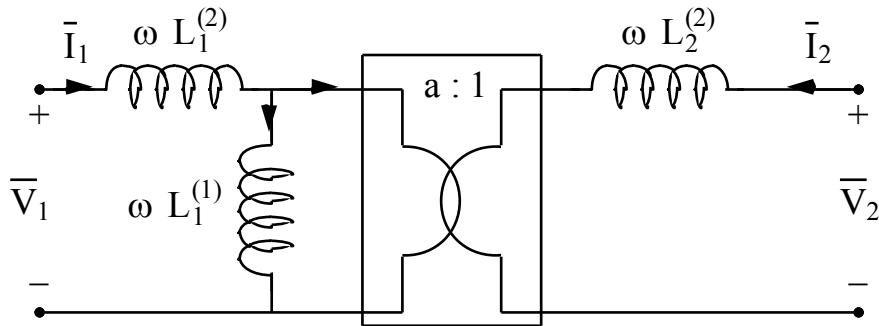


**Figura 8.107:** secondo circuito equivalente in accoppiamento non perfetto.

L'induttanza longitudinale è passata dalla porta primaria a quella secondaria. Inoltre, per quanto riguarda il valore di  $a$  si troverà che

$$a = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2^{(1)}}.$$

Nel caso generale, assumendo non nulli i quattro parametri, il doppio bipolo accoppiamento mutuo si può schematizzare per mezzo del circuito di Figura 8.108: si provi a verificarlo, ripetendo quanto appreso nei due precedenti casi.



**Figura 8.108:** terzo circuito equivalente in accoppiamento non perfetto.

In esso nessun parametro, longitudinale o trasversale che sia, è stato ritenuto nullo e si ha che

$$a=\frac{L_1^{(1)}}{M}=\frac{M}{L_2^{(1)}}\,.$$