

CAPITOLO 7

VELOCITÀ CRITICHE FLESSIONALI

7.1 Introduzione

Nel Cap.3 è stato messo in evidenza che il rotore di una macchina, pur essendo stato progettato per ruotare intorno ad un asse centrale d'inerzia, per una serie di motivi, legati alla sua costruzione, ruota in pratica intorno ad un asse che non risulta né baricentrico né principale d'inerzia.

Per questo motivo, alla fine delle operazioni costruttive, il rotore viene sottoposto ad un'operazione di bilanciamento, i cui aspetti tecnici sono stati descritti nel Cap.6.

A valle di questa operazione resta però sempre uno sbilanciamento residuo, che genera, durante la rotazione del rotore, una forza ed una coppia d'inerzia, rotanti col rotore.

Si è anche accennato al fatto (v.par.3.7) che queste sollecitazioni d'inerzia producono vibrazioni flessionali del sistema, costituito dal rotore e dai suoi supporti, e che queste vibrazioni diventano tanto violente da compromettere l'integrità della macchina, quando la velocità angolare del rotore eguaglia una delle pulsazioni proprie del sistema.

Queste velocità angolari sono dette "velocità critiche flessionali" e le violente vibrazioni, che le caratterizzano, sono dovute al verificarsi di un fenomeno di risonanza, che vede la pulsazione delle azioni forzanti, dovute allo sbilanciamento del rotore, coincidere con una pulsazione propria del sistema.

Il primo studio teorico del fenomeno è dovuto a W.J.M. Rankine, che nel

1869 pubblicò l'articolo "On the centrifugal force of rotating shafts" (The Engineer – April 9, 1869).

Però è solo mezzo secolo dopo che il fenomeno delle velocità critiche venne riconosciuto come un fenomeno di risonanza.

Infatti ancora nel 1904 C.Chree scriveva in un suo articolo (The Whirling and Transverse Vibration of Rotating Shafts – Phil. Mag. Vol. 7, 1904): "The case is not one in which forced vibration are set up with a frequency equal to one of the natural periods."

Fu solo nel 1919 che H.H. Jeffcott interpretò le velocità critiche come un fenomeno di risonanza flessionale, che si verifica quando la pulsazione delle azioni forzanti, derivanti dallo sbilanciamento del rotore, coincide con una delle pulsazioni proprie del sistema, che, da fermo, oscilla flessionalmente (The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed. – The Effect of Want of Balance–Phil. Mag. vol. 37, 1919).

Nei paragrafi che seguono verranno messi a confronto il modello matematico, che chiameremo "da Rankine a Chree" e che esprime in sostanza l'equilibrio tra la forza centrifuga, dovuta all'eccentricità del baricentro, e la reazione elastica dell'albero, e il modello matematico di Jeffcott, che considera le vibrazioni forzate, che nascono per effetto dello sbilanciamento del rotore.

7.2 Il modello matematico da Rankine a Chree

Si consideri un albero a sezione circolare costante che porta, calettato in mezzzeria, un disco sottile D (v.fig.7.2-1,a).

A causa dello "sbilanciamento statico residuo" (v. par.6.7, vol.I) il baricentro G del disco non giace sull'asse di rotazione; sia e la distanza di G da tale asse.

Detta m la massa del disco, si facciano le seguenti ipotesi semplificative:

- 1°) si ritenga trascurabile la massa dell'albero rispetto alla massa del disco;
- 2°) gli appoggi siano considerati rigidi;
- 3°) si ritenga trascurabile la deformazione statica che l'albero subisce da fermo per effetto del peso mg del disco. In tali condizioni, il centro C del disco coincide col punto O dell'asse di rotazione che giace nella sezione mediana del disco (v.fig.7.2-1,b).

Se si mette in rotazione il sistema, la forza centrifuga F_c , dovuta allo sbilanciamento residuo, flette l'albero, che ruota quindi deformato [v.fig.7.2-1,c) e d)].

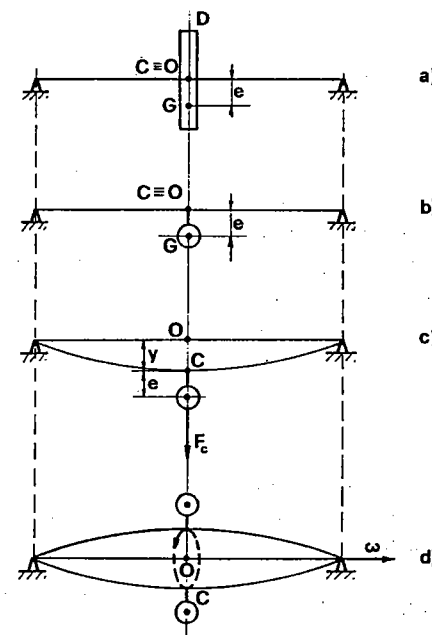


Fig. 7.2-1

Durante la rotazione, a causa della simmetria del sistema, il disco si mantiene parallelo a se stesso ed il suo moto è un moto piano; se si mantiene costante la velocità angolare ω , ogni punto dell'albero descrive una traiettoria circolare: in particolare il centro C del disco descrive una circonferenza di centro O con la stessa velocità ω del disco.

Il sistema di forze d'inerzia che sollecita l'albero, che ruota deformato, essendo la velocità angolare costante, è costituito dalla sola forza centrifuga, che deriva dal moto del baricentro.

Nelle ipotesi poste, infatti, sull'albero non agisce alcuna coppia d'inerzia, essendo nulla la variazione nel tempo del momento della quantità di moto del disco: ciò deriva dal fatto che il vettore velocità angolare è costante, perché ha modulo, direzione e verso costanti.

Si noti che tale vettore è diretto parallelamente all'asse del disco, che è principale d'inerzia, per ipotesi.

Nelle condizioni descritte è possibile quindi sostituire al disco la sua massa concentrata nel baricentro.

Durante la rotazione con velocità angolare ω si faranno equilibrio la forza centrifuga F_c e la reazione elastica dell'albero.

Si può scrivere quindi (v.fig.7.2-1,c):

$$F_c = m(e + y)\omega^2 = Ky \quad (7.2-1)$$

dove:

y = freccia dell'albero in corrispondenza della sezione di applicazione della massa m = raggio della traiettoria circolare descritta da C ;

K = rigidità flessionale dell'albero = reazione elastica, col segno cambiato, per y pari ad 1.

Dalla (7.2-1) si ricava:

$$y = m\omega^2 / (K - m\omega^2) \quad (7.2-2)$$

Dividendo numeratore e denominatore della (7.2-2) per K e tenendo presente che la pulsazione naturale del sistema in esame, che, da fermo ($\omega = 0$), oscilla flessionalmente è data da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

si ottiene:

$$y = e \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (7.2-3)$$

È da osservare che durante la vibrazione flessionale, a causa della simmetria del sistema, il disco (v.fig.7.2-2,a) si sposta parallelamente a se stesso e la sua posizione è individuata dalla distanza x del centro C dall'asse indeformato dell'albero: il sistema si comporta quindi come un sistema discreto ad un grado di libertà, costituito dalla massa m , concentrata in C , e dal vincolo elastico, dovuto alla rigidità flessionale K dell'albero (v.fig.7.2-2,b).

In fig.7.2-3 è riportato l'andamento di y in funzione di ω/ω_n ; esso si giustifica, tenendo presente che dalla (7.2-3) si deduce che:

- per $\omega/\omega_n = 0$, cioè per $\omega = 0$, $y = 0$;
- per $\omega/\omega_n \rightarrow 1$, cioè per $\omega \rightarrow \omega_n$, $y \rightarrow \infty$;
- per $\omega/\omega_n > 1$, la y ha segno opposto a quello di e ;
- per $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -e$.

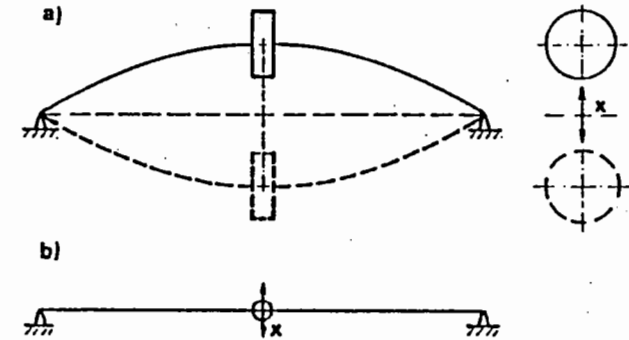


Fig. 7.2-2

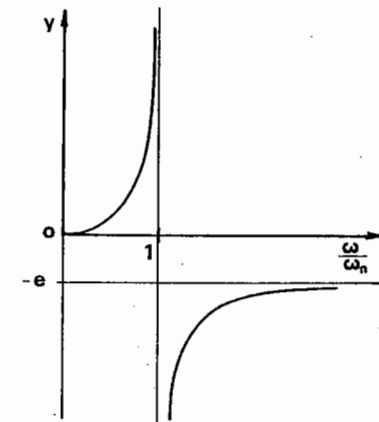


Fig. 7.2-3

Dalla (7.2-3) e dal grafico di fig.7.2-3 si deduce che quando la velocità angolare ω tende al valore della pulsazione naturale ω_n del sistema, la freccia y tende ad ∞ , il che sta a significare la rottura dell'albero.

Per questo motivo la velocità angolare $\omega = \omega_n$ viene detta velocità critica del sistema.

In fig.7.2-4 è rappresentato il sistema durante la rotazione a velocità angolari diverse:

- $\omega < \omega_n$: y ed e hanno lo stesso segno e la massa m descrive una traiettoria circolare esterna a quella descritta da C ;

- B) $\omega > \omega_n$: y ed e hanno segno contrario e la massa m descrive una traiettoria circolare interna a quella descritta da C ;
- C) $\omega \rightarrow \infty$: $y \rightarrow -e$; la massa m tende a disporsi sull'asse di rotazione del sistema. Questo risultato è in accordo con la realtà fisica e mette in evidenza che al di sopra della velocità critica l'inflessione dell'albero diminuisce e che al crescere di ω il sistema tende a ruotare intorno ad un asse baricentrico.

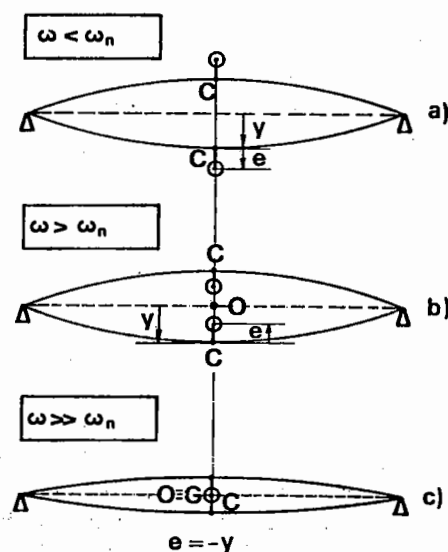


Fig. 7.2-4

I risultati di questa teoria sono in buon accordo con i risultati sperimentali, ma ciò avviene soltanto per la semplicità e la simmetria del sistema considerato. In particolare, avendo supposto rigidi i supporti, risulta evidente che, per un assegnato valore della velocità angolare, l'orbita descritta dal centro C del disco è circolare: indicato con y il raggio di tale circonferenza, la reazione elastica dell'albero risulta, durante la rotazione, costante e pari a $-Ky$.

Ciò non è più valido nel caso più generale di supporti non rigidi ed aventi rigidità, nei piani orizzontale e verticale, diverse, quando cioè, essendo le traiettorie, descritte dal centro C del disco, non più circolari ma ellittiche, la deformazione dell'albero e quindi la reazione elastica dello stesso variano, durante la rotazione, al variare della posizione angolare del sistema.

7.3 Le velocità critiche come risonanze flessionali: il modello di Jeffcott

Si consideri ancora il sistema di fig.7.2-1 e si ritengano valide le ipotesi semplificative fatte all'inizio del par.7.2.

Si assuma come riferimento fisso la terna $O\xi\eta$, la cui origine O coincida, quando l'albero non ruota, col centro C del disco (v.fig.7.3-1).

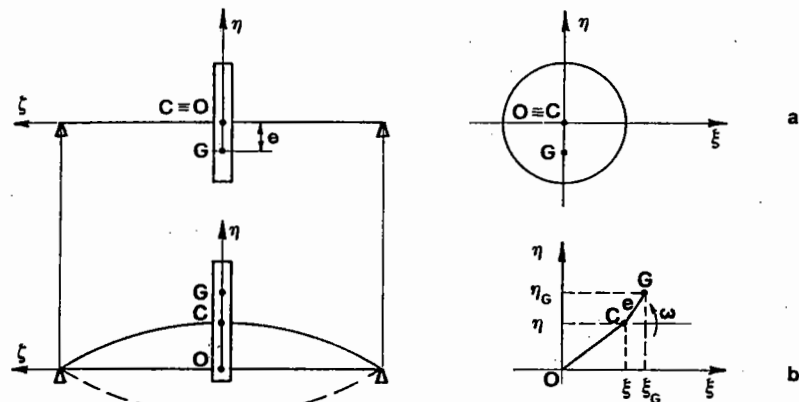


Fig. 7.3-1

Se il sistema considerato viene messo in rotazione ad una velocità angolare $\omega = \text{cost}$, l'albero si deforma per effetto della forza centrifuga ed, essendo il disco posto nella mezzzeria dell'albero, il moto del disco è, come è stato già detto, un moto piano ed il piano di riferimento $\xi\eta$ contiene la traiettoria di C .

Il moto del disco può essere quindi considerato come risultante di un moto di traslazione di C (da determinare) e di una rotazione con velocità angolare ω intorno a C .

Dette ξ_G e η_G le coordinate di G , esse risultano date, per le ipotesi fatte, (v.fig.7.3-1,b) dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\xi_G &= \xi + e \cos \omega t \\ \eta_G &= \eta + e \sin \omega t\end{aligned}\quad (7.3-1)$$

Le equazioni del moto della massa m del disco, concentrata in G , possono scriversi, tenendo conto che saranno certamente presenti azioni smorzanti:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_G + \sigma\dot{\xi} + K\xi = 0 \\ m\ddot{\eta}_G + \sigma\dot{\eta} + K\eta = 0 \end{cases}\quad (7.3-2)$$

dove:

K = rigidità dell'albero, uguale per i moti ξ ed η ;

σ = coefficiente di smorzamento viscoso, anch'esso uguale per i due moti in esame.

Sostituendo le (7.3-1) nelle (7.3-2) si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + \sigma\dot{\xi} + K\xi = mew^2 \cos \omega t \\ m\ddot{\eta} + \sigma\dot{\eta} + K\eta = mew^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (7.3-3)$$

Le (7.3-3) rappresentano le equazioni del moto del punto C nelle direzioni ξ ed η .

Tali equazioni mettono in evidenza che i due moti suddetti sono vibrazioni forzate, che il punto C compie per effetto delle componenti, $m\omega^2 e \cos \omega t$ ed $m\omega^2 e \sin \omega t$, della forza centrifuga mew^2 secondo gli assi di riferimento ξ ed η rispettivamente.

Le equazioni (7.3-3) sono indipendenti, perché in ciascuna di esse compare solo la funzione $\xi(t)$ ovvero la $\eta(t)$: i moti ξ ed η si dicono per questo motivo "disaccoppiati" e l'uno non influenza l'altro.

La soluzione delle (7.3-3) risulta data, come è noto, dalle relazioni:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_e + \xi_f \\ \eta(t) = \eta_e + \eta_f \end{cases} \quad (7.3-4)$$

dove:

ξ_e = integrale generale dell'omogenea associata alla prima delle (7.3-3)
= vibrazione libera smorzata di C lungo ξ ;

ξ_f = integrale particolare della prima delle (7.3-3) = vibrazione forzata di C lungo ξ ;

η_e ed η_f , idem per il moto di C lungo η .

Dopo il transitorio iniziale i moti liberi ξ_e ed η_e diventano trascurabili rispetto ai moti forzati ξ_f ed η_f , sicché, in queste condizioni, le (7.3-4) possono scriversi, come è noto:

$$\begin{cases} \xi(t) \approx \xi_f = \xi_{st} A_\xi \cos(\omega t - \phi_\xi) \\ \eta(t) \approx \eta_f = \eta_{st} A_\eta \sin(\omega t - \phi_\eta) \end{cases} \quad (7.3-5)$$

con:

$$\xi_{st} = \eta_{st} = \frac{mew^2}{K}$$

$$A_\xi = A_\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7.3-6)$$

$$\tan \phi_\xi = \tan \phi_\eta = \tan \phi = \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

e:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} ; \quad \sigma_{cr} = 2\sqrt{mK} \quad (7.3-7)$$

Posto:

$$\begin{cases} \xi(t) = \Xi \cos(\omega t - \phi) \\ \eta(t) = H \sin(\omega t - \phi) \end{cases} \quad (7.3-8)$$

e risultando per le (7.3-6):

$$\Xi = H = R \quad (7.3-9)$$

si deduce che il punto C descrive una traiettoria circolare di centro O e raggio R , traiettoria che risulta dalla composizione dei moti $\xi(t)$ e $\eta(t)$ in quadratura tra loro.

Risulta infatti dalle (7.3-8):

$$\xi^2(t) + \eta^2(t) = R^2 \quad (7.3-10)$$

La suddetta traiettoria è descritta con velocità angolare ω , uguale quindi alla velocità con la quale il disco D ruota intorno a C .

Per quanto si riferisce al verso col quale il punto C descrive la traiettoria, si consideri che, posto:

$$\omega t - \phi = x$$

le (7.3-8) si scrivono:

$$\begin{cases} \xi(t) = R \cos x \\ \eta(t) = R \sin x = R \cos(x - \pi/2) \end{cases} \quad (7.3-11)$$

La differenza di fase $(\phi'_\xi - \phi'_\eta)$ risulta quindi data da:

$$\phi'_\xi - \phi'_\eta = +\pi/2$$

e quindi (v.par.5.6) il punto C percorre la traiettoria in verso antiorario, cioè nello stesso verso della rotazione ω .

Dalle (7.3-8) risulta inoltre:

$$\eta(t)/\xi(t) = \tan(\omega t - \phi) \quad (7.3-12)$$

Questa relazione mette in evidenza (v.fig.7.3-2) che la deformazione dell'albero $OC=R$ forma con l'asse ξ un angolo pari ad $(\omega t - \phi)$: ciò sta ad indicare che l'angolo che CG forma con OC è uguale a ϕ .

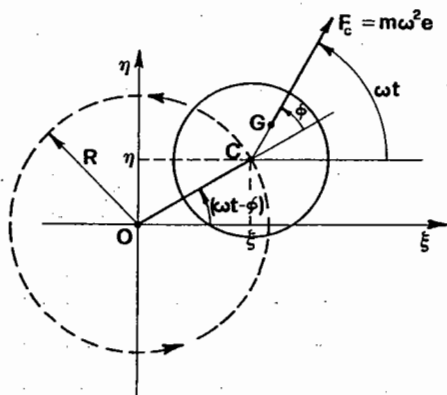


Fig. 7.3-2

Questo risultato va interpretato nel senso che, durante la rotazione del disco ($\omega = \text{cost}$), la deformazione dell'albero $OC = R$ è in ritardo di fase rispetto alla causa $F_c = m\omega^2 e$, che la determina, di un angolo ϕ , dato dalla terza delle (7.3-6).

Tale angolo di fase dipende dal valore di σ/σ_{cr} e da quello di ω/ω_n e quindi per un assegnato sistema, cioè per assegnati valori di σ , σ_{cr} e ω_n , il valore di ϕ dipende solo dal valore di ω .

Per $\sigma = 0$ dalle (7.3-6) risulta:

$$R = \xi_{st} A_\xi = \frac{m\omega^2 e}{K} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = e \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (7.3-13)$$

Il valore del raggio R dato dalla (7.3-13) coincide con il valore di y dato dalla (7.2-3): in entrambi i casi y ed R rappresentano i raggi delle traiettorie circolari descritte dal centro del disco.

In fig.7.3-3,a) è riportata la curva $|R| = f(\omega/\omega_n)$ per $\sigma = 0$.

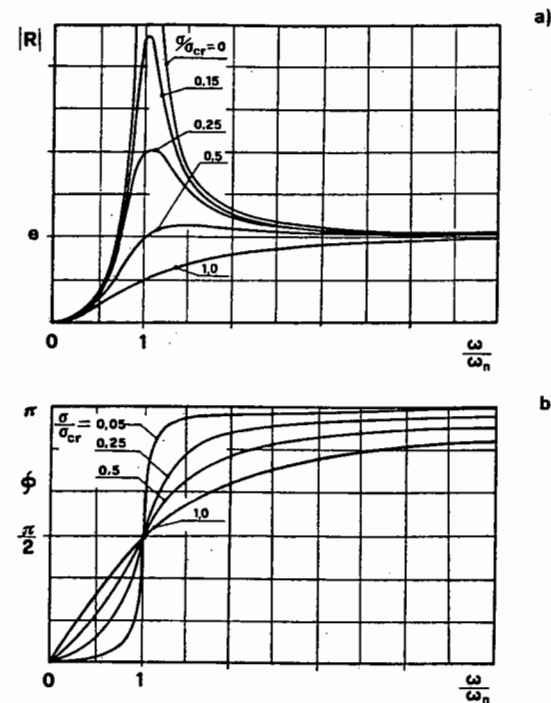


Fig. 7.3-3

La velocità critica ω_{cr} è quella per la quale il raggio R della traiettoria tende all'infinito e risulta essere data da:

$$\omega_{cr} = \omega_n = \sqrt{K/m} \quad (7.3-14)$$

Il valore di ω_{cr} fornito dalla (7.3-14) coincide con quello già trovato nel par.7.2.

Per $\sigma \neq 0$ il valore del raggio R della traiettoria descritta da C è dato

da:

$$R = \xi_{st} A_\xi = e \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7.3-15)$$

Qualunque sia il valore di σ/σ_{cr} risulta:

$$\lim_{\omega/\omega_n \rightarrow \infty} R = \lim_{\omega/\omega_n \rightarrow \infty} e \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = e \quad (7.3-16)$$

Il valore di ω che rende massimo il valore di R si ottiene ponendo:

$$dR/d(\omega/\omega_n) = 0$$

Indicando con ω_M questo valore, esso risulta essere dato da:

$$\omega_M = \omega_n \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2}} \quad (7.3-17)$$

Dalla (7.3-17) si deduce che, partendo dal caso $\sigma/\sigma_{cr} = 0$, il valore di ω/ω_n , per il quale risulta $R = R_{\max}$, cresce al crescere di σ/σ_{cr} (v.fig.7.3-3,a) e tende ad ∞ per:

$$2(\sigma/\sigma_{cr})^2 \rightarrow 1$$

cioè per:

$$\sigma/\sigma_{cr} \rightarrow 0,707$$

Per valori del rapporto $\sigma/\sigma_{cr} > 0,707$ la curva $R = f(\omega/\omega_n)$ non presenta alcun massimo e risulta pertanto monotona (v.fig.7.3-3,a), tendendo in ogni caso ad e per $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$.

Essendo il valore di σ/σ_{cr} in genere molto piccolo ($\sigma/\sigma_{cr} < 0,1$) il valore di ω_M coincide in pratica con ω_n e la velocità critica sarà con buona approssimazione data da:

$$\omega_{cr} = \omega_M \approx \omega_n = \sqrt{K/m}$$

Per quanto riguarda l'andamento di ϕ al variare di ω/ω_n e per diversi valori di σ/σ_{cr} , esso risulta lo stesso di quello già ricavato per le vibrazioni forzate di sistemi ad 1 grado di libertà in presenza di smorzamento viscoso.

In fig.7.3-3,b) è riportato l'andamento di ϕ al variare di ω/ω_n e per diversi valori di σ/σ_{cr} .

Per assegnati valori di σ/σ_{cr} e ω/ω_n è possibile quindi rappresentare l'angolo di fase che la forza centrifuga $m\omega^2$, diretta secondo CG , forma con la deformazione OC dell'albero.

Ciò è stato fatto in fig.7.3-4 per $\sigma/\sigma_{cr} = 0$ ed in fig.7.3-5 per $\sigma/\sigma_{cr} \neq 0$.

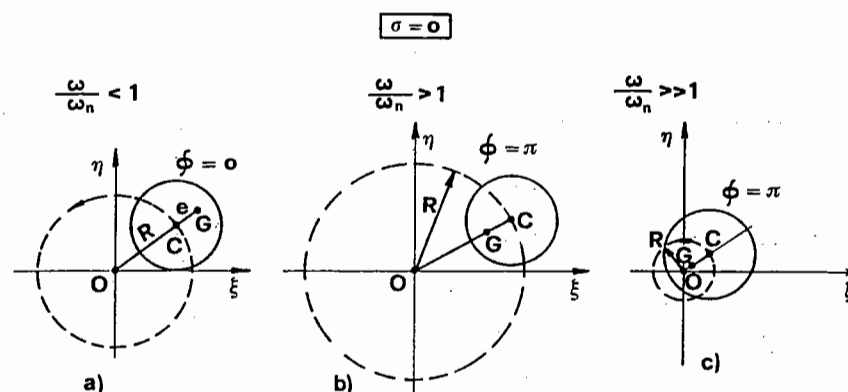


Fig. 7.3-4

Per $\sigma = 0$ e per $\omega < \omega_n$, l'angolo di fase ϕ risulta uguale a zero e quindi durante la rotazione il segmento $CG = e$ ruoterà in fase col segmento $OC = R$ (v.fig.7.3-4,a).

Per $\omega/\omega_n > 1$, cioè per velocità angolari $\omega > \omega_n$, l'angolo di fase ϕ è pari a π : i punti O, C, G risultano ancora allineati, ma il punto G si muove lungo una circonferenza interna a quella descritta da C : il raggio di questa circonferenza è pari a $(R - e)$ (v.fig.7.3-4,b).

Per $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ la deformazione $R \rightarrow -e$ ed il baricentro G del disco tende a portarsi in O (v.fig.7.3-4,c).

Per $\sigma \neq 0$ e per $\omega/\omega_n < 1$, cioè per velocità minori di ω_n , l'angolo di fase ϕ è diverso da zero e minore di $\pi/2$: il disco ruota secondo una traiettoria circolare, col segmento CG ruotato di un angolo ϕ , rispetto al segmento OC , nel verso della rotazione dell'albero (v.fig.7.3-5,a).

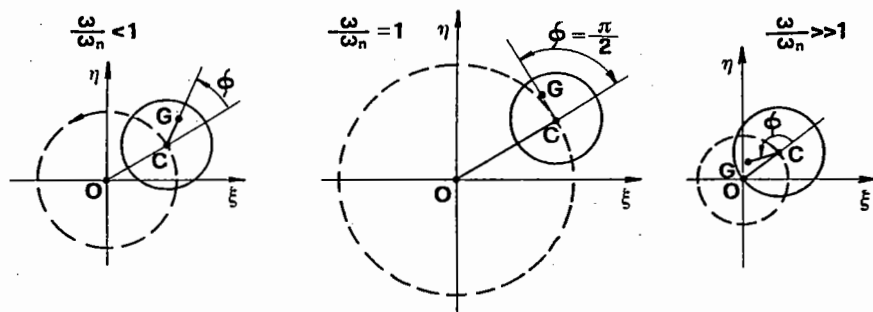


Fig. 7.3-5

Per $\omega = \omega_n$, cioè quando l'albero ruota praticamente alla velocità critica, il segmento CG risulta ruotato di un angolo pari a $\pi/2$ rispetto al segmento OC , sempre nel verso della rotazione del sistema (v.fig.7.3-5,b).

Per $\omega > \omega_n$ e quindi per velocità angolari superiori alla critica, l'angolo di fase è superiore a $\pi/2$ e quindi il baricentro descrive una traiettoria interna a quella descritta da C (v.fig.7.3-5,c). Anche in questo caso per $\omega \rightarrow \infty$, $R \rightarrow -e$ ed il baricentro G del disco tende a disporsi sull'asse dei cuscinetti ed a coincidere quindi con O .

È da osservare che in tutti i casi esaminati nelle figg.7.3-4 e 7.3-5, il segmento OC è la proiezione, nel piano di rappresentazione $\xi\eta$, dell'asse deformato dell'albero.

Da quanto detto si può concludere che il moto del sistema risulta costituito da due moti:

- 1°) Un moto di traslazione del disco, che risulta a sua volta dalla composizione di due oscillazioni armoniche forzate $\xi(t)$ ed $\eta(t)$, dirette lungo due assi ortogonali, di pulsazione ω pari alla velocità angolare del sistema.

Per effetto di questi due moti il centro C del disco descrive una traiettoria circolare con velocità angolare pari ad ω : la sezione S dell'albero, passante per C , si muove quindi lungo una traiettoria circolare restando parallela a se stessa. In fig.7.3-6,a) è stata rappresentata la traiettoria circolare di raggio R , descritta da C , e quattro posizioni del disco C sfasate tra loro di $\pi/2$.

Sul disco è segnato un punto di riferimento P ed il segmento CP che, per quanto detto, si mantiene parallelo a se stesso durante il moto.

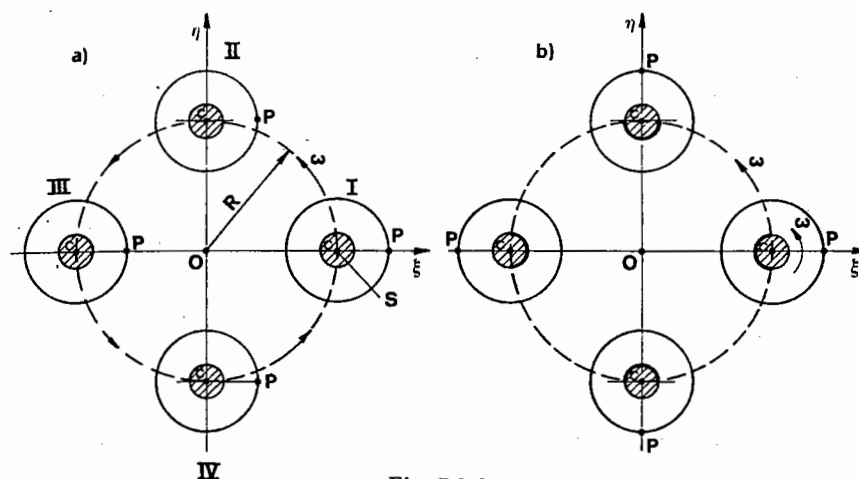


Fig. 7.3-6

Il moto descritto viene indicato come moto di precessione sincrona o "direct whirling".

- 2°) Una rotazione del disco D intorno a C con velocità angolare ω . In fig.7.3-6,b) partendo dalla posizione I, il disco raggiunge le successive posizioni II, III e IV, essendo in ciascuna di esse ruotato di $\pi/2$ (intorno a C) rispetto alla precedente.

Dall'esame della fig.7.3-6,b) si deduce che il moto complessivo del disco è tale che l'albero (tratteggiato in figura) rivolge verso l'interno della traiettoria sempre le stesse fibre, che risultano essere quelle della metà sezione dell'albero, delimitata dalla semicirconferenza indicata con tratto più spesso in fig.7.3-6,b); essendo d'altra parte la traiettoria descritta da C (e da ogni punto dell'asse deformato dell'albero) una circonferenza, si deduce che la sollecitazione flessionale dell'albero risulta – in ogni sezione e per una assegnata velocità angolare – costante durante la rotazione.

Da quanto detto risulta infine che, nel caso in esame, l'unica resistenza di tipo viscoso agente sul sistema è quella del mezzo nel quale il sistema ruota; quella dovuta a fenomeni di isteresi elastica è infatti nulla, essendo la deformazione dell'albero costante durante la rotazione.

Il modello matematico descritto, dovuto, come è stato detto, a Jeffcott, consiste in definitiva nel considerare il moto del disco come risultante di un

moto di precessione e di una rotazione intorno all'asse deformato e consente non solo di determinare la velocità critica del sistema, ma di determinare anche la traiettoria descritta dal centro C del disco.

Esso consente inoltre di tener conto facilmente delle azioni smorzanti e chiarisce il perché, al di sopra della velocità critica, il sistema descrive orbite di raggio via via più piccolo e funziona quindi in condizioni accettabili.

Dal modello matematico descritto risulta, inoltre, che il fenomeno della velocità critica è un fenomeno di risonanza tra le azioni forzanti, dovute allo sbilanciamento del disco, ed il modo naturale di vibrare del sistema.

È opportuno infine osservare che se si tiene conto della deformazione statica, δ_{st} , dell'albero dovuta al peso del disco (v. ipotesi 4 par. 7.2), l'origine della terna fissa $O\xi\eta\zeta$ coincide con la posizione che il centro C del disco assume quando il sistema non ruota (v. fig. 7.3-7). Tutto quanto è stato ricavato nell'ipotesi di deformazione statica trascurabile, è valido rispetto a questo nuovo riferimento.

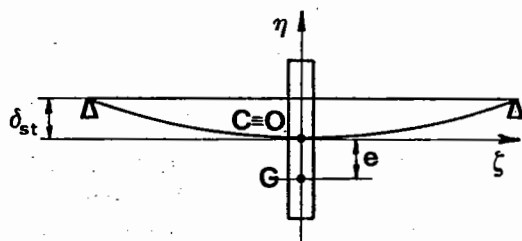


Fig. 7.3-7

7.4 Sistema con supporti non rigidi

Si consideri ancora il sistema costituito da un disco di massa m , calettato nella mezzeria di un albero, che, come nel caso precedente, sarà considerato appoggiato agli estremi.

I due supporti (1) e (2) siano uguali, di massa trascurabile, ma abbiano rigidità diverse nel piano orizzontale (K_ζ) e nel piano verticale (K_η) (v. fig. 7.4-1).

In questo caso le ipotesi semplificative sono:

- 1°) sia trascurabile la massa dell'albero e dei supporti rispetto alla massa m del disco;
- 2°) si ritenga trascurabile la deformazione statica del sistema per effetto del peso del disco, tenendo presente a questo proposito quanto è stato

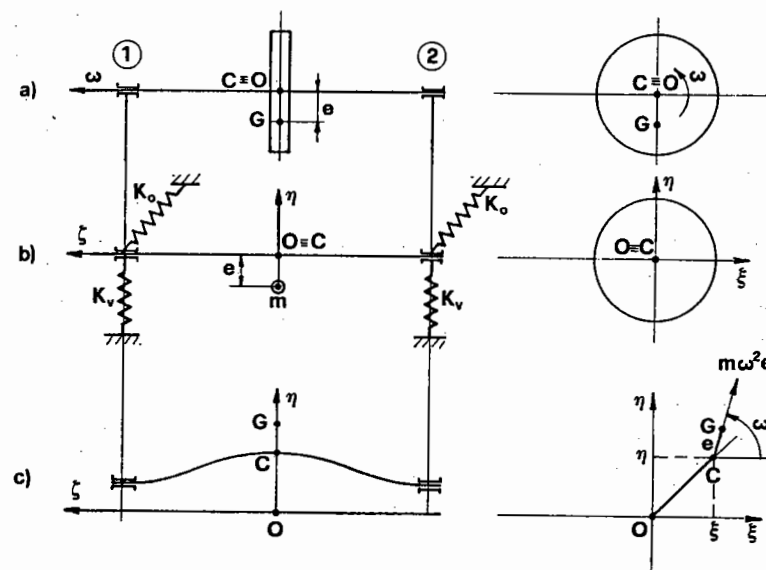


Fig. 7.4-1

Si assuma come riferimento la terna fissa $O\xi\eta\zeta$ di fig. 7.4-1, b).

Durante il moto l'albero si deforma e, data la simmetria del sistema, il moto del disco è anche in questo caso un moto piano e può essere considerato come il moto risultante di una traslazione del disco, e quindi di C , e di una rotazione intorno a C .

In questo caso, a causa della diversa rigidità orizzontale e verticale dei due supporti, la traiettoria del punto C non può essere una circonferenza ed il modello di Jeffcott, per le ragioni già ricordate, è l'unico applicabile.

Posto quindi:

$$\begin{cases} \xi_G = \xi + e \cos \omega t \\ \eta_G = \eta + e \sin \omega t \end{cases} \quad (7.4-1)$$

e ritenendo per semplicità trascurabili le azioni smorzanti, le equazioni del moto della massa m concentrata in G si scrivono:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_G + K_\xi \xi = 0 \\ m\ddot{\eta}_G + K_\eta \eta = 0 \end{cases} \quad (7.4-2)$$