

TRASMISSIONE DEL CALORE

Gli scambi di energia non associati al trasporto di massa, per quanto visto finora, avvengono in due modi: lavoro e calore. Abbiamo già ampiamente parlato dello scambio nel modo lavoro, cerchiamo ora di approfondire quello nel modo calore.

I meccanismi di trasmissione del calore sono considerati classicamente tre: la **conduzione**, la **convezione**, l'**irraggiamento**. Per iniziare, discutiamo preliminarmente i lineamenti di questi tre meccanismi, in una veloce panoramica generale. Essa è utile in quanto, come si vedrà nel seguito, nelle situazioni pratiche sovente un meccanismo è accoppiato ad un altro, che, per esempio, interviene nella definizione delle condizioni al contorno.

Conduzione

La conduzione del calore è un tipico fenomeno diffusivo, infatti il meccanismo fisico che ne è alla base è legato ai moti molecolari a livello microscopico. Questa modalità di trasmissione del calore è tipica dei corpi solidi, anzi, nei solidi essa rappresenta proprio il principale meccanismo di scambio (oltre a quello dell'irraggiamento, che interviene alle superfici di controllo del sistema). Naturalmente, come per ogni mezzo continuo, la conduzione è presente anche nei fluidi, nei quali il meccanismo di diffusione in prossimità di una parete, che delimita la estensione del sistema, è spesso modellato in modo tale da essere descritto come meccanismo di convezione.

Esiste una legge fondamentale che lega, nella sua formulazione più semplice e essenziale, il flusso di calore per conduzione al gradiente di temperatura,

$$\underline{\dot{J}}_q = -k \underline{\nabla} T$$

Legge di Fourier

che esprime la nota evidenza sperimentale che il flusso di calore ha la stessa direzione del gradiente di temperatura e verso opposto; essendo il coefficiente $k > 0$ (per il secondo principio della termodinamica), il calore si trasferisce, dunque, dalle regioni calde a quelle fredde. Il coefficiente k è detto coefficiente di scambio termico per conduzione o **conducibilità termica**, e rappresenta una proprietà della materia, per cui può essere espresso in funzioni di due sole variabili di stato intensive, per esempio $k = k(p, T)$. L'analogo coefficiente per i flussi diffusivi di quantità di moto è μ , che rappresenta anch'esso una proprietà della materia. Vale la pena di anticipare in questa sede che la cosiddetta termodinamica dei processi irreversibili, cioè, per usare un linguaggio spesso impiegato nelle precedenti parti del corso, la termodinamica che si occupa di seguire l'evoluzione dei sistemi nel tempo (che rappresenta, come abbiamo già visto, la estensione della termodinamica degli stati di equilibrio classico), fornisce una teoria unificante per la espressione dei flussi diffusivi di tutte le grandezze estensive, per sistemi continui semplici e complessi.

Irraggiamento

In questo meccanismo l'energia è trasferita attraverso la propagazione di onde elettromagnetiche.

Le onde elettromagnetiche sono in genere classificate, oltre che per la fonte (sorgente) dalla quale sono emesse, anche e soprattutto per la banda di lunghezze d'onda che le caratterizza (ad es., ultravioletto, visibile, infrarosso, ecc...).

Ogni corpo (nella pratica, la superficie di esso) emette onde elettromagnetiche, diverse per intensità a seconda della temperatura alla quale la superficie del corpo si trova. La maggior parte dell'energia che fluisce attraverso le onde è concentrata in una banda di lunghezze d'onda, detta **banda di radiazione termica** (all'incirca $10^{-1} \div 10^2 \mu m$).

La legge che fornisce la quantità di energia per unità di tempo emessa da una superficie che è mantenuta ad una certa temperatura è la **legge di Planck**, che esprime il flusso di energia in termini scalari (non ha senso esprimere il flusso in termini vettoriali poiché in linea di principio un corpo

emette radiazioni in tutte le direzioni). Per motivi storici non usiamo il simbolo usuale \dot{Q} ma il simbolo E , che ha le dimensioni di un flusso di energia (per unità di lunghezza d'onda, come vedremo tra breve)

$$[E] = \left[\frac{\text{Energia}}{\text{Sup} \cdot \text{Tempo} \cdot \text{Lunghezza d'onda}} \right]$$

E è detto **potere emissivo di una sorgente**.

La legge di Planck è

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad \text{Potere emissivo del corpo nero}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti universali che hanno quindi lo stesso valore per ogni corpo, T è la temperatura assoluta della superficie che emette onde e λ è la lunghezza d'onda alla quale viene emessa la radiazione.

Il potere emissivo così definito è detto **monocromatico**, o anche spettrale.

Si noti esplicitamente che il potere emissivo espresso dalla legge di Planck è intrinsecamente integrato in tutte le direzioni nell'emisfero di angolo solido esterno alla superficie emittente. In talune applicazioni può essere importante valutare l'emissione relativa a un insieme di direzioni limitato

Dalla legge di Planck si nota che il potere emissivo monocromatico dipende dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura del corpo. In realtà E_λ dipende anche dalle caratteristiche fisiche della superficie del corpo che emette radiazioni, cioè in pratica dal materiale e dal suo stato superficiale (ad es., lucido o scabro). Il potere emissivo fornito dalla legge di Planck è quello emesso da un corpo ideale, avente caratteristiche superficiali tali da massimizzare la quantità di energia trasferibile per irraggiamento ad una fissata temperatura T , **il corpo nero**. Il potere emissivo ottenuto dalla legge di Planck sarà indicato quindi con $E_{n\lambda}$, per evidenziare che si riferisce a quello emesso da un corpo nero.

In sintesi, quindi, in simboli, per una superficie reale vale

$$E_\lambda = E_\lambda(T, \text{superficie})$$

mentre per il corpo nero

$$E_{n\lambda} = E_{n\lambda}(T)$$

con $E_{n\lambda} \geq E_\lambda$, quali che siano la temperatura e la lunghezza d'onda.

Poiché il maggiore interesse è concentrato sul potere emissivo totale, si può dare l'andamento qualitativo del potere emissivo monocromatico con λ a temperatura fissata (fig. 20).

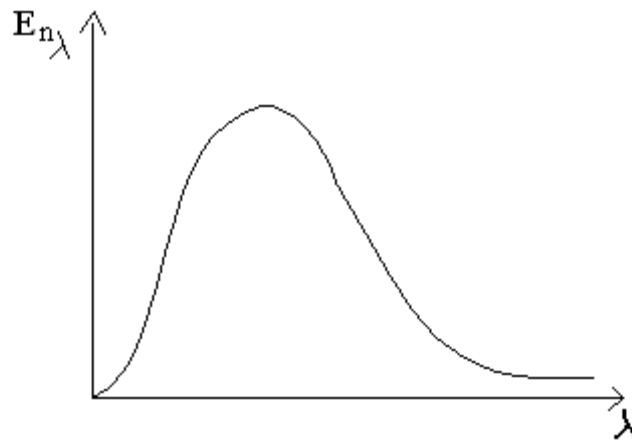


Figura 20

Il potere emissivo totale del corpo nero è

$$E_n = \int_0^{+\infty} E_{n\lambda} d\lambda$$

cioè l'area sottesa alla curva di figura 20. L'espressione finale dell'integrale è dato dalla **formula di Stefan – Boltzmann**

$$E_n = \sigma T^4$$

che in questi termini è valida per trasferimento di energia nel vuoto.

Il potere emissivo totale del corpo nero è, perciò, proporzionale alla quarta potenza della temperatura, σ è detta **costante di Stefan – Boltzmann**, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W / (m^2 K^4)$.

Convezione

La convezione è il meccanismo di scambio termico tra un corpo e una corrente fluida che lambisce la sua superficie. Per semplicità consideriamo una lastra piana su cui scorre un fluido.

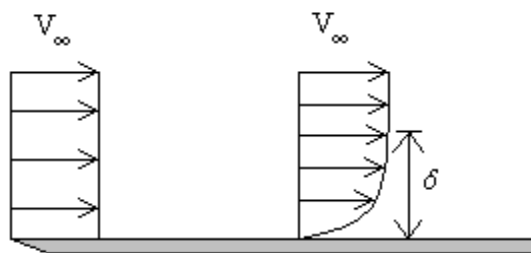


Figura 21

La lastra rappresenta un disturbo per la corrente, sia nei confronti della diffusione della quantità di moto che nei confronti di quella dell'energia. Da una preliminare analisi fisica del problema appare chiaro che lo scambio di energia tra fluido e parete dipende dalla differenza di temperatura tra quella indisturbata del fluido T_{∞} e quella della superficie, nonché dal campo di moto (dipendente da V_{∞}) che si instaura sulla parete, e quindi dalla struttura dello strato limite e dalle caratteristiche del

fluido (coefficiente di viscosità, coefficiente di conducibilità termica, ecc...) Il meccanismo di scambio è dunque alquanto complesso e in linea di principio la sua determinazione coinvolge la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Allo scopo di ricondurre il problema ad un approccio sintetico e ingegneristico appare conveniente esprimere il flusso termico incognito come

$$\dot{q} = h(T_p - T_\infty)$$

dove T_p è la temperatura di parete, T_∞ la temperatura statica della corrente, h **il coefficiente di scambio termico per convezione**. In realtà la relazione sopra scritta non è altro che un modo per spostare l'incognita sul coefficiente h , il quale è a sua volta funzione del campo di moto e quindi dalla geometria del corpo immerso nella corrente fluida. Praticamente, scrivendo quest'espressione per \dot{q} abbiamo solo introdotto una legge di proporzionalità tra energia scambiata e differenza di temperatura, spostando tutte le altre dipendenze, tra le quali quella fondamentale dal campo di moto, nel coefficiente h . La convenienza è apprezzata attraverso l'analisi dimensionale perché verificheremo che il coefficiente h , opportunamente adimensionalizzato, può essere posto in relazione con altri parametri dimensionali caratterizzanti il campo di moto (quale, ad esempio, il numero di Reynolds). Utilizzando, quindi, il concetto della similitudine fluidodinamica, è possibile pervenire a relazioni tra parametri adimensionali che sono di validità "universale" e che perciò, sotto certe condizioni, possono essere determinate una volta per tutte.

Vedremo che il parametro adimensionale che caratterizza lo scambio termico è il **numero di Nusselt**

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

in cui il coefficiente k è la conducibilità termica del fluido (attenzione, non confondere il numero di Nusselt con il numero di Biot). Dall'esame delle equazioni di Navier-Stokes (o dello strato limite) si può pervenire al risultato che il numero di Nusselt è funzione del numero di Reynolds

$$Nu = f(Re) \quad \text{con } Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

e di altri parametri dimensionali, quale il numero di Prandtl.

Da un punto di vista pratico, noto il numero di Reynolds della corrente che lambisce la superficie, dalla relazione "universale" si può ricavare il numero di Nusselt e da qui il coefficiente h .

Analizziamo ora uno per uno, in modo più approfondito, i meccanismi di scambio appena visti.

- **CONDUZIONE**

Per studiare la conduzione prendiamo in considerazione l'equazione del bilancio dell'energia interna in forma differenziale, nella sua formulazione in termini della derivata sostanziale, in cui compaiono esplicitamente solo i flussi di tipo diffusivo. Supponendo poi, in questo contesto, di considerare un mezzo solido (per cui si trascura il termine convettivo e la produzione legata alla funzione dissipativa), l'equazione sopra menzionata si scrive

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_u = \dot{u}^+$$

Per un solido $c_v = c_p = c \Rightarrow du = c dT$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_u = \dot{u}^+$$

Questa è una equazione del bilancio in formulazione locale, cioè formalmente scritta per un intorno infinitesimo di un punto. Il primo termine è la variazione nel tempo dell'energia interna, il secondo è il termine di scambio per flusso diffusivo, il terzo è la produzione di energia interna. Il termine \dot{u}^+ è stato portato in conto per l'eventuale presenza di produzioni dovute all'effetto Joule, e ha le dimensioni di energia per unità di volume e tempo.

L'equazione del bilancio, considerando la legge di Fourier, si scrive

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (-k \underline{\nabla} T) = \dot{u}^+$$

Il coefficiente di conducibilità termica k in generale non è costante, essendo una proprietà della materia, e in condizioni di equilibrio termodinamico, è funzione di due grandezze termodinamiche. In pratica si può però considerare funzione della sola temperatura $k = k(T)$. Senza commettere errori molto gravi, per variazioni relativamente limitate di Temperatura previste nel corso della fenomenologia, si può però considerare k costante; ciò significa che, in punti diversi a diversa temperatura, avremo la stessa conducibilità termica. Con questa ipotesi, l'equazione del bilancio diventa

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \dot{u}^+$$

dove $\nabla^2 T$ è l'operatore "laplaciano" che, in un sistema ortogonale cartesiano, è la somma delle tre derivate spaziali seconde della temperatura rispetto alle tre direzioni x , y e z . In altri sistemi di coordinate, l'espressione formale dell'operatore laplaciano è diversa.

L'equazione del bilancio così scritta, è un'equazione alle derivate parziali per la temperatura. Facendo opportune semplificazioni si possono studiare **casi particolari** di interesse notevole.

1.

- Stazionarietà;
- Assenza di produzioni.

L'equazione diventa

$$\nabla^2 T = 0$$

che è l'equazione di Laplace.

2.

- Stazionarietà;
- Presenza di produzioni.

Nell'equazione compare il termine di generazione

$$k\nabla^2 T = -\dot{u}^+$$

che è l'equazione di Poisson. In questo caso la produzione è un termine noto.

3.

- Instazionarietà;
- Assenza di produzioni.

L'equazione diventa

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

che è detta **equazione di Fourier**, equazione alle derivate parziali di tipo parabolico.

Vediamo ora nel caso generale come di può impostare il problema completo con le *condizioni al contorno*. L'equazione del bilancio nel caso generale è

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \dot{u}^+$$

da risolvere in un determinato dominio spaziale.

Si può operare in tre modi

- I. Assegnare una distribuzione di temperatura sul contorno (problema di Dirichlet);
- II. Assegnare una distribuzione di flusso sul contorno (problema di Neumann);
- III. Assegnare lo scambio termico superficiale in presenza di ambiente fluido esterno a temperatura nota (condizione convettiva che conduce a un problema di Robin con condizione al contorno del tipo misto).

Il tipo di condizioni da assegnare non è dettato da nessuna legge, ma dalla convenienza rispetto al problema fisico in esame; in pratica l'assegnazione del tipo di condizioni dipende da ciò che è noto a priori e dal tipo di modello impiegato. Naturalmente non bisogna perdere di vista l'analisi matematica, poiché problemi di esistenza e di unicità della soluzione possono porre limitazioni alle condizioni al contorno da imporre per determinati tipi di equazioni.

Esempio di assegnazione di condizioni al contorno per l'equazione di Fourier

Supponiamo di voler studiare il campo di temperature instazionario che si instaura quando si pone una lastra inizialmente fredda in un fluido ambiente più caldo, in un istante iniziale in cui (necessariamente) la distribuzione di temperatura è una funzione nota dello spazio (condizione iniziale).

L'equazione di Fourier è

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

da risolvere con le condizioni iniziali

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z)$$

e le condizioni al contorno, che ci dicono, in ogni istante $t > t_0$, cosa succede sul bordo del nostro dominio d'integrazione, nella fattispecie rappresentato dal bordo della lastra. In un problema di questo tipo, risulta difficile da un punto di vista fisico, pensare di assegnare una condizione alla Dirichlet, cioè imporre la distribuzione della temperatura sul bordo della lastra al variare del tempo. Facendo mente locale alla legge di scambio termico per convezione, ciò equivarrebbe a considerare un coefficiente di scambio termico convettivo infinito (che mantiene un flusso di calore finito con una differenza di temperatura nulla). Risulta più fisico imporre, invece, una condizione alla Neumann sulla derivata normale della temperatura sul bordo, imporre cioè una **condizione sul flusso termico** (che, come vedremo, può anche essere del tipo misto).

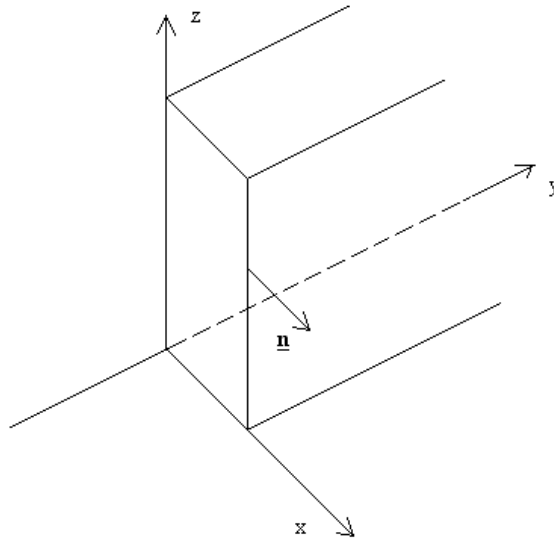


Figura 22

Supponiamo per esempio, inizialmente, che una faccia sia adiabatica, lo scambio di calore attraverso la superficie in questione sarà quindi nullo.

Poiché il flusso è $-k\nabla T$, lo scambio attraverso la superficie piana di versore normale \underline{n} sarà

$$-k\nabla T \cdot \underline{n} = 0$$

se L è lo spessore della lastra lungo x e il versore normale è parallelo all'asse x , risulta

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

Abbiamo così assegnato una condizione sul flusso termico per mezzo di una derivata spaziale.

Più in generale, noto il flusso termico \dot{q} , la condizione da assegnare è

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \dot{q}$$

che rappresenta la condizione di Neumann nel caso generale.

In presenza di un fluido ambiente che lambisce una superficie del solido, in assenza di generazioni superficiali, il calore ceduto per conduzione dalla lastra è pari a quello assorbito per convezione dal fluido, e la suddetta condizione può quindi essere posta anche nella forma

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T_p - T_{fl}); \quad h = \text{cost}$$

dove T_{fl} è la temperatura del fluido che lambisce la parete e $T_p = T_{x=L}$ è la temperatura della parete. Quest'ultima condizione, detta di tipo misto, può essere scritta anche nel seguente modo

$$hT_p + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = hT_{fl}$$

che rende evidente la relazione lineare imposta tra temperatura e gradiente di temperatura alla parete. Naturalmente, qui si è assunto per semplicità che il coefficiente di scambio termico convettivo è costante e noto. In situazioni complesse h può essere a sua volta funzione della temperatura superficiale, che è una incognita. Ancora, in problemi ben più complessi dove lo scambio termico per conduzione è considerato accoppiato a quello di convezione nel fluido esterno al solido, h è funzione a sua volta del campo di moto. Altrimenti, a diversi livelli di approssimazione, h è considerato noto nel senso che può essere stimato a priori da relazioni disponibili in letteratura.

Generalizzando, la condizione al contorno può essere sempre scritta come combinazione lineare della funzione incognita (T nel nostro caso) e della sua derivata spaziale in direzione normale al bordo L

$$aT_L + b \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_L = c$$

distinguendo poi i vari casi a seconda del valore delle tre costanti a , b e c .

CONDUZIONE STAZIONARIA

Studiamo ora la conduzione stazionaria senza generazioni. Distinguiamo i vari casi.

Caso unidimensionale piano

Utilizziamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale su una lastra. In realtà ogni sistema fisico ha geometria tridimensionale. Tuttavia, si può dire che, se due dimensioni sono prevalenti rispetto alla terza, trascurando gli effetti di bordo, i gradienti sono significativi solo lungo quest'ultima, che rappresenta la direzione lungo lo spessore.

Nelle ipotesi fatte, il bilancio di energia si riduce all'equazione di Laplace 1D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

equazione differenziale del secondo ordine la cui soluzione è

$$T(x) = c_1 x + c_2$$

Le costanti c_1 e c_2 vanno determinate dalle condizioni al contorno. Supponiamo di assegnare le due temperature, per $x=0$ e per $x=L$

$$T(0) = T_1; \quad T(L) = T_2.$$

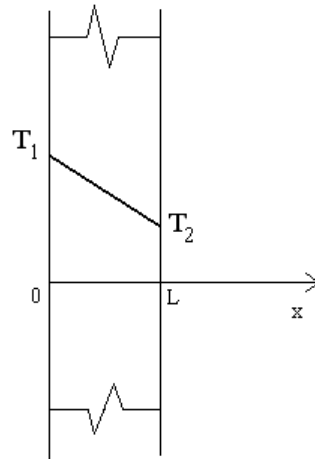


Figura 23

L'andamento della temperatura è lineare e il valore delle due costanti è così determinato

$$\begin{cases} c_2 = T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 = c_1 L + T_1 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$$

Si ottiene

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Poiché l'andamento delle temperature è lineare, il flusso termico è costante, cioè indipendente dall'ascissa x

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) = \frac{k}{L} (T_1 - T_2)$$

Si nota che $\dot{q} > 0 \Leftrightarrow T_1 > T_2$, cioè nel nostro caso il flusso di calore è concorde col verso dell'asse x . Per il calcolo della potenza termica scambiata, basta moltiplicare il flusso per l'area della superficie di scambio

$$\dot{Q} = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2)$$

Si definisce **conduttanza termica** la quantità $K = \frac{kA}{L}$, che dipende dalla natura del materiale e dalla geometria. L'espressione del calore scambiato per unità di tempo diventa

$$\dot{Q} = K \Delta T$$

La conduttanza termica viene introdotta per sviluppare una analogia con la legge di Ohm; infatti, se la causa che può generare una corrente elettrica di intensità I è la differenza di potenziale ΔV , quella che può generare un flusso di calore è una differenza di temperatura ΔT .

Si definisce **resistenza termica** la quantità $R = 1/K$. In analogia con la legge di Ohm $\Delta V = RI$, si ha

$$\Delta T = R\dot{Q}$$

ovvero

$$\dot{Q} = K\Delta T$$

Problema a simmetria cilindrica

Si consideri un corpo cilindrico cavo, con raggi r_1 e r_2 assegnati (figura 24).

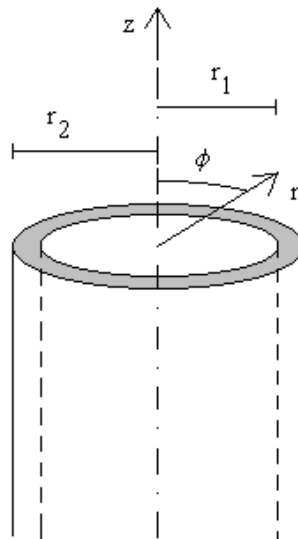


Figura 24

Studiamo il problema in coordinate cilindriche (r, ϕ, z) , secondo le quali, la posizione di un punto è univocamente determinata nel momento in cui si conoscono distanza dall'asse r , angolo azimutale ϕ e quota z . Si suppone che nulla dipenda da z , ovvero il cilindro è considerato molto lungo rispetto allo spessore del cilindro in modo da trascurare gli effetti di bordo. Se le condizioni iniziali non dipendono da ϕ , nemmeno la soluzione dipenderà da ϕ , e il problema sarà quindi considerato **assialsimmetrico**.

Assegniamo le condizioni al contorno sulle superfici di equazione $r = r_1$ e $r = r_2$.

$$\begin{cases} T(r_1) = T_1 \\ T(r_2) = T_2 \end{cases}$$

L'equazione da integrare, analogamente al caso cartesiano ortogonale della lastra, è l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

che, nel nostro sistema di riferimento si esplicita come

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

da cui

$$\left(r \frac{dT}{dr} \right) = c$$

dove c è una costante dipendente dalle condizioni al contorno.

Quello scritto è ovviamente il solo contributo all'operatore laplaciano lungo la direzione radiale, l'espressione completa essendo come è noto

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Lo studente ricordi che l'operatore laplaciano è sempre definito come la divergenza del gradiente, ma l'operatore divergenza di un vettore, e la espressione formale del gradiente di uno scalare sono diversi nei differenti sistemi di coordinate, ortogonale, cilindrico, sferico.

Ad esempio, la divergenza di un vettore di componenti U , V , W nel sistema di coordinate cilindriche è

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

e il gradiente di una qualunque funzione scalare è

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Nel caso in esame è agevole verificare che la distribuzione di temperatura ha un andamento logaritmico, mentre il flusso non è costante attraverso ogni superficie cilindrica concentrica di raggio generico r . Infatti, si noti subito che

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c}{r}$$

da cui scaturisce immediatamente la legge di dipendenza del flusso,

$$\dot{q} = -k \frac{c}{r}$$

Integrando l'equazione differenziale con le due condizioni al contorno alla Dirichlet sopra indicate, si ottiene

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}$$

dove evidentemente la costante di integrazione c risulta essere

$$c = -\frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

La potenza termica scambiata sarà

$$\dot{Q} = \dot{q}A = K\Delta T \quad \text{con} \quad \boxed{K = \frac{k2\pi r_m H}{r_2 - r_1}}$$

e $r_m = \frac{r_2 - r_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$ è il **raggio medio** logaritmico del cilindro, e H ne rappresenta l'altezza. Anche in

tale geometria, dunque, siamo stati in grado di introdurre la conduttanza termica che, si noti, è sempre considerata come il prodotto del coefficiente di conducibilità termica k e una superficie di scambio, fratto uno spessore. La superficie di scambio è quella del cilindro valutata al raggio medio logaritmico, mentre lo spessore è ovviamente $r_2 - r_1$.

I concetti di conduttanza e resistenza, utili perché K e R sono già noti per la maggior parte delle geometrie più semplici, sono utili anche per un altro motivo: spesso sistemi semplici possono essere messi in serie o in parallelo da un punto di vista termico, in completa analogia con quello che succede nell'elettrotecnica per i circuiti elettrici.

SISTEMI TERMICI IN SERIE E IN PARALLELO

Un sistema termico è costituito da più corpi **in serie** se la differenza di temperatura esterna è tale da provocare lo stesso flusso termico in ogni lastra. La differenza di temperatura ai capi di ogni lastra sarà diversa.

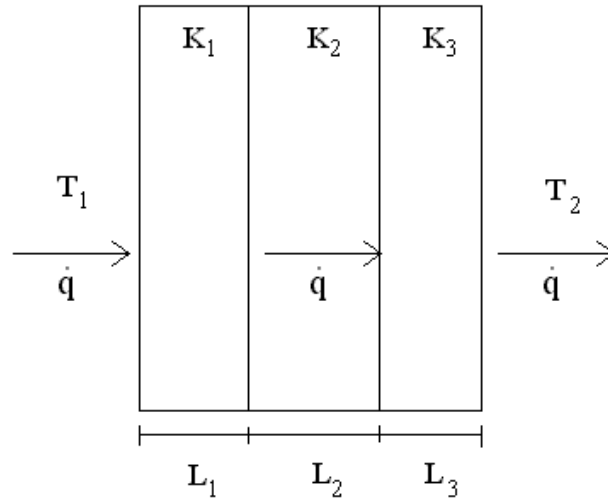


Figura 25

Un sistema termico è invece costituito da più corpi **in parallelo** se la differenza di temperatura esterna è la stessa per ogni singola lastra mentre i flussi termici sono tali che la loro somma dà il flusso termico totale.

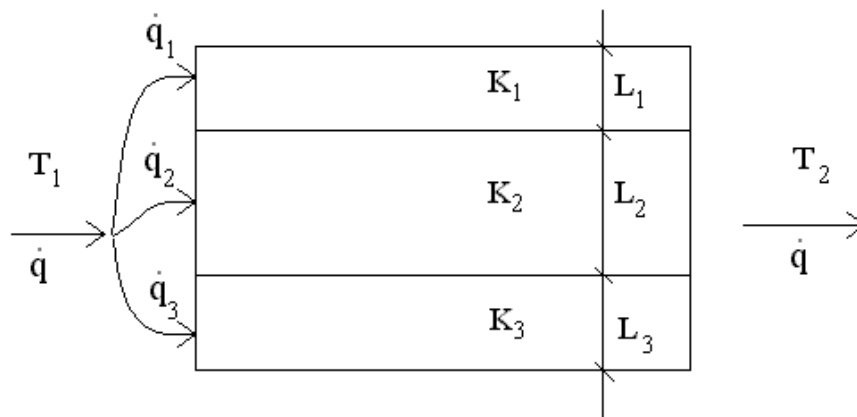


Figura 26

Nel caso di una serie di lastre di materiale diverso (fig. 25) e spessori differenti, con le stesse aree di scambio, $K = \frac{kA}{L}$ differisce a seconda del materiale e dello spessore. In piena analogia con l'elettrotecnica, per la serie

$$R_{TOT} = \sum_{i=1}^n R_i$$

ed essendo

$$\dot{Q} = K_{TOT} \Delta T$$

si ha

$$K_{TOT} = \frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i A}} \quad \text{SERIE}$$

Una volta calcolata la potenza termica, è agevole calcolare le temperature alle interfacce delle lastre applicando la formula della potenza termica ad ogni singola lastra, dove evidentemente la incognita stavolta è il ΔT_i agli estremi della lastra i -ma. A partire da un bordo, in cascata, si calcolano tutte le temperature intermedie.

Per il parallelo (fig. 26) vale invece

$$K_{TOT} = \sum_{i=1}^n K_i \quad \text{PARALLELO}$$

infatti, per la lastra generica i -ma vale

$$\dot{Q}_i = K_i \Delta T$$

sommando su tutte le i , mettendo in evidenza ΔT , ed essendo $\dot{Q} = \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i$, avremo

$$\dot{Q} = K_{TOT} \Delta T$$

e quindi l'asserto.

E' interessante esaminare il caso di lastre in serie termica quando una delle due condizioni al contorno estremali, ad esempio, per fissare le idee, quella al contorno destro dove in precedenza si è assunto $T=T_2$, è del tipo misto, cioè $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p = h(T_p - T_2)$, dove T_2 rappresenta la temperatura

dell'ambiente fluido a contatto con la lastra estrema. Moltiplicati primo e secondo membro della relazione al contorno per l'area di scambio A , è evidente che la quantità hA ha il significato di conduttanza esterna convettiva che permette il passaggio della potenza termica dalla lastra verso il fluido, in presenza della differenza di temperatura $T_p - T_2$. Ed è altrettanto evidente che nel caso in cui si attribuisce la T_2 direttamente alla faccia esterna della lastra estrema, dovendo il flusso di calore uscente comunque essere finito, ciò corrisponde ad un coefficiente di scambio h infinito (conduttanza infinita) che permette il passaggio di potenza termica finita verso il fluido in presenza di una differenza di temperatura nulla tra lastra estrema e fluido. La condizione al contorno alla Dirichlet, dunque, equivale al caso poco realisticamente fisico, di conduttanza infinita.

Di conseguenza, a parità di ogni altra condizione, la potenza termica scambiata nel caso di lastre in serie termica con la condizione al contorno estrema di tipo misto, risulta essere

$$\dot{Q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i A} + \frac{1}{hA}} (T_1 - T_2)$$

che è evidentemente minore del valore stimato per condizione al contorno alla Dirichlet in cui $h \rightarrow \infty$. Si vedrà nel paragrafo successivo, che una volta introdotto il numero di Biot adimensionale, quest'ultima circostanza corrisponde al caso di $Bi \rightarrow \infty$ (ovvero, lastra termicamente spessa).

CONDUZIONE NON STAZIONARIA

Esaminiamo adesso un semplice caso di conduzione in stazionaria senza generazione. Supponiamo di avere una lastra a temperatura iniziale $T_0(x)$ relativamente elevata e di immergerla in un fluido (non necessariamente in quiete) a temperatura T_∞ più bassa. Ci si propone di studiare l'andamento della temperatura (nello spazio e nel tempo) durante il raffreddamento, la funzione incognita essendo $T = T(x, t)$. Ovviamente, lo studio relativo al caso di riscaldamento è perfettamente duale.

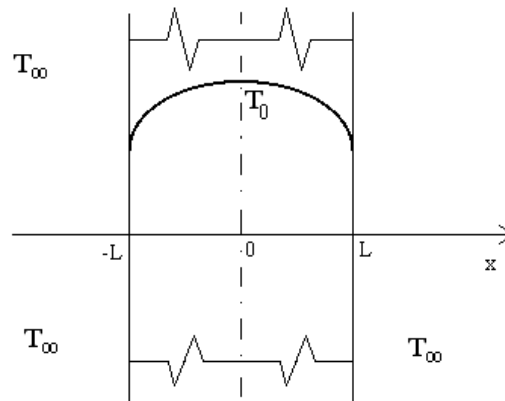


Figura 27

L'equazione da utilizzare per studiare il fenomeno è l'equazione di Fourier

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

che si può scrivere, ponendo $\alpha = \frac{k}{\rho c}$, nella seguente forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ è una quantità detta **diffusività termica** ed ha le stesse dimensioni del coefficiente di viscosità cinematica

$$[v] = [\alpha] = \frac{L^2}{T}$$

cioè quelle di una velocità per una lunghezza. La diffusività termica regola gli scambi di energia come il coefficiente di viscosità cinematica regola gli scambi di quantità di moto.

Si osservi preliminarmente che la fenomenologia in esame mostra una evidente simmetria assiale, per cui ci si può limitare a studiare il semi-spessore sostituendo ad una condizione al contorno estrema la condizione al contorno di simmetria in mezzzeria.

Vediamo ora di formalizzare le condizioni iniziali e al contorno. Per semplicità supponiamo che la temperatura iniziale sia una distribuzione costante attraverso lo spessore.

$$\begin{aligned}
 &\text{➤ Condizione iniziale} && T(x, t_0) = T_i = \text{cost} \\
 &\text{➤ Condizioni al contorno} && \begin{cases} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ h(T_L - T_\infty) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La prima condizione al contorno (alla Neumann) esprime la simmetria geometrica e fisica. In pratica essa costituisce anche la condizione di adiabaticità del piano di mezzeria. Possiamo quindi studiare il fenomeno prendendo in considerazione solo la metà della lastra, cioè solo le stazioni x tali che $x \in [0; L]$.

La seconda condizione al contorno (alla Robin) esprime la continuità tra il flusso termico per conduzione nella lastra a $x=L$ e quello per convezione, nel mezzo fluido, nella zona immediatamente prossima alla superficie della lastra.

Semplici considerazioni fisiche ci permettono di anticipare l'andamento atteso delle temperature T , come schematizzato in figura 28. In particolare, si noti come gli strati più esterni, più vicini alla superficie di separazione solido – fluido si raffredderanno prima rispetto a quelli più prossimi alla mezzeria.

Allo scopo di ottenere la soluzione in forma compatta, adimensionalizziamo l'equazione

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

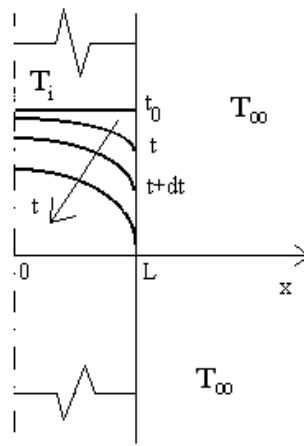


Figura 28

Per la temperatura, oltre ad una adimensionalizzazione, procediamo ad una normalizzazione, cioè scaliamo dapprima la temperatura stessa rispetto ad un valore di riferimento, e poi adimensionalizziamo rispetto ad un ΔT significativo. E' conveniente porre:

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

avendo scelto come riferimento la temperatura del fluido circostante T_∞ .

Prendendo come riferimento per le lunghezze il semispessore della lastra L si ha

$$x^* = \frac{x}{L}$$

Per il momento non abbiamo elementi per definire il tempo di riferimento; esso sarà determinato discutendo il processo di adimensionalizzazione. Formalmente

$$t^* = \frac{t}{t_r}$$

Procedendo con l'adimensionalizzazione si ha

$$\frac{1}{t_r} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\alpha}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

e dividendo tutto per il termine $\frac{\alpha}{L^2}$

$$\frac{L^2}{\alpha t_r} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

Se le grandezze di riferimento sono state scelte in modo opportuno, i termini adimensionali saranno di ordine uno. Poiché in questo caso l'equazione di bilancio è costituita da soli due termini, l'instazionarietà e la diffusione, essi devono essere globalmente dello stesso ordine di grandezza, per cui deve essere anche necessariamente

$$\frac{\alpha t_r}{L^2} = O(1) \Rightarrow t_r = \frac{L^2}{\alpha}$$

Da un punto di vista fisico, $\frac{\alpha}{L}$ è la velocità di perturbazione e t_r è il tempo affinché una perturbazione impressa su una faccia si senta ad una distanza L .
L'equazione adimensionalizzata è dunque

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \quad (\text{a})$$

Si osservi che il tempo adimensionalizzato $t^* = t/t_r$ prende il nome di numero di Fourier, cioè

$$\boxed{Fo = \frac{\alpha t}{L^2}} \quad \text{NUMERO DI FOURIER}$$

Procediamo ora con l'adimensionalizzazione delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno.
Per la condizione iniziale

$$T(x, t_0) = T_i \Rightarrow T^*(x, t_0) = \frac{T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1$$

$$T^*(x, t_0) = 1 \quad (\text{b})$$

Per la prima condizione al contorno è immediato verificare che

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (\text{c})$$

Per la seconda condizione

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T_L - T_\infty) \Rightarrow -k \left. \frac{\partial (T - T_\infty)}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T_L - T_\infty)$$

essendo $T_\infty = \text{cost}$. Dividendo tutto per $(T_i - T_\infty)$ e considerando che $x = L$ equivale a porre $x^* = 1$, si ottiene

$$-\frac{k}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = h T^* \Big|_{x^*=1}$$

Definiamo ora il rapporto adimensionale

$$\boxed{Bi = \frac{hL}{k}} \quad \text{NUMERO DI BIOT}$$

La seconda condizione al contorno in forma adimensionale diventa quindi

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \cdot T^* \Big|_{x^*=1} \quad (\text{d})$$

In sintesi, occorre risolvere l'equazione (a) con la condizione iniziale (b) e le condizioni al contorno (c), (d). Ciò costituisce un classico problema della fisica matematica che può essere risolto con il metodo della separazione delle variabili. In sostanza la funzione incognita $T(x, t)$ può essere posta come il prodotto di una funzione della sola variabile spaziale e un'altra funzione della sola variabile temporale. Nei limiti del presente corso non entreremo nel dettaglio di questa tecnica che conduce a risolvere un problema agli autovalori spaziali e al risultato che gli andamenti spaziali della temperatura sono rappresentati da una combinazione di funzioni coseno, mentre l'andamento temporale è del tipo esponenziale. Tali andamenti sono stati rappresentati qualitativamente in figura 28. La risoluzione del differenziale (parabolico) di valori iniziale e al contorno può anche essere effettuata per via numerica, cioè discretizzando opportunamente gli operatori differenziali.

Nel caso in cui risulta $Bi \ll 1$, e ciò si può avere per esempio quando L è molto piccolo rispetto a $\frac{k}{h}$ (condizione di lastra termicamente sottile), la seconda condizione al contorno diventa

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} \approx 0$$

Si osservi che il gradiente di temperatura alla stazione estrema è il più grande in valore assoluto, quindi la condizione di gradiente nullo sopra riportata è a maggior ragione attesa nell'interno della lastra (ed è esatta nel piano di mezzera). Ciò non vuol dire che per $Bi \ll 1$ non c'è flusso di calore per conduzione, ma che la conduttanza interna alla lastra è talmente grande da poter mantenere un flusso di calore finito all'interno della lastra con un gradiente di temperatura praticamente nullo. In altri termini, durante il raffreddamento la temperatura della lastra può essere considerata con ottima approssimazione ad ogni istante di tempo uniforme nello spazio. Si osservi anche che il numero di Biot può essere anche interpretato come il rapporto di due conduttanze, quella conduttiva interna alla lastra, e quella convettiva nel fluido esterno:

$$Bi = \frac{h}{k/L}$$

Allora, riprendendo le considerazioni fatte nel paragrafo precedente circa il significato fisico della condizione al contorno di Dirichlet imposta su un bordo, appare chiaro che quest'ultima corrisponde al caso di $Bi \rightarrow \infty$, essendo stavolta la conduttanza esterna infinitamente più grande di quella interna e tale da mantenere un flusso di calore esterno finito mediante una differenza di temperatura $T_p - T_\infty = 0$.

Quindi, allorché $Bi \ll 1$, si può dire che la temperatura è funzione solo del tempo e non della coordinata spaziale x . Le considerazioni fatte però sembrano non essere congruenti con l'equazione di Fourier adimensionalizzata

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

infatti, per quanto detto, dovrebbe essere $\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = 0$. Questa incongruenza deriva dal fatto che per studiare problemi di questo tipo si deve prendere in considerazione la formulazione globale del bilancio dell'energia e non quella locale.

Allo scopo di scrivere l'equazione di bilancio globale della energia interna, se A è la superficie di scambio, la variazione di energia nel tempo è data da

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = \rho c \frac{d}{dt} \int_0^L AT dx$$

essendo $e = u = cT$. Nell'ipotesi di $Bi \ll 1$, T non dipende da x , quindi

$$\rho c \frac{d}{dt} \int_0^L AT dx = \rho c AL \frac{dT}{dt}$$

Nelle ipotesi fatte la potenza termica scambiata è $-hA(T - T_\infty)$, col segno meno perché se il flusso è uscente la derivata temporale è negativa

$$\rho c A L \frac{dT}{dt} = -hA(T - T_\infty)$$

cioè

$$\rho c L \frac{dT}{dt} = -h(T - T_\infty).$$

Adimensionalizziamo ora questa nuova equazione. Si ha

$$\rho c L \frac{d}{dt} \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) = -h \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)$$

cioè

$$\rho c L \frac{\alpha}{L^2} \frac{dT^*}{dt^*} = -hT^*$$

essendo $t_r = \frac{L^2}{\alpha}$. In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{dT^*}{dt^*} = -\frac{hL}{\rho c \alpha} T^*$$

che integrata dà

$$T^* = C e^{-\frac{hL}{\rho c \alpha} t^*}$$

la costante C si trova applicando la condizione iniziale $T^*(x, t_0) = 1 \Rightarrow C = 1$. Osservando che la costante di tempo è proprio il numero di Biot, si ha infine

$$\boxed{T^* = e^{-Bi t^*}}$$

che è l'espressione della temperatura adimensionale rispetto al tempo nel caso in cui $Bi \ll 1$. Quanto più grande è il valore della costante di tempo, tanto più rapidamente tenderà a zero il valore della temperatura adimensionale T^* .

In termini dimensionali

$$\boxed{T = T_\infty + (T_i - T_\infty) e^{-\frac{h}{\rho c L} t}}$$

Si vede bene da questa espressione che più è piccolo lo spessore L , più sarà grande il termine $\frac{h}{\rho c L}$, e quindi più rapidamente T tenderà a T_∞ .

- **IRRAGGIAMENTO**

Abbiamo già anticipato che questo meccanismo di scambio termico è legato alla capacità delle onde elettromagnetiche di trasportare energia. Ogni corpo (in pratica ogni superficie) che si trovi a temperatura assoluta T è sorgente di onde elettromagnetiche. Il fenomeno dell'irraggiamento è importante nell'intervallo di lunghezze d'onda comprese tra 0.1 e 100 μ m.

Abbiamo già introdotto la legge di Planck

$$E_{n\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)}$$

che esprime il potere emissivo monocromatico del corpo nero in funzione della sua temperatura. La sorgente è considerata emisferica.

La lunghezza d'onda alla quale si ha il massimo potere emissivo monocromatico è data dalla **legge di Wien**, che si scrive

$$\lambda_{\max} T = c_3$$

Il valore di λ_{\max} diminuisce all'aumentare della temperatura T della sorgente.

Per una sorgente nera, l'energia emessa si ottiene integrando la legge di Planck su tutte le lunghezze d'onda, ottenendo così il **potere emissivo totale** E_n

$$E_n = \int_0^{+\infty} E_{n\lambda} d\lambda$$

funzione della sola temperatura.

Il risultato dell'integrale è dato dalla **legge di Stefan – Boltzmann**

$$E_n = \sigma T^4$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ J}/(\text{m}^2 \text{ s K}^4)$.

In accordo con le ultime due leggi, il potere emissivo totale del corpo nero è l'integrale sotteso alla curva di fig. 29. I vari andamenti di $E_{n\lambda}$ saranno sempre maggiori all'aumentare della temperatura e il massimo si sposterà verso sinistra.

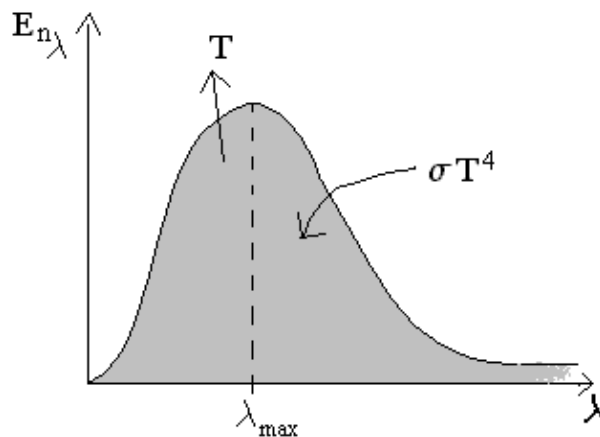


Figura 29

La legge espressa precedentemente vale nel vuoto. Se le onde viaggiano in un mezzo a indice di rifrazione n vale

$$E_n = n^2 \sigma T^4$$

Vediamo ora cosa accade quando un flusso di energia di radiazione G incide sulla superficie di una lastra. G è l'energia che incide per unità di tempo e di superficie, la chiameremo **irradianza**.

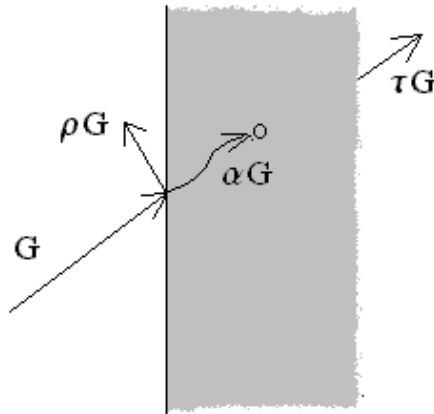


Figura 30

Una parte di questa energia, ρG , verrà riflessa, una parte αG assorbita e una parte τG attraverserà la lastra di materiale. L'energia assorbita contribuirà ad aumentare l'energia interna del sistema, innalzando il grado di eccitazione molecolare.

Le costanti α , ρ e τ dipendono dalla lunghezza d'onda nel caso in cui G sia monocromatica, scriveremo in questo caso α_λ , ρ_λ e τ_λ . Sia per sorgenti monocromatiche che per sorgenti operanti in un intervallo di lunghezze d'onda vale in modo ovvio

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

Una superficie si definirà **opaca** se $\tau = 0$. In questo caso $\alpha + \rho = 1 \Rightarrow \rho = 1 - \alpha$.

Realizzazione fisica di un corpo nero

Il corpo nero è il corpo (o superficie) ideale che emette il massimo dell'energia ad una prefissata temperatura. E' da notare che nella pratica due superfici reali, a parità di materiale, emettono quantità diverse di energia a seconda del loro stato superficiale (in ogni caso minore di quella emessa dal corpo nero a quella temperatura prefissata).

Definiamo il corpo nero in modo operativo supponendo di avere una scatola su cui pratichiamo un minuscolo forellino e che **isoliamo termicamente** rendendo adiabatiche le pareti. Inoltre facciamo in modo che **la temperatura delle pareti resti costante** nel tempo. Questo si può realizzare per esempio con un bagno termostatico.

Dal piccolo forellino entrerà un raggio incidente, il quale, una volta inciso la parete interna (opaca), in parte verrà assorbito e in parte verrà riflesso. Se il raggio entrato nella scatola non ha più l'opportunità di uscire (foro molto piccolo), tutta l'energia in ingresso verrà assorbita. Il corpo nero così costruito è un **assorbitore perfetto**, e poiché la temperatura è costante, per l'equilibrio termico, tutta l'energia che entra deve anche uscire, quindi sarà anche un **emettitore perfetto**. Questo modello fisico si avvicina molto all'idealizzazione del corpo nero.

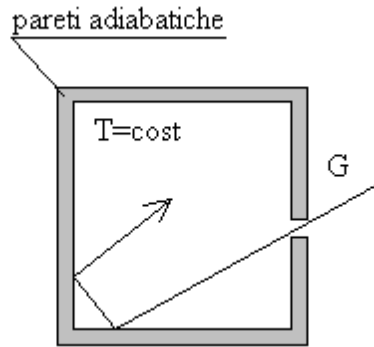


Figura 31

Emissione di un corpo di tipo qualsiasi

Supponiamo di avere un corpo la cui superficie, ad una temperatura T , emette una certa quantità E di energia nel modo calore data dalla legge di Stefan – Boltzman, più l'aliquota riflessa di una irradianza incidente generica G . La presenza di G deriva dal fatto che il sistema, non isolato, è circondato da altri corpi (ambiente) che emettono radiazioni.

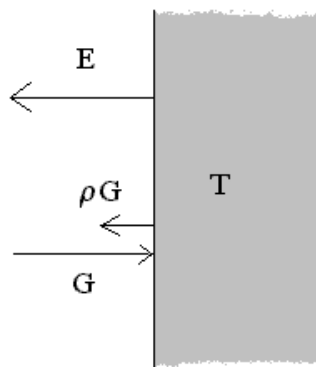


Figura 32

Come già detto

$$E_n = n^2 \sigma T^4$$

Il flusso termico netto q_s sarà dato da

$$q_s = \rho G + E - G = J - G$$

dove la quantità $J = \rho G + E$ è detta **radiosità**, e rappresenta dunque il flusso totale di energia rilasciato dalla superficie.

Se un corpo non è nero, il suo potere emissivo è $E < n^2 \sigma T^4$. Vogliamo ora trovare una espressione per E , il cui valore, come già accennato, dipende dal materiale della superficie e dal suo stato superficiale.

Consideriamo una superficie ad una certa temperatura T . Il potere emissivo monocromatico (flusso termico emesso dalla superficie non nera) è indicato con E_λ ed è funzione in generale della

lunghezza d'onda e della temperatura. Definiamo il **coefficiente di emissività superficiale spettrale** come il rapporto

$$\varepsilon_{\lambda}(T, Superficie) = \frac{E_{\lambda}(T, Superficie)}{E_{n\lambda}(T)}$$

ε_{λ} può essere considerato costante, si può eliminare cioè la dipendenza dalla temperatura, se quest'ultima varia di poco.

Allo stesso modo si può definire un **coefficiente di emissività superficiale totale**, di maggiore interesse perché è più naturale riferirsi ad esso nelle pratiche applicazioni (salvo situazioni particolari di sorgenti ionizzanti, o ancora quando si fa uso di filtri speciali che *tagliano* determinate lunghezze d'onda)

$$\varepsilon(T, Superficie) = \frac{E(T, Superficie)}{E_n(T)}$$

Avremo quindi

$$E(T, Sup) = \varepsilon(T, Sup)E_n(T)$$

da cui, applicando la legge di Stefan – Boltzman nel vuoto ($n=1$, che è una buona approssimazione ingegneristica anche nel caso in cui il mezzo interposto tra sorgente e ricevitore è l'aria atmosferica) e considerando $\varepsilon(T, Sup) = \varepsilon(Sup)$, per piccole variazioni di temperatura, si ha

$$E(T, Sup) = \varepsilon_{Sup} \sigma T^4$$

che rappresenta il potere emissivo totale della superficiale reale non nera. Si ribadisce che E non rappresenta tutta l'energia che lascia la superficie, in altri termini rappresenta solo l'energia emessa dal corpo in quanto sorgente; come già detto, per ottenere tutta l'energia che lascia la superficie per unità di superficie e di tempo va sommata ad E l'aliquota riflessa della radiazione G incidente, ottenendo così la radiosità.

Se non siamo nel vuoto

$$E(T, Sup) = \varepsilon_{Sup} n^2 \sigma T^4$$

che è la legge più generale, contenente anche il caso in cui il corpo possa essere considerato come un corpo nero, ponendo semplicemente $\varepsilon_{Sup} = 1$.

Per il principio generale di Kirchhoff si ammette che il coefficiente di assorbimento α sia uguale a quello di emissività ε , sia a livello spettrale che totale, cioè

$$\alpha = \varepsilon$$

Rigorosamente ciò è vero solo se c'è equilibrio termico, ma l'esperienza insegna che questo risultato può essere esteso anche ai casi in cui l'equilibrio non è verificato.

Abbiamo visto che per una superficie qualsiasi

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

se $\tau \ll 1$, il corpo può essere considerato opaco, e si ha

$$\alpha = \varepsilon = 1 - \rho$$

si può dunque ricavare il coefficiente di riflessione ρ dalla misura sperimentale del coefficiente di remissività ε .

Nel caso di un corpo nero la riflessione è inibita: $\tau = 0$, $\rho = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon = 1$.

Definizione di corpo grigio

Osserviamo che in generale il coefficiente di emissività spettrale ε_λ , fattore di proporzionalità nella relazione

$$\varepsilon_\lambda(T, \text{Superficie}) E_{n\lambda}(T) = E_\lambda(T, \text{Superficie})$$

che fornisce il potere emissivo di una superficie reale rispetto a quello di un corpo nero, è funzione della temperatura della superficie del corpo stesso.

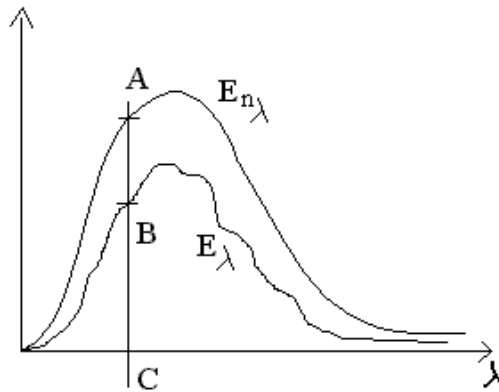


Figura 33

Si definisce **corpo grigio** un corpo per il quale $\varepsilon_\lambda = \text{cost}$.

Per un corpo grigio, quindi, il rapporto $\varepsilon_\lambda = \frac{BC}{AC}$ è costante con la lunghezza d'onda. Si ottiene così un andamento del potere emissivo spettrale della superficie reale che segue "in scala" la legge di Planck (figura 34).

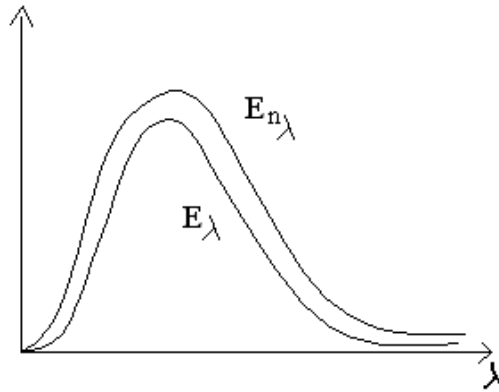


Figura 34

SCAMBIO TERMICO RADIATIVO

Una volta introdotte le leggi fondamentali dell'irraggiamento, e i principali coefficienti che caratterizzano le superfici sorgenti e riceventi, ci aggiungiamo ora a impostare il problema dello scambio termico radiativo tra superfici.

Osserviamo preliminarmente che è conveniente introdurre un ulteriore coefficiente, il cui valore dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche delle superfici, il **fattore di vista o fattore di configurazione**.

Consideriamo due superfici interessate ad uno scambio termico di tipo radiativo, ipotizzate isoterme. Se queste sono indefinite, tutta l'energia emessa da una superficie inciderà sull'altra; ciò non è naturalmente vero nel caso in cui, per esempio, una delle due superfici ha estensione finita, nel qual caso esiste una frazione dell'energia emessa da una superficie che non incide sull'altra. Date due superfici i e j , si definisce fattore di vista il rapporto

$$F_{ij} = \frac{E_{ij}}{E_i}$$

avendo indicato con E_{ij} l'energia emessa dalla (o per meglio dire che lascia la) generica superficie i e incidente direttamente sulla generica superficie j e con E_i tutta l'energia emessa dalla (che lascia la) superficie i .

$F_{ij} \leq 1$ e vale 1 solo nel caso di due superfici piane parallele e indefinite. E' da notare che F_{ij} non dipende né dalla temperatura né da nessuna altra quantità fisica, ma solo da caratteristiche geometriche. Esso in particolare dipende, oltre che dall'estensione spaziale delle superfici, anche dall'orientamento relativo delle due superfici e dalla loro particolare conformazione geometrica. La letteratura specializzata fornisce il fattore di vista per coppie di superfici comunque disposte nello spazio in forma tabulare o anche attraverso relazioni funzionali.

Si può definire anche un fattore di vista di una superficie rispetto a se stessa, F_{ii} , come nel caso di superfici del tipo concavo, come esemplificato in figura 35:

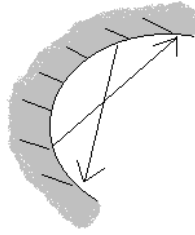


Figura 35

Banalmente, se la superficie è piana $F_{ii} = 0$.

Il fattore di vista F_{ij} soddisfa alcune proprietà che possono essere utilizzate per calcolarne alcuni, noti gli altri. Una di queste è detta **proprietà di reciprocità dei fattori di vista**

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

dove A_i e A_j sono le aree delle due superfici, F_{ij} è il fattore di vista di i verso j e F_{ji} è il fattore di vista di j verso i . Un'altra proprietà è la **regola della somma o della cavità**. In presenza di N superfici che racchiudono una cavità, è evidente che per ogni superficie i sussiste la relazione:

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1$$

Una impostazione di scambio termico radiativo

Osserviamo preliminarmente che in un problema di scambio termico radiativo può essere conveniente fare riferimento sempre a N superfici racchiudenti nello spazio una cavità. Anche nelle situazioni in cui questa circostanza non è strettamente verificata, si può infatti sempre assumere che le *zone aperte* costituiscono delle superfici fittizie su cui prescrivere o il valore della temperatura (quello dell'ambiente esterno) o il valore del flusso termico radiativo netto (cioè differenza tra quello emesso e quello ricevuto; se questo è nullo si parla di modello di superficie ri-radiante).

E' conveniente, inoltre, che ogni superficie sia isoterma. Quando ciò non è possibile, si può suddividere la superficie stessa in diverse superfici più piccole ciascuna delle quali, nell'ambito della approssimazione prefissata, può essere considerata isoterma.

Individuata, dunque, una cavità costituita da N superfici, per ciascuna di esse, di indice i per fissare le idee, vale la relazione

$$J_i = (1 - \varepsilon_i)G_i + E_i$$

che esprime la radiosità come somma del potere emissivo (la superficie è sorgente in quanto si trova a una certa temperatura T_i) e della aliquota di irradianza che ne viene riflessa. Naturalmente il potere emissivo è dato da $E_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4$, dove a seconda dei casi la temperatura della superficie può essere considerata assegnata o incognita del problema. Quando la temperatura di una superficie non è nota, è necessario comunque che su di essa sia prescritta un'altra grandezza, per esempio il flusso termico netto $q_i = J_i - G_i$.

Un semplice bilancio di energia consente poi di valutare la potenza termica incidente su una superficie (definita come il prodotto della irradianza per la sua area) come somma dei contributi di energia radiante derivanti da tutte le altre superfici, stimati mediante le relative radiosità attenuate dai fattori di vista.

In formula

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{ji} A_j J_j$$

Si noti che per formulare il bilancio di energia è stato necessario fare riferimento alle potenze termiche scambiate, ovvero moltiplicare le radiosità e le irradianze per le aree delle corrispondenti superfici. Per la proprietà di reciprocità, l'ultima relazione può anche essere riscritta come

$$A_i G_i = A_i \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j$$

In sintesi, siamo stati in grado di scrivere un sistema di $2N$ equazioni per le $2N$ incognite rappresentate dalle radiosità e dalle irradianze di tutte le superfici che, una volta risolto, consente di valutare su ogni superficie il flusso termico netto scambiato $q_i = J_i - G_i$.

Come osservato in precedenza, questo procedimento considera note tutte le temperature superficiali. In caso contrario, se su una o più superfici sono imposti i flussi (e questo può accadere, in particolare, per le superfici fittizie che racchiudono le zone aperte della cavità), le relazioni aggiuntive necessarie sono fornite proprio da espressioni del tipo $q_i = J_i - G_i$. Da un punto di vista formale il problema è più complicato in quanto il sistema di equazione da risolvere è fortemente non lineare essendo le temperature incognite presenti alla quarta potenza.

Nel caso molto semplice, ma comune nella pratica, di una superficie 1 immersa totalmente in un ambiente 2 a temperatura nota (ove si assume che $F_{12}=1$ e la superficie 2 è nera), risulta $G_1=J_2$ e $J_2=E_2=\sigma T_2^4$, da cui

$$Q_{1,2} = A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Superfici piane parallele e indefinite

Analizziamo il caso particolare di due superfici piane parallele e indefinite, per le quali

$$F_{12} = F_{21} = 1; \quad F_{11} = F_{22} = 0.$$

Supponiamo siano assegnate le temperature T_1 e T_2 delle due superfici, come dati del problema. Supponiamo, cioè, che i valori delle due temperature siano prescritte perché per esempio misurate, e non risultino dall'equilibrio degli stessi scambi radiativi. Ci occuperemo, quindi, di valutare solo l'entità dello scambio termico radiativo.

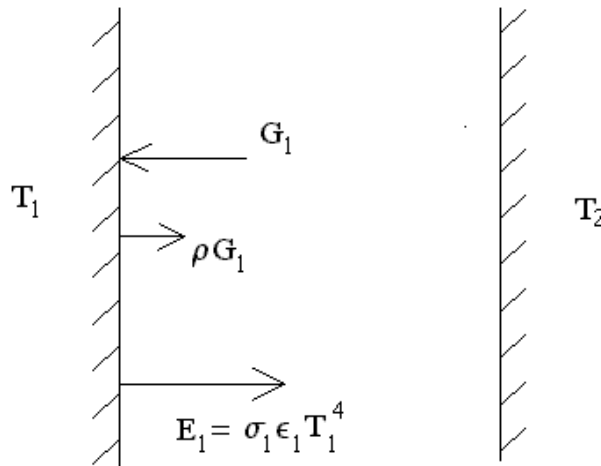


Figura 36

Come ulteriore ipotesi, consideriamo le superfici opache

$$\tau_1 = \tau_2 = 0; \alpha = \varepsilon$$

Ne consegue

$$\alpha + \rho = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \rho \Rightarrow \varepsilon = 1 - \rho \Rightarrow \rho = 1 - \varepsilon$$

Per ogni superficie possiamo valutare la quantità di energia che incide su essa (l'irradianza G) e l'ammontare di energia per unità di tempo che lascia la superficie stessa (la radiosità, somma di ρG ed E). Ricordando sempre che la temperatura T_1 è mantenuta costante, la radiosità della superficie 1 sarà

$$J_1 = \rho G_1 + E_1$$

dove, essendo nota la temperatura si può calcolare E_1 con la legge di Stefan - Boltzmann. Calcoliamo ora il flusso termico netto scambiato dalla superficie 1. Esso è dato da

$$q_1 = J_1 - G_1$$

Lo stesso discorso si può fare per la superficie 2, per la quale

$$J_2 = \rho G_2 + E_2; \quad q_2 = J_2 - G_2.$$

Per ogni superficie ci sono dunque due incognite, G e J , essendo note le temperature note e i coefficienti ρ e ε , proprietà del mezzo.

Per adesso abbiamo quindi due equazioni e quattro incognite.

$$\begin{cases} J_1 = \rho G_1 + \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ J_2 = \rho G_2 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \end{cases}$$

Abbiamo bisogno di altre due equazioni per chiudere il problema. Come abbiamo visto nella impostazione generale, queste sono fornite dalle valutazioni delle radiosità. In questo semplicissimo caso, poiché abbiamo solo due superfici che scambiano energia, deve necessariamente risultare

$$\begin{cases} J_1 = G_2 \\ J_2 = G_1 \end{cases}$$

che esprimono l'ovvia circostanza che tutta l'energia che lascia una superficie è pari a quella che incide sull'altra e viceversa. In situazioni più complesse le due relazioni sopra scritte vanno modificate per tenere in conto l'effetto dei fattori di vista, introdotti precedentemente. Come già visto, occorre inoltre, considerare che l'irradianza di una certa superficie può risultare da contributi di più di una superficie circostante.

Risolvendo il sistema, si ottengono dapprima le espressioni dell'irradianza e della radiosità, e di conseguenza

$$q_1 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

che è il flusso netto scambiato sulla superficie 1. Per la superficie 2, per la quale si definisce $q_2 = J_2 - G_2$, risulterà naturalmente $q_2 = -q_1$, mentre, definito come $q_{1,2}$ il flusso termico netto tra le due superfici (diretto da sinistra verso destra, avendo ipotizzato la temperatura della superficie 1 maggiore di quella della superficie 2) è $q_{1,2} = q_1$.

Se le superfici sono entrambe nere

$$q_{1,2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = E_1 - E_2$$

E' da notare che se i coefficienti $\varepsilon_{1,2}$ sono di poco inferiori a 1 (ad esempio anche circa 0.8-0.9), $q_{1,2}$ diventa molto minore rispetto al valore che si avrebbe per corpi neri.

Schermi radiativi

Esaminiamo ora il caso in cui si ha una superficie di spessore infinitesimo interposta tra le superfici 1 e 2 (fig. 37). Si suppone che lo spessore della lastra 3 sia così piccolo da poter trascurare fenomeni legati alla conduzione. Per semplicità, ma senza che ciò leda le generalità, ipotizziamo inoltre che

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = 1$$

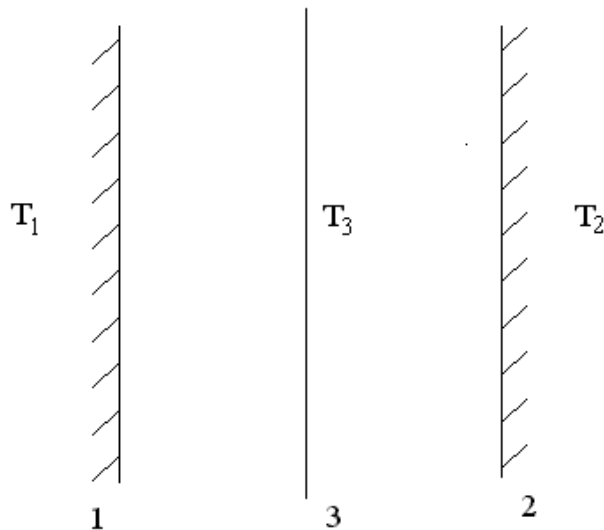


Figura 37

Vogliamo valutare lo scambio termico tra le superfici estreme (mantenute come sempre a temperature prefissate), nel momento in cui viene interposto lo schermo 3. In questo caso si noti che occorre valutare la temperatura T_3 che non è un dato del problema, ma è il valore che risulta dall'equilibrio termico dello schermo interposto. Si ha

$$q_{1,3} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}; \quad q_{3,2} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}.$$

Una volta raggiunta la stazionarietà, in condizioni di equilibrio, se lo spessore della lastra 3 è sufficientemente sottile in modo che non si stabilisce un gradiente termico attraverso di esso, si ha

$$q_{1,3} = q_{3,2} \Rightarrow T_1^4 - T_3^4 = T_3^4 - T_2^4$$

da cui si ricava T_3

$$T_3^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

e, poiché risulta $q_{1,2} = q_{1,3} = q_{3,2}$, si ricava il flusso termico netto

$$q_{1,2} = \frac{\sigma \left(T_1^4 - \frac{T_2^4 + T_1^4}{2} \right)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \right]$$

La conclusione è che se si inserisce una lastra fra le superfici 1 e 2, il flusso termico netto scambiato si dimezza rispetto a quello che si aveva precedentemente. La lastra 3 viene detta **schermo**

radiativo. Naturalmente questo risultato quantitativamente è legato alla circostanza che le emissività superficiali delle tre superfici in esame sono tutte uguali tra di loro.