- **CONVEZIONE**

Abbiamo già introdotto precedentemente la relazione

$$\dot{q} = h\left(T_\infty - T_p\right)$$

che definisce il legame tra flusso termico e differenza di temperatura tra una superficie e un fluido che la lambisce, ovvero che introduce il coefficiente di scambio termico per convezione *h*. Come già osservato, questo non è una proprietà termodinamica del mezzo, ma è essenzialmente una funzione del particolare campo di moto che si stabilisce in seno alla corrente. Si noti anche che in generale il fluido può essere in moto relativo rispetto alla superficie, o anche in quiete.
Il problema base della convezione è la determinazione del coefficiente *h*, una volta noto il campo di moto, in modo particolare nelle immediate vicinanze del corpo. Si è interessati cioè, come vedremo, alla variazione delle grandezze termofluidodinamiche nello strato limite, dinamico e termico.

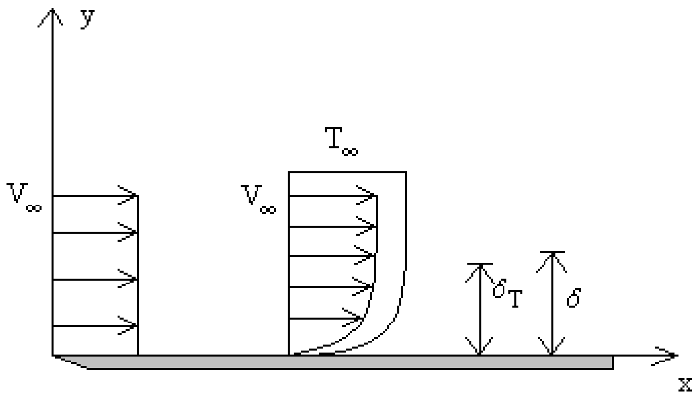

Figura 31

Una differenza tra T_∞ e T_p fa sì che si instauri uno scambio termico tra fluido e parete. Nel caso in esame, al solo scopo di fissare le idee, si suppone che T_∞ sia maggiore di T_p. E' importante sottolineare che nella situazione esemplificativa illustrata in figura l'andamento qualitativo delle temperature fa riferimento essenzialmente a una corrente a basso numero di Mach. Nel caso, infatti, di correnti ad elevato contenuto di energia cinetica rispetto al contenuto entalpico, è da prevedere una elevata produzione di energia interna in prossimità della parete (a causa della corrispondente distruzione di energia cinetica causata dall'attrito), il che modifica sostanzialmente l'andamento delle temperature in prossimità della superficie (che risulta influenzato anche dal numero di Prandtl $Pr=\nu/\alpha$). Come sarà visto in dettaglio nel corso di Gasdinamica, questi effetti modificano anche la definizione del coefficiente *h*, che in correnti ad elevato numero di Mach è basato sulla relazione

$$\dot{q} = h\left(T_{pa} - T_p\right)$$

dove si anticipa qui che la temperatura asintotica della corrente è sostituita dalla Temperatura di parete adiabatica.
La espressione sopra riportata del flusso termico riflette una impostazione prettamente ingegneristica al problema, nel momento in cui ci si propone di determinare il coefficiente *h* mediante l'impiego di correlazioni tra parametri adimensionali di validità abbastanza generali,

determinate, cioè, sotto certe condizioni, una volta per tutte. Da un punto di vista fisico, invece, osservando che sulla superficie del corpo la velocità relativa della corrente è nulla, si può affermare che il meccanismo di scambio è di tipo diffusivo (conduzione). Allora, il flusso di calore in direzione *y* sulla parete è dato dalla legge di Fourier

$$\dot{q} = -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

dove è forse opportuno in questa sede sottolineare che *k* è il coefficiente di conducibilità termica del fluido.

Naturalmente la relazione sopra riportata consente di valutare il flusso termico una volta risolto il campo di moto e, quindi, in particolare, determinata la distribuzione delle temperature.

Uguagliando le espressioni nei due diversi approcci, si può scrivere

$$h\left(T_\infty - T_p\right) = -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

che è la relazione dalla quale si può ricavare *h*. E' da notare che, mentre *k* è una proprietà della materia, $\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$ è una funzione di *x* e dipende dalla particolare soluzione del campo di moto.

Questa equazione può essere adimensionalizzata, e si può pertanto definire un parametro caratteristico adimensionale, che risulterà funzione di pochi altri parametri adimensionali, il numero di Nusselt.

Ponendo infatti

$$T^* = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \qquad y^* = \frac{y}{L}$$

si ottiene

$$-\frac{k}{L} \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = h$$

e definendo il **numero di Nusselt** come

$$\boxed{Nu = \frac{hL}{k}} \qquad \text{(}k\text{ è la conducibilità termica del fluido)}$$

risulta infine

$$Nu = -\left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

da cui si evince che il numero di Nusselt (ovvero *h*) dipende dalla particolare soluzione del campo di moto. A questo livello del corso appare abbastanza chiaro che il gradiente adimensionalizzato di

temperatura, valutato sulla superficie, sarà espresso, tra l'altro, in funzione dei parametri adimensionali caratteristici delle equazioni di bilancio della quantità di moto e dell'energia interna, vale a dire, come vedremo, essenzialmente dei numeri di Reynolds, Prandtl, Eckert. Quest'ultimo sarà introdotto più avanti nella sede opportuna.
Il primo passo da compiere per risolvere, quindi, un problema di scambio termico per convezione è la risoluzione del campo di moto tramite le equazioni di continuità, bilancio di quantità di moto e di energia interna con le opportune condizioni al contorno. Le incognite in generale sono le componenti del campo di velocità e due grandezze termodinamiche.
Scriviamo ora il **sistema di equazioni** per risolvere il campo di moto di cui il numero di Nusselt è funzione. Le tre equazioni sono le già citate equazioni di continuità, di bilancio di quantità di moto e dell'energia interna, qui formulate nelle seguenti **ipotesi semplificative**

- Moto stazionario
- Moto bidimensionale piano
- Moto incomprimibile
- Trascurabilità degli effetti gravitazionali.

In forma scalare avremo quattro equazioni, una per la conservazione della massa, due per il bilancio di quantità di moto (moto 2D), e una per il bilancio di energia interna.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ \rho c_p\left(u\dfrac{\partial T}{\partial x}+v\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)=k\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\underline{V}\cdot\underline{\nabla}p+2\mu\Phi \end{cases}$$

Nelle due equazioni di quantità di moto il primo membro rappresenta la forza d'inerzia, data solo dal termine convettivo per l'ipotesi di stazionarietà, e il secondo membro le forze applicate, di pressione e di tipo viscoso. Ricordiamo che le equazioni sono state scritte nell'ipotesi di $Fr=\dfrac{V_\infty^2}{g\Delta z_{rif}}>>1$ e quindi di trascurabilità degli effetti gravitazionali.
Per quanto riguarda l'ultima equazione, il bilancio di energia interna è stato scritto in termini di entalpia specifica $h=u+\dfrac{p}{\rho}$. Per gas piuccheperfetti una variazione di *h* è proporzionale ad una variazione di temperatura per mezzo del calore specifico a pressione costante $dh=c_p dT$.
Il primo membro del bilancio dell'energia è il termine convettivo, il primo termine a secondo membro è quello diffusivo regolato dalla legge di Fourier e gli altri due sono i termini di generazione: uno è dovuto alla pressione (reversibile) e l'altro è proporzionale a Φ, detta **funzione di dissipazione**, definita dal doppio prodotto scalare del gradiente del vettore velocità, parte simmetrica a traccia nulla, per se stesso. A velocità relativamente basse, in genere questo termine (eguale e contrario al termine di produzione di energia cinetica), come si vedrà, viene trascurato.
Facciamo, infine, anche l'ipotesi che le proprietà del fluido, quali coefficiente di viscosità, coefficiente di conducibilità termica, calore specifico, sono costanti, nel qual caso l'equazione dell'energia risulta disaccoppiata da quelle della quantità di moto, nel senso che una volta risolto il

campo delle velocità, il campo delle temperature può poi essere determinato dalla sola equazione dell'energia.
Abbiamo scritto il sistema di quattro equazioni scalari, da risolvere con opportune condizioni al contorno, al fine di trovare il campo di velocità e di temperatura e risalire così al numero di Nusselt, e quindi ad *h*.
Adimensionalizziamo ora il sistema di equazioni, con la solita notazione. Risulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \dfrac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial y^*} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \dfrac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial T^*}{\partial y^*} = \dfrac{1}{Pe} \left(\dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) + Ec\left(\underline{V}^* \cdot \underline{\nabla} p^* \right) + \dfrac{Ec}{\mathrm{Re}} \Phi^* \end{cases}$$

Le grandezze adimensionali sono

$$u^* = \frac{u}{V_\infty} \qquad v^* = \frac{v}{V_\infty} \qquad T^* = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$$

Si osservi che l'ultima equazione non è omogenea in temperatura, quindi ci si attende la presenza di un parametro adimensionale in cui appare esplicitamente la differenza di temperatura di riferimento $\left(T_\infty - T_p \right)$.
I tre numeri adimensionali che compaiono sono nel sistema sono

$$\boxed{Pe = \frac{V_\infty L}{\alpha}} \qquad \textbf{numero di Peclet}$$

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{V_\infty L}{\nu}} \qquad \textbf{numero di Reynolds}$$

$$\boxed{Ec = \frac{V_\infty^2}{c_p \left(T_\infty - T_p \right)}} \qquad \textbf{numero di Eckert}$$

con $\alpha = \dfrac{k}{\rho c_p}$, diffusività termica, e $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$, coefficiente di viscosità cinematica. Il numero di Eckert somiglia in qualche modo al numero di Mach al quadrato, e in effetti è una misura della importanza relativa della energia cinetica del flusso, in questo contesto rispetto alla differenza di entalpia del fluido tra la condizione indisturbata e quella di parete (cioè la variazione di entalpia di riferimento che misura l'entità del disturbo termico indotto dal corpo). Esso può risultare molto piccolo per campi di moto relativamente lenti. Dall'espressione dell'equazione dell'energia adimensionalizzata si nota che l'ultimo termine, in cui compare il rapporto Ec/Re, è trascurabile alle basse velocità, tanto più quanto più Reynolds è grande. Questa conclusione era stata già ipotizzata quando si è discusso l'esempio del moto della biglia lungo la superficie concava in presenza di attrito ed è qui confermato dall'analisi degli ordini di grandezza nelle equazioni adimensionalizzate.

Integrando le quattro equazioni con le **condizioni al contorno**

- Velocità nulla sulla parete $\underline{V}(x,0)=0$;
- Campo di velocità indisturbato a distanza infinita dal corpo $\lim_{\underline{R}\to\infty}\underline{V}=\underline{V}_\infty$;
- Temperatura adimensionale di parete nulla $T^*\big|_p=0$;
- Temperatura adimensionale unitaria a distanza infinita dal corpo $\lim_{\underline{R}\to\infty}T^*=T^*\big|_\infty=1$;

si otterrà la funzione $T^*=T^*(x^*,y^*,\mathrm{Re},Pe,Ec)$. Precisiamo che i tre numeri adimensionali di cui è funzione la temperatura sono dati del problema, noti i quali, una volta risolto il sistema di equazioni, è possibile conoscere il campo di temperatura ovunque nel campo di moto bidimensionale.
Avremo dunque

$$Nu=Nu(x^*,\mathrm{Re},Pe,Ec)$$

Infatti, essendo il numero di Nusselt, a meno del segno, uguale alla derivata della temperatura adimensionale rispetto alla coordinata y^* valutata sulla parete, risulta eliminata la dipendenza di *Nu* da y^*.

Determinazione del numero di Nusselt attraverso l'analogia di Reynolds
L'espressione del numero di Nusselt può essere trovata vantaggiosamente senza risolvere caso per caso il sistema di equazioni. Alla base di questo risultato sono essenziali le idee della similitudine fluidodinamica e dell'analogia dei meccanismi di scambio della quantità di moto e dell'energia. A tal fine facciamo una ulteriore ipotesi, supponiamo che $Ec \ll 1$, il che corrisponde alla situazione di velocità relativamente bassa già discussa in precedenza.
Al fine di semplificare le equazioni di bilancio di quantità di moto e di energia supponiamo che il numero di Reynolds della corrente sia così grande da poter considerare gli effetti viscosi confinati all'interno dello strato limite. In questa sede ci limitiamo a richiamare i concetti ed i risultati fondamentali della teoria dello strato limite, in base ai quali le variazioni delle grandezze termofluidodinamiche nella direzione y^* (intesa come perpendicolare al corpo) sono preponderanti rispetto alle stesse in direzione x^* (cioè nella direzione del moto). Gli ordini di grandezza sono stimati in termini di potenze dello spessore adimensionalizzato dello strato limite. La velocità verticale, è ipotizzata di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quella orizzontale. Secondo la teoria classica formulata da Prandtl, inoltre, all'interno dello strato limite l'intero termine convettivo è dello stesso ordine di quello viscoso.

L'equazione della quantità di moto nella direzione del corpo si semplifica come

$$\begin{cases} u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \\ \\ \end{cases}$$

in cui, come si vedrà tra poco, il gradiente di pressione è da ritenersi un termine noto derivante dalla soluzione non viscosa del campo esterno allo strato limite.
Il corpo, oltre a rappresentare un disturbo per il campo di velocità, rappresenta un disturbo anche per quello termico. Lo stesso discorso fatto per le variazioni di velocità nello strato limite dinamico può essere fatto per le variazioni di temperatura, concentrate anch'esse in una piccola regione nelle immediate vicinanze del corpo, detta strato limite termico. L'ipotesi che si fa all'interno dello strato limite termico è la trascurabilità delle variazioni seconde di temperatura in direzione x rispetto a quelle in direzione y. Cioè

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} << \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Scrivendo l'equazione del bilancio della quantità di moto lungo y^* nello strato limite si ottiene, nelle ipotesi fatte, che

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0$$

cioè che a meno di termini di ordine superiore, la pressione si trasmette inalterata nella direzione verticale. Questo fisicamente vuol dire che la pressione sul corpo è uguale a quella sul bordo dello strato limite e che, quindi, la pressione nello strato limite coincide con quella che si può determinare attraverso la soluzione non viscosa nel campo esterno.
Allo stesso tempo, nelle ipotesi di comportamento aerodinamico simile a quello della lastra piana, dalla soluzione non viscosa si ha

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0$$

Il campo di pressione sarà quindi uniforme e pari al suo valore p_∞ a distanza infinita dal corpo.

Alla luce di tutte queste semplificazioni (strato limite, lastra piana a incidenza nulla e Ec<<1) le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto e energia si scrivono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ u^* \dfrac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial T^*}{\partial y^*} = \dfrac{1}{Pe} \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \end{cases}$$

Le incognite si sono ridotte a u^*, v^*, T^*, le quali devono rispettare le condizioni al contorno

$$u^* \to 0; \qquad T^* \to 0 \qquad \text{sul corpo}$$

$$u^* \to 1; \qquad T^* \to 1 \qquad \text{sul bordo dello strato limite}$$

L'espressione del numero di Peclet è

$$Pe = \frac{V_\infty L}{\alpha} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$$

e poiché per l'aria $\mathrm{Pr} = O(1)$, si può ulteriormente porre

$$\mathrm{Re} \cong Pe$$

in base alla quale i meccanismi di scambio di quantità di moto e di energia interna appaiono perfettamente analoghi.

Sostituendo nell'equazione del bilancio dell'energia si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ u^* \dfrac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial T^*}{\partial y^*} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \end{cases}$$

Si nota che le ultime due equazioni sono formalmente identiche, e per quanto già detto, vanno risolte con identiche condizioni al contorno. Ne consegue che, dopo avere calcolato il campo delle velocità impiegando la equazione di continuità e quella di quantità di moto, il campo termico deve soddisfare una equazione che è formalmente la stessa della quantità di moto. Da ciò consegue che

$$\boxed{u^*\left(x^*, y^*\right) = T^*\left(x^*, y^*\right)}$$

Questo risultato è detto **analogia di Reynolds**: i fenomeni termici diffusivi sono dello stesso ordine di grandezza degli scambi di quantità di moto di tipo diffusivo e le soluzioni adimensionalizzate di velocità e temperature sono coincidenti.
Da ciò si deduce che per ottenere il numero di Nusselt si può prescindere, nelle ipotesi fatte, dal risolvere l'equazione dell'energia. Infatti, a meno del segno

$$Nu = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

che in termini dimensionali diventa

$$Nu = \frac{L}{V_\infty} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Moltiplicando e dividendo per il coefficiente di viscosità dinamica μ e ricordando l'espressione dello sforzo τ alla parete $\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$, si ha

$$Nu = \frac{L}{V_\infty \mu} \tau_p .$$

Moltiplicando e dividendo per la pressione dinamica $\frac{1}{2} \rho V_\infty^2$ e introducendo il coefficiente d'attrito $c_f(x) = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$, si ottiene

$$Nu = \frac{L}{\mu} c_f \frac{1}{2} \rho V_\infty$$

e cioè

$$\boxed{Nu = \frac{1}{2} c_f \,\mathrm{Re}}$$

L'equazione appena scritta esprime in formula l'**analogia di Reynolds**.

Se si sceglie come lunghezza di riferimento la coordinata *x* in luogo della *L* sia nel numero di Nusselt a primo membro che nel numero di Reynolds a secondo membro, si può riscrivere la relazione dell'analogia di Reynolds, dove il numero di *Nusselt locale* appare in funzione del numero di *Reynolds locale*

$$Nu_x = \frac{1}{2} c_f \,\mathrm{Re}_x$$

Per ritenere il problema definitivamente chiuso, occorre valutare il coefficiente di attrito, che in linea di principio richiede la risoluzione delle equazioni del campo dinamico. Una di queste soluzioni è la cosiddetta soluzione dello strato limite alla Blasius (soluzioni simili). Ricordando che $c_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$, per moti laminari, si ricava

$$\boxed{Nu_x = 0.332 \sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Nelle figure seguenti è possibile vedere l'andamento di c_f e Nu_x in funzione di Re_x.

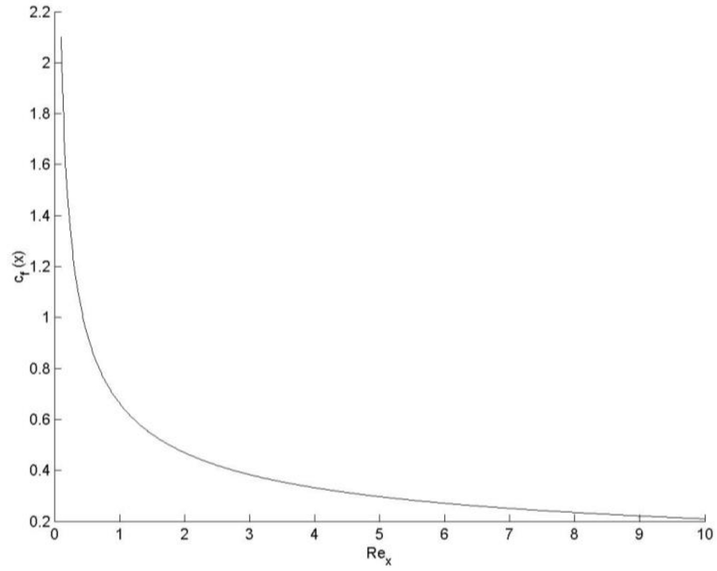

Figura 32

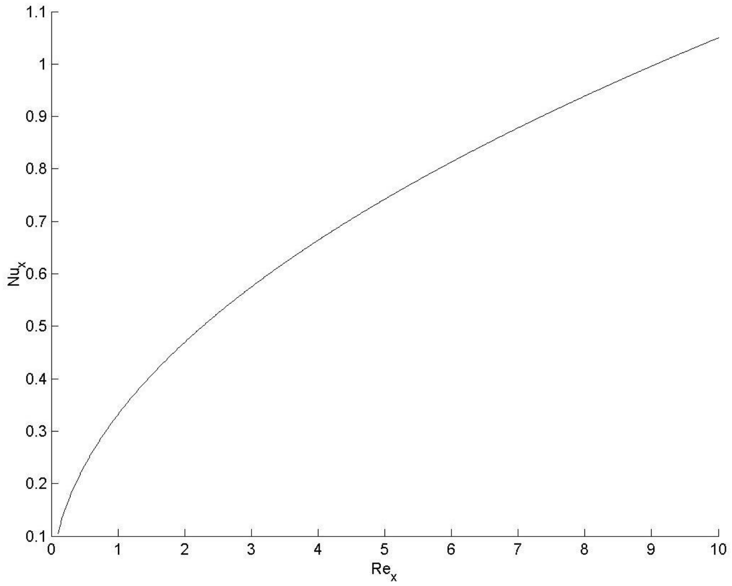

Figura 40

L'andamento reale di c_f si discosta da quello diagrammato per i valori di x prossimi allo zero, in quanto fisicamente il coefficiente di attrito è nullo sul bordo d'attacco.
Se le ipotesi nelle quali si ricavano questi risultati non sono soddisfatte (lastra piana ad incidenza nulla), valgono comunque relazioni del tipo

$$Nu = A\mathrm{Re}^B$$

dove il coefficiente A dipende essenzialmente dalla geometria del sistema in esame mentre B è approssimativamente uguale a 0.5 in moto laminare. La letteratura riporta anche formule che includono esplicitamente un fattore correttivo da utilizzare quando il numero di Prandtl non è rigorosamente unitario.
In regime di moto turbolento da soluzioni altrettanto classiche si ha

$$c_f = \frac{c}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$

da cui segue

$$Nu_x = \frac{c}{2}\mathrm{Re}_x^{4/5}$$

cioè

$$B = 0.8\,.$$

Anche in regime turbolento si può dunque assumere $Nu = A\mathrm{Re}^B$, dove A è un coefficiente che dipende dalla geometria e B, quale che sia la situazione di interesse, per moti esterni o anche interni, è un parametro molto prossimo a 0.8.
Per quel che riguarda il coefficiente di attrito locale, spesso la sua conoscenza è poco utile ai fini pratici. Più interessante può diventare il suo valor medio ai fini della determinazione della resistenza d'attrito:

$$R = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \overline{c_f} S \qquad \text{dove } \overline{c_f} = \frac{1}{L}\int_0^L c_f(x)dx$$

Nel caso in cui sono verificate le nostre ipotesi

$$\overline{c_f} = 2c_f(L) = 2\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}}}; \qquad \overline{Nu} = \frac{1}{2}\overline{c_f}\,\mathrm{Re} = 0.664\sqrt{\mathrm{Re}}$$

Il numero di Reynolds nelle espressioni precedenti è inteso calcolato rispetto alla lunghezza di riferimento L.
Come ultima nota possiamo fare un rapido cenno al numero di Reynolds in corrispondenza del quale si ha la cosiddetta transizione da strato limite laminare a strato limite turbolento.
Su lastra piana il numero di Reynolds critico, riferito all'ascissa x, in corrispondenza della quale si ha buona probabilità di avere transizione, è dell'ordine del milione.
Per un condotto, si ha il passaggio da moto laminare a moto turbolento per valori del numero di Reynolds compresi nell'intervallo

$$\mathrm{Re}_{Dcr} \cong 2300 \div 3000$$

Questa volta il numero di Reynolds è riferito al diametro idraulico. I valori più alti si possono avere se il condotto ha superfici molto lisce e non sono presenti disturbi che possono innescare la transizione. In ambienti in cui si ha la presenza di forti vibrazioni, il numero di Reynolds critico può assumere valori più bassi.

CONVEZIONE NATURALE

Quando si parla di convezione naturale, si fa riferimento ad una situazione in cui lo scambio termico avviene tra un corpo ed un fluido asintotocamente in quiete. In questo caso la velocità della corrente non è imposta (il moto non è *forzato*), ma il campo di moto si autoinnesca per la presenza di forze di spinta di tipo archimedeo. Naturalmente in un bilancio energetico globale occorre sempre prevedere una fonte che somministra energia al sistema in modo tale da mantenerlo in moto (come nella convezione forzata), e solitamente tale energia è quella spesa per mantenere elevata la temperatura superficiale del corpo su cui il moto si sviluppa.
Il fenomeno può essere così spiegato: nel campo gravitazionale, supponiamo di avere una parete ad una temperatura T_p maggiore della temperatura T_∞ del fluido in quiete a contatto con la superficie stessa. Per semplicità supponiamo che il fluido sia aria, che nelle immediate vicinanze del corpo, subisce un innalzamento di temperatura e quindi, come è generalmente noto, una diminuzione di densità.

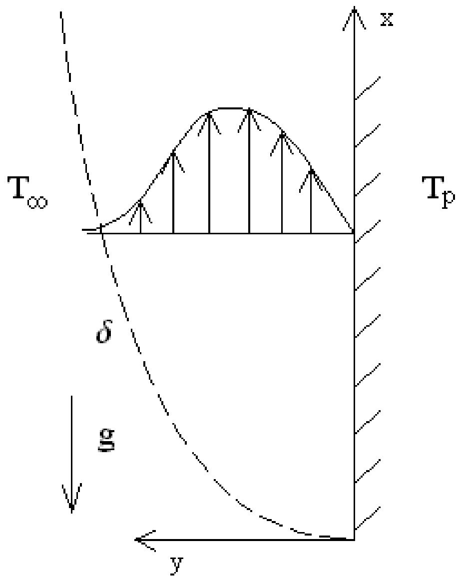

Figura 41

Per effetto della spinta di Archimede si innesca una spinta ascensionale, che determina una corrente verticale, in conseguenza della quale si stabilisce uno scambio termico per convezione, regolato, come al solito, dalla relazione

$$\dot{q} = h(T_p - T_\infty)$$

Il problema da risolvere è quello di trovare il coefficiente *h*.
Anche in questo caso si possono fare delle semplificazioni introducendo il modello di strato limite. Come si può osservare nella rappresentazione qualitativa in figura 41, la velocità della corrente, nulla sulla parete, cresce con la distanza dalla parete stessa fino a raggiungere un massimo, per poi diminuire e ridiventare praticamente nulla a grande distanza da essa, dove si ritrova il campo di moto indisturbato, nelle nostre ipotesi dato dallo stato di quiete. La distanza dalla parete alla quale la velocità può essere considerata praticamente nulla è definito spessore dello strato limite di convezione naturale. Anche in questo caso si svilupperà uno strato limite termico in cui la temperatura varia dal valore T_p al valore T_∞. Naturalmente, l'idea dello strato limite è tale che tale

variazione avviene praticamente entro una distanza dalla parete piccolissima rispetto alla dimensione caratteristica del corpo. Indicando con δ e δ_T rispettivamente lo spessore dello strato limite dinamico e quello dello strato limite termico, se il moto è laminare

$$\frac{\delta}{L} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right) \qquad \frac{\delta_T}{L} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Pe}}\right)$$

da cui segue

$$\frac{\delta}{\delta_T} = O\left(\sqrt{\mathrm{Pr}}\right) \cong 1 \qquad \text{nell'ipotesi in cui il fluido sia aria.}$$

Ripetendo allo stesso modo le considerazioni fatte nel caso della convezione forzata, sulla parete vale, a meno del segno

$$Nu = \frac{hL}{k} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

avendo indicato con k la conducibilità termica del fluido. Il numero di Nusselt sarà quindi noto una volta calcolata la T^*, diversa rispetto a quella data dalla soluzione del sistema di equazioni scritte nel caso di convezione forzata.
Scriviamo le equazioni di bilancio nelle seguenti **ipotesi**

- Moto stazionario
- Moto bidimensionale piano
- Moto incomprimibile.

Sulla terza ipotesi c'è da precisare che si ammetteranno variazioni di densità dovute solo a variazioni di temperatura, ma non associate al campo di velocità (ipotesi di Boussinesq). Ciò equivale a ritenere costante la densità nel termine convettivo, ma non nella valutazione della spinta archimedea (forza di galleggiamento). Evitando di scrivere l'equazione lungo y sapendo che porta al noto risultato $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, scriviamo le tre equazioni del bilancio di massa, quantità di moto e energia in termini di entalpia specifica. Nello scrivere l'equazione del bilancio di quantità di moto, a differenza di quanto fatto precedentemente, non trascureremo gli effetti gravitazionali (che in questo caso sono nella direzione del moto).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho_\infty\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho_\infty c_p\left(u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{cases}$$

Si noti esplicitamente che il termine gravitazionale nella equazione della quantità di moto contiene la densità indicata con il simbolo ρ, che è dunque da valutare alla temperatura locale del campo nello strato limite.

Fuori dallo strato limite, non essendoci variazioni di temperatura, la densità è costante e la pressione varia con la legge di Stevino

$$\rho = \rho_\infty \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g$$

L'equazione del bilancio della quantità di moto si scrive (la pressione è costante lungo y)

$$\rho_\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\rho_\infty - \rho) g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Allo scopo di stimare le variazioni della densità in funzione di quelle di temperatura, sviluppiamo in serie $\rho(T)$ a partire da $T = T_\infty$

$$\rho(T) \cong \rho(T_\infty) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T_\infty} (T - T_\infty)$$

avendo trascurato i termini del secondo ordine perché ipotizziamo piccole variazioni della temperatura. Si ha

$$\rho(T) - \rho(T_\infty) = \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T_\infty} (T - T_\infty) \Rightarrow \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} = -\frac{1}{\rho_\infty} \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T_\infty} (T - T_\infty)$$

sostituendo nell'equazione di quantità di moto

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta g (T - T_\infty) + \frac{\mu}{\rho_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dove $\beta \equiv -\frac{1}{\rho_\infty} \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T_\infty}$ è detto **coefficiente di comprimibilità** isoterma del fluido.

Il termine $\beta g (T - T_\infty)$ rappresenta la spinta di Archimede, che dipende dal campo gravitazionale e dalla differenza di temperatura (e quindi di densità).

Procediamo ora con l'adimensionalizzazione di questa equazione. Non essendo il problema caratterizzato da una velocità asintotica di riferimento, dobbiamo cercare una velocità di riferimento V_r caratteristica. Dividendo e moltiplicando per $(T_p - T_\infty)$, e indicando come di consueto con L la lunghezza di riferimento si ottiene

$$\frac{V_r^2}{L} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = \beta g T^* (T_p - T_\infty) + \frac{V_r}{L^2} \frac{\mu}{\rho_\infty} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

dividendo per $\frac{V_r^2}{L}$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\beta g \left(T_p - T_\infty\right) L}{V_r^2} T^* + \frac{\mu}{\rho_\infty V_r L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Resta ancora da determinare V_r e le incognite in gioco sono u^* e v^*. Il campo di moto, in questo caso, non è disaccoppiato dal campo termico.
La considerazione di base che può guidare alla individuazione della velocità di riferimento in convezione naturale è che in questa fenomenologia gli effetti convettivi devono essere intuitivamente dello stesso ordine di quelli gravitazionali, ovvero della spinta di Archimede. Poiché nella equazione sopra scritta il termine convettivo ha peso unitario, affinché anche quello gravitazionale abbia lo stesso peso occorre scegliere come velocità di riferimento

$$V_r = \sqrt{\beta g \left(T_p - T_\infty\right) L}$$

L'equazione diventa allora

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = T^* + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

dove $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho \sqrt{g \beta \Delta T L}\, L}{\mu}$. Il quadrato di questo raggruppamento adimensionale è detto **numero di Grashoff**

$$\boxed{Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2}}$$

l'equazione del bilancio si può scrivere quindi come

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = T^* + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}.$$

Dalla risoluzione del campo di moto quindi

$$Nu = Nu\left(x^*, Gr, \mathrm{Pr}\right)$$

e se il fluido è aria $\left(\mathrm{Pr} \cong 1\right)$

$$Nu = Nu\left(x^*, Gr\right)$$

Dalla conoscenza di Nu si può quindi risalire ad h. E' da notare che in questo caso non vale l'analogia di Reynolds, e bisogna quindi in ogni caso risolvere l'equazione dell'energia.
Non entriamo qui nel merito delle procedure di risoluzione. Dalla letteratura si può sintetizzare che le soluzioni saranno del tipo

$$Nu = A\left(\mathrm{Pr}\, Gr\right)^B$$

con *A* dipendente dalla geometria e *B* che assume valore 1/4 in regime laminare e 1/3 in regime turbolento. Per la transizione da laminare a turbolento, si può affermare che questa avviene usualmente quando

$$Gr_x \Pr \approx 10^9$$

con

$$Gr_x = \frac{\rho^2 g\beta\Delta T x^3}{\mu^2}$$

numero di Grashof locale. Il prodotto $Gr_x \Pr$ è detto **numero di Rayleigh** e si indica con **Ra**.