

Le curve $A = f(\omega/\omega_n)$ e $\phi = f(\omega/\omega_n)$ di fig.5.13-1 sono valide anche in questo caso, ma vanno interpretate (v. punti da 1 a 5) tenendo presente che il coefficiente di amplificazione rappresenta in questo caso il rapporto, X_f/X_K , tra l'ampiezza X_f del moto forzato di m e l'ampiezza X_K del moto imposto alla sezione d'incastro O della molla.

5.14 Vibrazioni forzate periodiche

Se la forza eccitante $F(t)$ è periodica, il moto di m può essere studiato scomponendo la $F(t)$ in serie di Fourier; ritenendo nullo il valor medio della $F(t)$, risulta:

$$F(t) = \sum_1^z p F_p \cos(p\omega t + \phi_p) \quad (5.14-1)$$

Poiché il sistema è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente le singole componenti armoniche della $F(t)$.

Il moto forzato $x_p(t)$, eccitato dalla armonica di ordine p risulta dato, per quanto detto nel par.5.13, dalla relazione:

$$x_p(t) = x_{st,p} A_p \cos(p\omega t + \phi_p) = \frac{F_p}{K} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p^2\omega^2}{\omega_n^2}} \cos(p\omega t + \phi_p) \quad (5.14-2)$$

e quindi il moto $x(t)$ della massa m , risultante dalla somma degli z effetti (5.14-2), è dato da:

$$x(t) = \sum_1^z p x_{st,p} \cdot A_p \cos(p\omega t + \phi_p) \quad (5.14-3)$$

Da questa relazione si deduce che:

- 1°) Il moto forzato $x(t)$ è periodico dello stesso periodo T dell'azione forzante $F(t)$;
- 2°) Esso risulta dalla sovrapposizione di tanti moti armonici $x_p(t)$, la cui ampiezza X_p :

$$X_p = x_{st,p} \cdot A_p = \frac{F_p}{K} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p^2\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.14-4)$$

dipende non tanto dall'ampiezza F_p dell'armonica eccitante, quanto dal coefficiente di amplificazione A_p , che risulta più o meno grande a seconda del valore del rapporto $p\omega/\omega_n$: il sistema può essere portato in risonanza da una sola delle armoniche di $F(t)$, anche se questa è di modesta ampiezza.

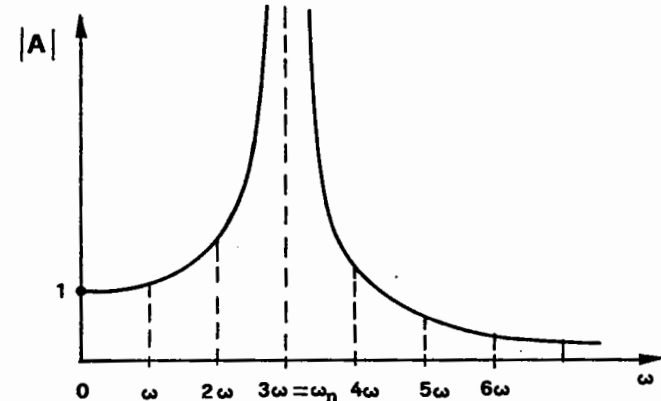


Fig.5.14-1

- 3°) Perché si verifichi tale risonanza è necessario che sia $p\omega = \omega_n$: in fig.5.14-1 è rappresentato il caso in cui, essendo $\omega_n/\omega = 3$, il sistema è portato in risonanza dalla armonica di ordine 3 della $F(t)$.

A risultati analoghi si perviene se il moto forzato è eccitato da un moto periodico della sezione d'incastro della molla.

In questo caso, posto:

$$x_K(t) = \sum_1^z p \cdot X_{kp} \cdot \cos(p\omega t + \phi_p) \quad (5.14-5)$$

il moto $x(t)$ della massa m risulta dato da:

$$x(t) = \sum_1^z p X_{kp} \cdot A_p \cos(p\omega t + \phi_p) \quad (5.14-6)$$

con:

$$A_p = \frac{1}{1 - \frac{p^2\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.14-7)$$

5.15 Esempi di applicazione

La determinazione del moto libero e forzato di un qualsiasi sistema meccanico, non dissipativo, ad 1 grado di libertà può essere effettuata, utilizzando i risultati dello studio del sistema (m, K) , ottenuti nei precedenti paragrafi.

Le equazioni del moto di questi sistemi risultano infatti essere, come si vedrà nel seguito, equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, lineari, a coefficienti costanti, dello stesso tipo della (5.12-1) ovvero della (5.13-2), a seconda che si tratti di moto libero ovvero di moto forzato.

5.15-1 Il pendolo semplice

Si consideri il pendolo semplice di fig. 5.15-1, a) e si supponga che esso stia oscillando liberamente: sia θ la coordinata generalizzata, che ne individua in ogni istante la posizione.

Il momento di richiamo, dovuto alla forza peso, vale $-mgl \sin \theta$, mentre il momento delle forze d'inerzia vale $-ml^2 \ddot{\theta}$: per il principio di d'Alembert, deve essere:

$$-ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

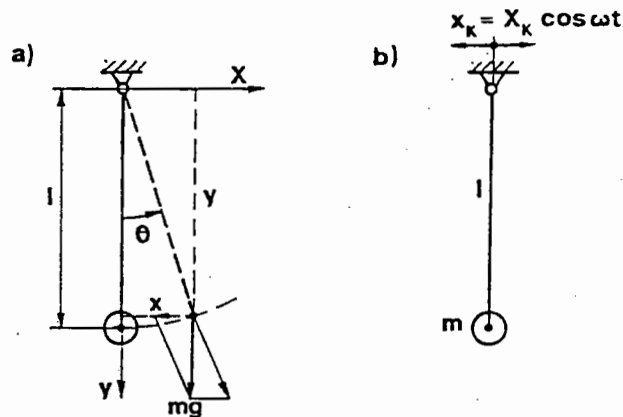


Fig. 5.15-1

Per oscillazioni di piccola ampiezza ($\sin \theta \approx \theta$) si può scrivere quindi:

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \theta = 0 \quad (5.15-1)$$

Essendo questa equazione differenziale simile alla (5.12-1), il moto libero $\theta(t)$ del pendolo è dato per la (5.12-8) dalla relazione:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + (\dot{\theta}_0 / \omega_n) \sin \omega_n t = \Theta \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

$$\omega_n = \text{pulsazione naturale del pendolo} = \sqrt{mgl/ml^2} = \sqrt{g/l}$$

$$\theta_0 = \text{spostamento iniziale;}$$

$$\dot{\theta}_0 = \text{velocità iniziale;}$$

$$\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2 / \omega_n^2};$$

$$\tan \phi_0 = -\dot{\theta}_0 / \omega_n \theta_0.$$

Per oscillazioni di piccola ampiezza al posto di θ può essere assunta, come coordinata generalizzata, la coordinata x di G nel riferimento Oxy segnato in figura.

Infatti in questa ipotesi risulta:

$$x = l \sin \theta \approx l\theta \quad ; \quad y = l \cos \theta \approx l \approx \text{cost}$$

e dalla (5.15-1) si ottiene:

$$ml\ddot{x} + mgx = 0$$

e quindi:

$$m\ddot{x} + (mg/l)x = 0 \quad (5.15-1')$$

Questa relazione esprime l'equilibrio tra la forza di inerzia $-m\ddot{x}$ e la forza di richiamo $-mg \tan \theta \approx -mg \cdot x/l$.

La legge del moto libero $x(t)$ è quindi espressa dalla relazione:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + (v_0 / \omega_n) \sin \omega_n t = X \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

dove:

$$x_0 = \text{spostamento iniziale di } m = \theta_0 \cdot l;$$

$$v_0 = \text{velocità iniziale di } m = \dot{\theta}_0 \cdot l;$$

$$\omega_n = \text{pulsazione naturale} = \sqrt{g/l}.$$

Le leggi del moto $\theta(t)$ ed $x(t)$ sono evidentemente equivalenti.

Per quanto si riferisce al moto forzato del pendolo semplice esso può essere eccitato imponendo alla cerniera O un moto armonico (v. fig.5.15-1,b):

$$x_K = X_K \cos \omega t$$

In questo caso la legge del moto forzato $x_f(t)$ della massa m sarà data, per la (5.13-8'), da:

$$x_f(t) = x_{st} \cdot A \cdot \cos \omega t = X_K \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t$$

5.15-2 Pendolo composto

Si procede nello stesso modo descritto nel paragrafo precedente:

- si considera il pendolo in una posizione θ ;
- si calcola il momento di richiamo dovuto alla forza peso: $-mgd\theta$;
- si scrive l'equilibrio tra il suddetto momento e quello delle forze di inerzia $-I_0\ddot{\theta}$ (I_0 = momento d'inerzia di massa del pendolo rispetto all'asse di oscillazione passante per O):

$$I_0\ddot{\theta} + mgd\theta = 0$$

Dalla (5.12-18) si deduce che:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n) \sin \omega_n t = \Theta \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

$$\omega_n = \text{pulsazione naturale del pendolo} = \sqrt{mgd/I_0};$$

$$\theta_0 = \text{spostamento iniziale};$$

$$\dot{\theta}_0 = \text{velocità iniziale}.$$

C'è da osservare che, avendo indicato con I_G il momento d'inerzia di massa del pendolo rispetto ad un asse passante per G e parallelo all'asse di oscillazione, risulta:

$$I_0 = I_G + md^2 = m(\rho^2 + d^2)$$

con:

$$\rho = \text{raggio di girazione} = \sqrt{I_G/m}$$

L'espressione di ω_n può quindi scriversi:

$$\omega_n = \sqrt{gd/(\rho^2 + d^2)}$$

Indicata con L la lunghezza del pendolo semplice avente la stessa pulsazione naturale ω_n , si può scrivere:

$$\omega_n = \sqrt{gd/(\rho^2 + d^2)} = \sqrt{g/L}$$

e ricavare l'espressione della lunghezza ridotta L del pendolo composto:

$$L = d + \rho^2/d$$

Anche il moto forzato del pendolo composto di fig.5.15-2 può essere eccitato imponendo alla cerniera O un moto armonico $x_K = X_K \cos \omega t$. Il moto forzato $x(t)$ del baricentro G del pendolo è in questo caso dato da:

$$x(t) = x_{st} A \cdot \cos \omega t = X_K [1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)] \cos \omega t$$

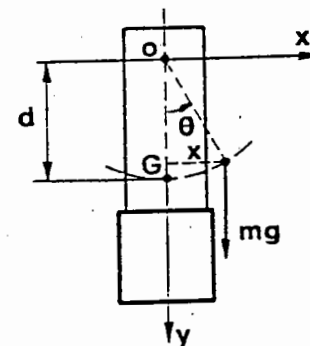


Fig.5.15-2

5.15-3 Pendolo semplice elasticamente vincolato

Nella posizione θ le forze di richiamo sono la forza peso mg e la reazione delle due molle K , pari a $2K a\theta$.

Per l'equilibrio dei momenti rispetto ad O deve essere:

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl\theta + 2Ka^2\theta = 0$$

e quindi:

$$ml^2 \ddot{\theta} + (mgl + 2Ka^2)\theta = 0$$

Tenendo presenti le (5.12-1), (5.12-18) e (5.12-6), la legge del moto $\theta(t)$ risulta data da:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + (\dot{\theta}_0 / \omega_n) \sin \omega_n t = \Theta \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

$$\omega_n = \sqrt{(mgl + 2Ka^2) / ml^2} = \sqrt{g/l + (2K/m)(a^2/l^2)}$$

e con:

$$\theta_0 = \text{spostamento iniziale}; \quad \dot{\theta}_0 = \text{velocità iniziale};$$

$$\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2 / \omega_n^2}; \quad \tan \phi_0 = -\dot{\theta}_0 / \theta_0 \omega_n.$$

È da osservare che per il pendolo rovesciato di fig.5.15-3,b), l'equazione del moto risulta essere la seguente:

$$ml^2 \ddot{\theta} + (2Ka^2 - mgl)\theta = 0$$

poiché il momento dovuto alla forza peso ha lo stesso verso della rotazione θ e per questo motivo costituisce un momento di richiamo negativo.

Dall'equazione del moto si deduce che la pulsazione naturale del sistema è in questo caso data dalla relazione:

$$\omega_n = \sqrt{(2Ka^2 - mgl) / ml^2} = \sqrt{(2K/m)(a^2/l^2) - g/l}$$

Il valore di questa pulsazione diventa immaginario per:

$$g/l > (2K/m)(a^2/l^2)$$

Se è soddisfatta questa relazione, l'equilibrio del pendolo è instabile: infatti, partendo dalla posizione $\theta = 0$ ed imponendo al pendolo rovesciato una rotazione infinitesima $d\theta$, il momento dovuto alla forza peso prevale

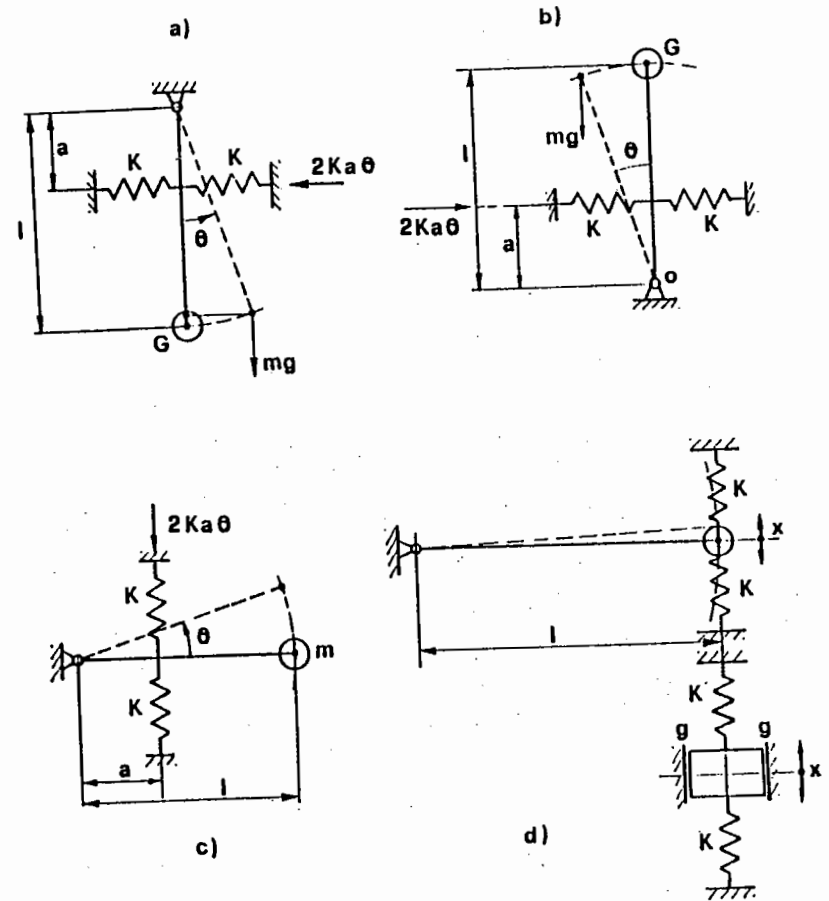


Fig.5.15-3

su quello dovuto alla reazione delle due molle K ed il pendolo si allontana dalla posizione di equilibrio instabile $\theta = 0$.

Nel caso del pendolo orizzontale di fig.5.15-3,c) l'equazione del moto si scrive:

$$ml^2 \ddot{\theta} + 2Ka^2\theta = 0$$

essendo trascurabile la variazione del momento della forza peso, dovuta alla rotazione θ , supposta piccola.

In questo caso il valore della pulsazione naturale ω_n è dato da:

$$\omega_n = \sqrt{2Ka^2/ml^2}$$

e per $a = l$ (v. fig.5.15-3,d) diviene:

$$\omega_n = \sqrt{2K/m}$$

cioè uguale a quello del sistema $(m, 2K)$, riportato nella stessa figura.

Questo risultato si giustifica considerando che, nel caso del pendolo, l'asta, incernierata in O , realizza un vincolo, che, per piccoli valori di x/l ($\approx \theta$), può considerarsi equivalente alle guide g del sistema $(m, 2K)$.

È da osservare infine che il pendolo di fig.5.15-3,d), rappresenta lo schema costruttivo più vicino al modello matematico:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

in quanto la cerniera O può essere realizzata (p.es. con un cuscinetto a sfere) in modo da costituire un vincolo con attriti certamente più piccoli di quelli delle guide g (v. fig.5.15-3,d).

5.15-4 Sistema flessionale

Si consideri il sistema, rappresentato in fig.5.15-4, costituito da una massa m , concentrata in un punto qualsiasi O dell'asse di un'asta flessibile, di massa trascurabile, vincolata agli estremi.

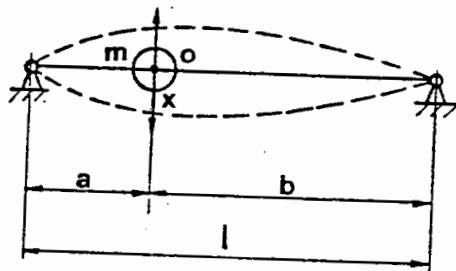


Fig.5.15-4

Il sistema, se è opportunamente eccitato, compie oscillazioni flessionali libere in un piano contenente l'asse dell'asta indeformata.

Nell'ipotesi di oscillazioni di piccola ampiezza è possibile ritenere che la massa m si muova in direzione normale all'asse dell'asta indeformata: in questa ipotesi il sistema si comporta come un sistema ad un grado di libertà ed è possibile assumere, come coordinata lagrangiana, lo spostamento x di m , misurato dall'asse dell'asta indeformata.

L'equazione del moto del sistema si scrive in questa ipotesi:

$$-m\ddot{x} - Kx = 0$$

nella quale con $-K$ si è indicata la reazione elastica, che l'asta esercita su m per uno spostamento $x = 1$ di O .

Questa equazione coincide formalmente con la (5.12-1) e quindi la legge $x(t)$ con la quale oscilla la massa m è data dalla (5.12-18).

È evidente che a parità di materiale, sezione e lunghezza dell'asta, il valore di K è minimo quando il punto O , nel quale è concentrata la massa m , si trova nella mezzeria dell'asta ($a = b = (1/2)l$).

In queste condizioni la pulsazione naturale del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{K/m}$$

risulta minima. Spostandosi il punto O verso uno dei vincoli, i valori di K e di ω_n aumentano, risultando:

$$\lim_{a \rightarrow 0} K = \lim_{a \rightarrow 0} \omega_n = \infty$$

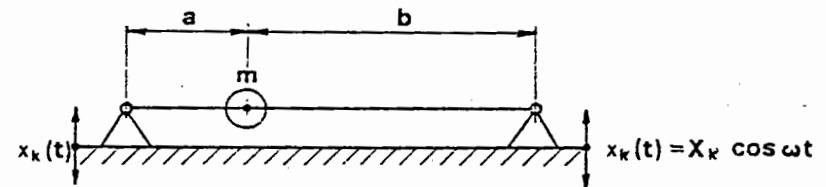


Fig.5.15-4'

Il moto armonico forzato del sistema di fig.5.15-4 può essere studiato ricordando che in ogni caso risulta:

$$x_f(t) = x_{st} A \cos \omega t$$

con:

$$A = \text{coefficiente di amplificazione} = 1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)$$

ed:

$$x_{st} = \begin{cases} = F_0/K \\ = X_K \end{cases}$$

a seconda che la causa eccitante sia una forza $F(t) = F_0 \cos \omega t$, agente sulla massa m , ovvero un moto $x_K(t) = X_K \cos \omega t$ del piano di appoggio del sistema (v. fig. 5.15-4').

5.15-5 Sistema torsionale

Si consideri il sistema, rappresentato in figura 5.15-5, costituito da un disco calettato in una sezione di un'asta non rigida, di massa trascurabile, incastrata agli estremi.

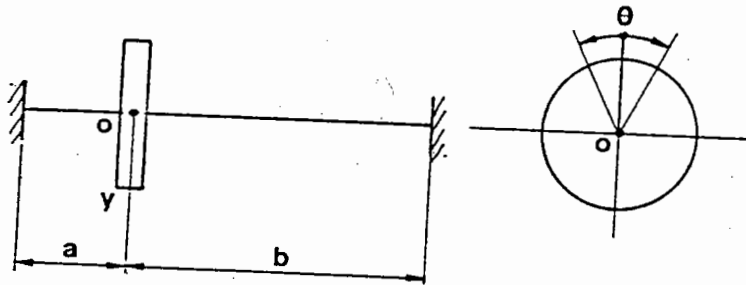


Fig.5.15-5

Il sistema, se è opportunamente eccitato, vibra torsionalmente: il disco compie un'oscillazione angolare $\theta(t)$ intorno al suo asse e l'asta si deforma a torsione.

Indicati con Y il momento d'inerzia di massa del disco e con $-K$ il momento della reazione elastica dell'asta per $\theta = 1$, l'equazione del moto del sistema, per il principio di d'Alembert, si scrive esprimendo l'equilibrio tra il momento delle forze d'inerzia ed il momento della reazione elastica dell'asta:

$$-Y\ddot{\theta} - K\theta = 0$$

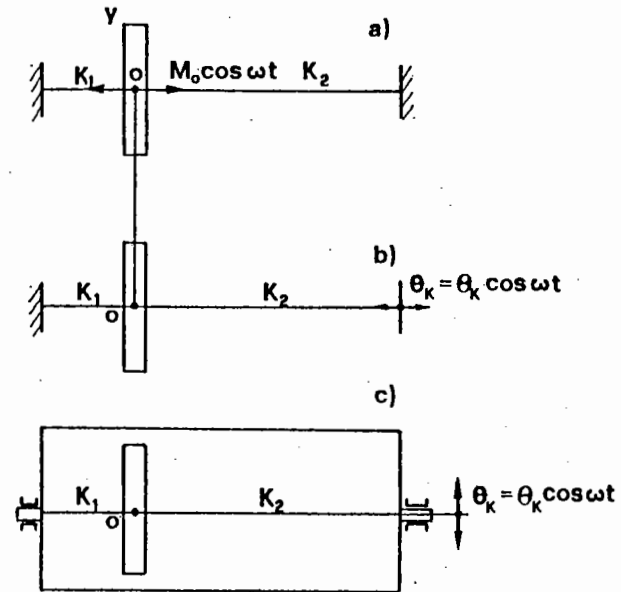


Fig.5.15-5'

Questa equazione è simile alla (5.12-1) e per la (5.12-18) l'oscillazione libera del sistema è data dalla relazione:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n) \sin \omega_n t = \Theta \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

θ_0 = rotazione iniziale del disco;

$\dot{\theta}_0$ = velocità angolare iniziale del disco;

$$\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + (\dot{\theta}_0^2/\omega_n^2)};$$

$$\tan \phi_0 = -\dot{\theta}_0/\theta_0 \omega_n .$$

e con:

$$\omega_n = \sqrt{K/Y}$$

Anche in questo caso i valori di K e di ω_n crescono, se il disco viene calettato in sezioni via via più vicine ad una delle due sezioni d'incastro dell'asta.

Il moto forzato armonico del sistema in esame può essere eccitato in vari modi.

In fig.5.15-5' sono rappresentati tre modi diversi per ottenere la vibrazione forzata del sistema. In fig.5.15-5',a) si è supposto che sul disco agisca una coppia di momento $M_0 \cos \omega t$: l'equazione del moto risulta allora:

$$Y\ddot{\theta} + K\theta = M_0 \cos \omega t$$

con (v. par.5.16):

$$K = K_1 + K_2.$$

La legge del moto forzato $\theta(t)$ del disco è, per la (5.13-4),:

$$\theta_f(t) = \theta_{st} \cdot A \cos \omega t$$

con:

$$\begin{aligned} \theta_{st} &= M_0/K; \\ A &= 1/(1 - \omega^2/\omega_n^2). \end{aligned}$$

Se all'estremo del tronco K (v. fig.5.15-5',b) si impone un moto armonico $\theta_K(t) = \Theta_K \cos \omega t$, l'equazione del moto del disco si scrive:

$$Y\ddot{\theta} + K_1\theta + K_2(\theta - \theta_K) = 0$$

dalla quale si ricava:

$$Y\ddot{\theta} + (K_1 + K_2)\theta = K_2\theta_K = K_2\Theta_K \cos \omega t$$

Si può scrivere infine:

$$\theta_f(t) = \theta_{st} A \cos \omega t = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \Theta_K \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t$$

Se ad entrambi gli estremi del sistema (v. fig.5.15-5',c) si impone un moto $\theta_K = \Theta_K \cos \omega t$, l'equazione del moto si scrive:

$$Y\ddot{\theta} + K(\theta - \theta_K) = 0$$

dalla quale si deduce che:

$$Y\ddot{\theta} + K\theta = K\theta_K = K\Theta_K \cos \omega t$$

Il moto forzato $\theta_f(t)$ del disco sarà dato da:

$$\theta_f(t) = \theta_{st} \cdot A \cos \omega t = \Theta_K \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t$$

e può essere considerato come la sovrapposizione di due effetti del tipo calcolato nel caso di fig.5.15-5',b).

5.16 Coefficienti di rigidità degli elementi elastici

Per tutti i sistemi discreti ad 1 grado di libertà elasticamente vincolati, si è definito come coefficiente di rigidità K dell'elemento elastico, la reazione (col segno cambiato) che l'elemento stesso esercita per uno spostamento unitario (o rotazione unitaria) del punto di applicazione della massa m (o del disco Y).

I valori di K sono calcolabili in funzione della geometria dell'elemento e delle caratteristiche elastiche del materiale di cui esso è costituito.

Nella tabella 5.16-1 sono riportate le formule che permettono il calcolo di K per alcuni elementi elastici più comuni.

Con G ed E si sono indicati i moduli di elasticità del materiale di cui è costituito l'elemento elastico.

Per l'acciaio essi assumono mediamente i seguenti valori:

$$E = \text{modulo di elasticità normale o di Young} = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$G = \text{modulo di elasticità trasversale} = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

I valori dei momenti d'inerzia diametrale I_d e polare I_p della sezione della trave, nell'ipotesi di sezione circolare, sono calcolabili con le formule:

$$I_p = \pi r^4/2 \quad ; \quad I_d = I_p/2 = \pi r^4/4$$

Due o più molle di rigidità K_1, K_2, \dots, K_n , possono essere collegate in serie o in parallelo: in fig.5.16-1 due molle di coefficienti di rigidità K_1 e K_2 sono collegate in parallelo. La rigidità K di questo sistema di molle si determina, considerando che per uno spostamento x della massa m la reazione elastica R è data, in entrambi i casi a) e b), da:

$$R = -K_1x - K_2x = -(K_1 + K_2)x$$

e quindi:

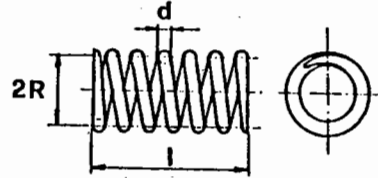
$$K = -R/x = K_1 + K_2$$

Tab. 5.16-1

Molla ad elica cilindrica

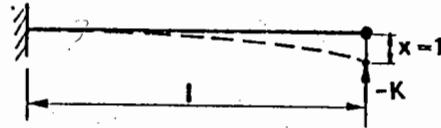
$$K = Gd^4 / 64nR^3$$

n = numero di spire



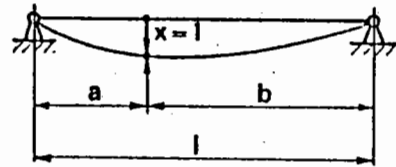
Trave incastrata ad un estremo

$$K = 3EI / l^3$$



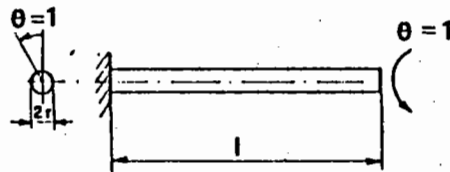
Trave appoggiata agli estremi

$$K = 3EI / a^2b^2$$



Trave soggetta a torsione

$$K = GI_p / l$$



In fig.5.16-2 le due molle K_1 e K_2 sono disposte in serie.

Immaginando, in questo caso, di applicare ad m una forza F , lo spostamento x della massa m è dato dalla somma degli allungamenti x_1 ed x_2 delle due molle:

$$x = x_1 + x_2 = F/K_1 + F/K_2 = F(1/K_1 + 1/K_2)$$

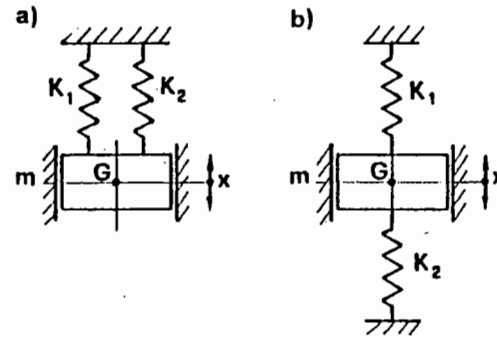


Fig.5.16-1

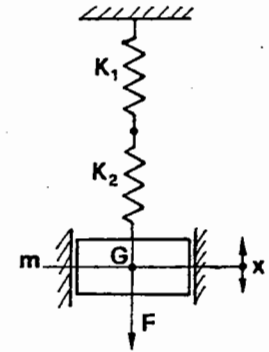


Fig.5.16-2

La reazione R della coppia di molle è quindi data da:

$$R = -F = -Kx$$

avendo indicato con K la rigidità del sistema di molle.

Risulta perciò:

$$1/K = x/F = 1/K_1 + 1/K_2$$

In generale si potrà porre:

molle in parallelo: $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$ (5.16-1)

molle in serie: $1/K = 1/K_1 + 1/K_2 + \dots + 1/K_n$ (5.16-2)

Anche per tronchi di albero di rigidità torsoniale K_1 e K_2 (v. fig.5.16-3) valgono le considerazioni ricavate per molle disposte in serie ed in parallelo.

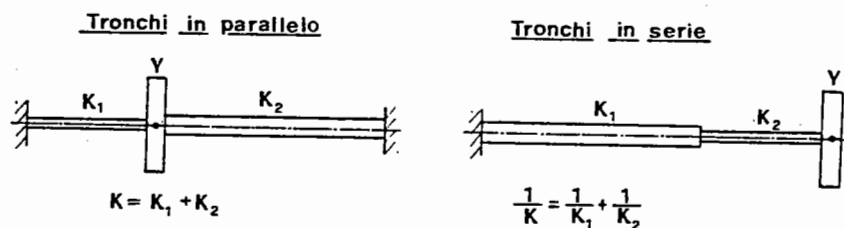


Fig.5.16-3

Per sistemi flessionali il discorso è più complesso e sarà ripreso nel par.7.6.

Esercizio 5.I

Per il pendolo semplice rappresentato in figura ed avente le seguenti caratteristiche:

$$l = 1 \text{ m} ; m = 0,5 \text{ kg}$$

calcolare, nell'ipotesi di piccole oscillazioni, la pulsazione propria ω_n , il periodo naturale T_n , la frequenza f_n .

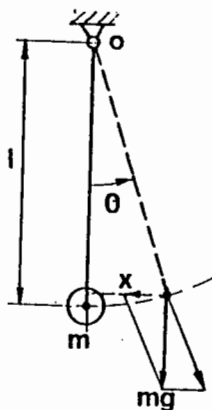


Fig.5.I-1

È da osservare che per piccole oscillazioni (x piccolo rispetto ad l) si può assumere, come coordinata lagrangiana, lo spostamento orizzontale x di m : l'equazione del moto x risulta (v. la 5.15-1')

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

con $-K =$ forza di richiamo per x uguale ad $1 = mg/l$

Svolgimento

La pulsazione ω_n è data da:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{g/l} = \sqrt{9,81} = 3,13 \text{ rad/s}$$

Pertanto si ha:

$$T_n = 2\pi/\omega_n \simeq 2\pi/3,13 = 2 \text{ s} ; f_n = 1/T_n \simeq 0,5 \text{ Hz}$$

Esercizio 5.II

Il pendolo semplice dell'esercizio 5.I viene elasticamente vincolato come in fig.5.II-1,a).

Assegnati:

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$l = \text{lunghezza del pendolo} = 1 \text{ m}$$

$$a = \text{distanza dal fulcro } O \text{ dei punti di attacco delle molle} = 0,3 \text{ m}$$

$$K = \text{rigidità di ciascuna molla} = 30 \text{ N/m}$$

calcolare i valori di ω_n , T_n , f_n .

Svolgimento

Per oscillazioni di piccola ampiezza l'equazione del moto θ può scriversi (v. par.5.15-3):

$$ml^2\ddot{\theta} + (mgl + 2Ka^2) \cdot \theta = 0$$

La pulsazione delle oscillazioni libere risulta quindi:

$$\omega_n = \sqrt{(mgl + 2Ka^2)/ml^2} = \sqrt{g/l + 2Ka^2/ml^2}$$

e per il pendolo assegnato vale:

$$\omega_n = (9,81/1 + 60 \cdot 0,3^2/0,5)^{\frac{1}{2}} = 4,54 \text{ rad/s}$$

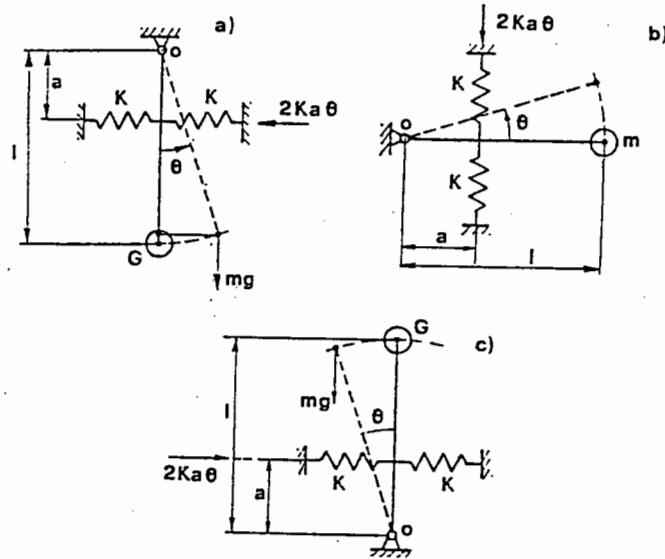


Fig.5.II-1

La frequenza naturale risulta quindi:

$$f_n = \omega_n / 2\pi = 0,72 \text{ Hz} ; T_n = 1/f_n = 1,38 \text{ s}$$

Se lo stesso pendolo viene disposto come nelle figg.5.II-1,b) e 5.II-1,c), le corrispondenti pulsazioni sono (v. par.5.15-3):

$$\omega_n = \sqrt{2Ka^2/ml^2} \quad (\text{pendolo orizzontale})$$

$$\omega_n = \sqrt{(2Ka^2/ml^2 - g/l)} \quad (\text{pendolo capovolto})$$

Per il pendolo disposto orizzontalmente si avrà pertanto:

$$\omega_n = \sqrt{60(0,3)^2/0,5} = 3,28 \text{ rad/s}$$

Per il pendolo capovolto:

$$\omega_n = \sqrt{60(0,3)^2/0,5 - 9,81} = 0,99 \text{ rad/s}$$

Esercizio 5.III

Si vuole determinare sperimentalmente il momento di inerzia di massa I_G , rispetto all'asse di rotazione, della puleggia rappresentata in fig.5.III-1.

La puleggia è sospesa mediante due appoggi a coltello in modo che possa oscillare intorno all'asse OO' .

Svolgimento

La puleggia, sospesa come in figura, si comporta come un pendolo composto: il periodo di oscillazione T_n è dato da:

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{I_0/mgd} = 2\pi\sqrt{(I_G + md^2)/mgd}$$

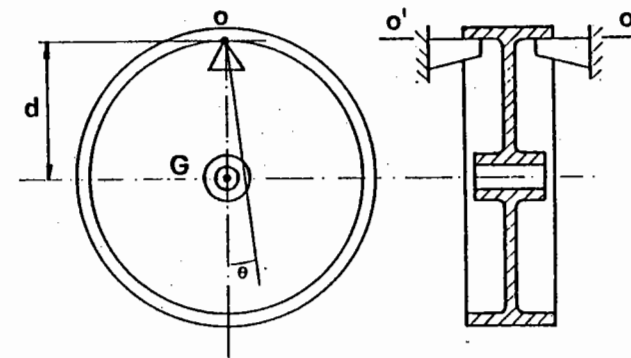


Fig.5.III-1

Misurato sperimentalmente il periodo T_n , nota la massa della puleggia e la distanza del baricentro G dall'asse di oscillazione OO' , si ricava:

$$I_G = T_n^2 mgd / 4\pi^2 - md^2 = md(T_n^2 g / 4\pi^2 - d)$$

Esercizio 5.IV

La determinazione sperimentalmente del momento d'inerzia di massa I_G di una puleggia può essere effettuata in modo diverso da quello indicato nell'esercizio precedente.

La puleggia può essere infatti sospesa ad un punto fisso O mediante un filo di acciaio armonico di diametro e lunghezza opportuni (v. fig.5.IV-1,a), che porta ad un estremo un dischetto B di massa trascurabile, sul quale poggia la puleggia stessa.

Posto il sistema in oscillazione torsionale libera e misurato il periodo di questa oscillazione, si può risalire al valore di I_G .

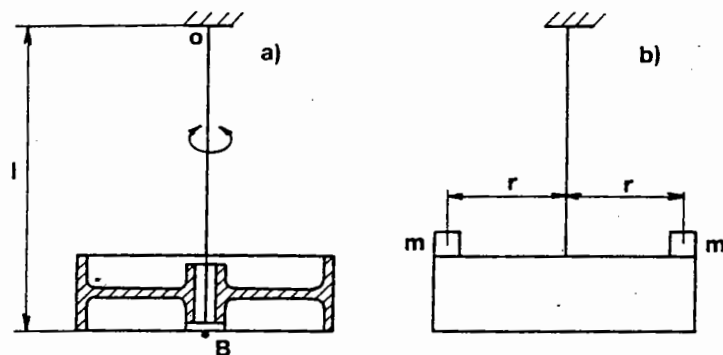


Fig. 5.IV-1

Svolgimento

Misurato il periodo T_n dell'oscillazione torsionale libera, esso risulta legato alla rigidità torsionale K del filo ($K = GI_p/l$) ed al momento d'inerzia di massa I_G dalla nota relazione:

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{I_G/K}$$

dalla quale si ricava:

$$I_G = T_n^2 K / 4\pi^2 \quad (5.IV-1)$$

Per evitare il calcolo della rigidità torsionale K del filo, si possono aggiungere due masse m uguali, note e simmetricamente disposte (vedi fig. 5.IV-1, b) rispetto all'asse di oscillazione.

Il momento d'inerzia di massa della puleggia, con le due masse m disposte nel modo descritto, vale:

$$I'_G = I_G + 2mr^2$$

Misurato il periodo T'_n ($T'_n > T_n$) del sistema di fig. 5.IV-1, b), si potrà scrivere:

$$T'_n = 2\pi\sqrt{(I_G + 2mr^2)/K} \quad (5.IV-2)$$

e ricavare dalle (5.IV-1) e (-2):

$$(T'_n/T_n)^2 = (I_G + 2mr^2)/I_G = 1 + 2mr^2/I_G$$

Il valore di I_G in funzione delle grandezze note T_n , T'_n , m ed r sarà perciò dato da:

$$I_G = 2mr^2 / [(T'_n/T_n)^2 - 1]$$

Si osservi che bisogna fare in modo che il momento d'inerzia di massa delle due masse m rispetto all'asse di oscillazione si possa ritenere dato da $2mr^2$ e risulti inoltre grande abbastanza da avere una differenza ($T'_n - T_n$) molto più grande dell'errore che si commette nella determinazione di T_n e T'_n .

Esercizio 5.V

Per il pendolo composto rappresentato in fig. 5.V-1, calcolare il periodo di oscillazione T_n e determinare le superfici luogo degli assi di sospensione per i quali il periodo di oscillazione si mantiene costante e pari a T_n .

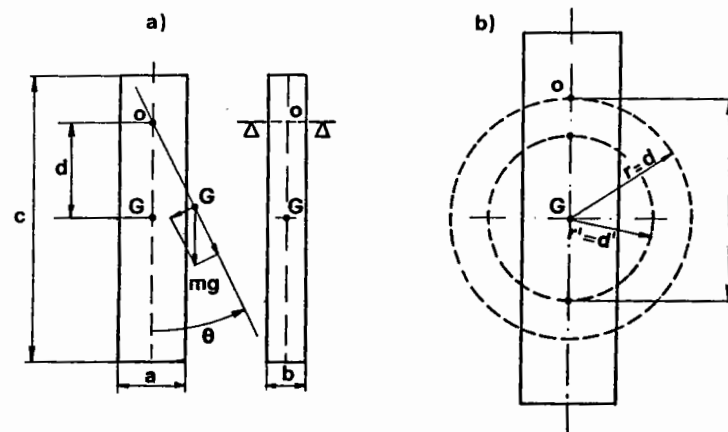


Fig. 5.V-1

Le dimensioni del pendolo e la distanza d dell'asse di sospensione dal baricentro G sono:

$$a = 10 \text{ cm} ; \quad c = 40 \text{ cm} ; \quad d = 15 \text{ cm}$$

Svolgimento

Con i dati assegnati si ottiene:

$$\omega_n = \sqrt{mgd/I_0} = \sqrt{mgd/m(\rho^2 + d^2)} = \sqrt{gd/(\rho^2 + d^2)} = 6.33 \text{ rad/s}$$

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 0.99 \text{ s}$$

con:

$$\rho^2 = (a^2 + c^2)/12 = (100 + 1600)/12 = 141,67 \text{ cm}^2 ; \rho = 11,9 \text{ cm}$$

È interessante notare che il periodo T_n non dipende dalla dimensione b del pendolo.

Per quanto si riferisce alle superfici luogo degli assi di sospensione per i quali $T_n = 0,99 \text{ s}$, è facile osservare che una prima superficie luogo è costituita da un cilindro che interseca il piano di oscillazione in una circonferenza di raggio $r = d$, e centro G .

Ma esistono altri punti O' , situati su un'altra circonferenza, per i quali risulta $T_n = 0,99 \text{ s}$: infatti, detta d' la distanza di tali punti dal baricentro G , si può porre:

$$\omega_n^2 = gd/(\rho^2 + d^2) = gd'/(\rho^2 + d'^2)$$

ossia:

$$d(\rho^2 + d'^2) = d'(\rho^2 + d^2) ; \rho^2(d - d') = dd'(d - d')$$

dalla quale si deduce:

$$\rho^2 = dd' \rightarrow d' = \rho^2/d = 141,67/15 \approx 9,44 \text{ cm}$$

Pertanto i punti di sospensione O' (v. fig.5.VI-1,b) appartengono ad una circonferenza di raggio $d' = 9,44 \text{ cm}$, che è la direttrice della seconda superficie luogo cilindrica ad asse evidentemente normale al piano dell'oscillazione.

Infine, tenendo presente che la lunghezza ridotta l del pendolo è data da:

$$l = (\rho^2 + d^2)/d = \rho^2/d + d$$

si ricava che:

$$l = d + d' = 15 + 9,44 = 24,44$$

e si deduce quindi che la lunghezza ridotta del pendolo è somma delle distanze d e d' .

Esercizio 5.VI

Facendo oscillare la biella, rappresentata in fig.5.VI-1, intorno ad un asse normale al piano di rappresentazione, di traccia O_1 , si è misurato il tempo t_1 corrispondente a 50 oscillazioni. Si è quindi ripetuta l'esperienza, facendo questa volta oscillare la biella intorno ad un asse di traccia O_2 e si è misurato il tempo t_2 corrispondente ancora a 50 oscillazioni.

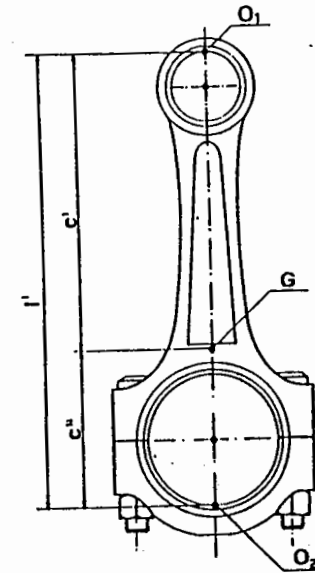


Fig.5.VI-1

Dalle due misure effettuate è risultato:

$$t_1 = 39,9 \text{ s} ; t_2 = 36,1 \text{ s}$$

Sono state inoltre misurate la distanza O_1O_2 e la massa m della biella:

$$O_1O_2 = l' = 191 \text{ mm} ; m = 0,920 \text{ kg}$$

Con i dati così ricavati, determinare la posizione del baricentro G ed il valore del momento d'inerzia di massa I_G della biella rispetto all'asse passante per G e normale al piano di rappresentazione.

Soluzione

I periodi di oscillazione T_1 e T_2 risultano:

$$T_1 = t_1/50 = 0,798 \text{ s} \quad T_2 = t_2/50 = 0,722 \text{ s}$$

È noto inoltre che:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{(I_G + mc'^2)/mgc'} = 2\pi\sqrt{(\rho^2 + c'^2)/gc'}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{(\rho^2 + c''^2)/gc''}$$

con $\rho^2 = I_G/m$.

Si può scrivere quindi:

$$\begin{aligned} T_1^2 g c' / 4\pi^2 &= \rho^2 + c'^2 \\ T_2^2 g c'' / 4\pi^2 &= \rho^2 + c''^2 \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni, si ottiene:

$$(g/4\pi^2)(T_1^2 c' - T_2^2 c'') = (c'^2 - c''^2) = (c' - c'')l'$$

e quindi:

$$(gT_1^2/4\pi^2 - l')c' = (gT_2^2/4\pi^2 - l')c'' = (gT_2^2/4\pi^2 - l')(l' - c')$$

Si ricava infine:

$$c' = (gT_2^2/4\pi^2 - l') \cdot l' / (gT_1^2/4\pi^2 - l' + gT_2^2/4\pi^2 - l') = 0.124 m$$

Dalle espressioni di T_1 e T_2 si ricava inoltre che:

$$I_G = T_1^2 m g c' / 4\pi^2 - m c'^2 = I_{0,1} - m c'^2 = 3.9 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Esercizio 5.VII

Per il sistema ad un grado di libertà, rappresentato in figura, sono assegnati i valori:

$$m = 1 \text{ Kg} ; K_1 = 1000 \text{ N/m} ; K_2 = 2000 \text{ N/m} ;$$

$$K_3 = 20 \text{ N/m} ; K_4 = 10 \text{ N/m} ; K_5 = 2000 \text{ N/m}$$

Calcolare la rigidità K della molla equivalente alle cinque molle presenti nel sistema, la pulsazione naturale ω_n , il periodo T_n e la frequenza f_n del sistema stesso.

Svolgimento

La rigidità equivalente K_{21} delle due molle K_1 e K_2 , disposte in parallelo, è data da:

$$K_{21} = K_1 + K_2$$

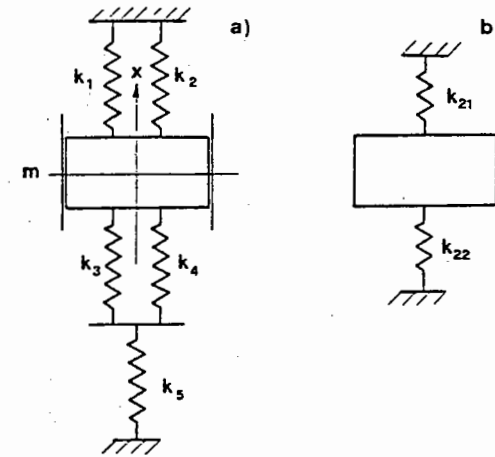


Fig.5.VII-1

mentre per la rigidità equivalente K_{22} delle due molle K_3 e K_4 , disposte in parallelo, e della molla K_5 , disposta in serie alle prime, vale la relazione:

$$1/K_{22} = 1/(K_3 + K_4) + 1/K_5 = (K_3 + K_4 + K_5)/(K_3 + K_4)K_5$$

dalla quale si deduce che:

$$K_{22} = (K_3 + K_4)K_5/(K_3 + K_4 + K_5)$$

La rigidità equivalente K del sistema di 5 molle, risultando essere equivalente a quella delle due molle K_{21} e K_{22} , disposte in parallelo, è data da:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 + (K_3 + K_4)K_5/(K_3 + K_4 + K_5) = \\ &= 3000 + 30 \cdot 2000/2030 = 3000 + 29,55 = 3029,55 \text{ N/m} \end{aligned}$$

La pulsazione, il periodo, la frequenza naturali del sistema sono quindi dati da:

$$\omega_n = \sqrt{(K/m)} = \sqrt{3029,55/1} = 55 \text{ rad/s}$$

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 0,114 \text{ s} ; f_n = 1/T_n = 8,75 \text{ Hz}$$

Esercizio 5.VIII

Determinare la pulsazione naturale ω_n con la quale oscilla la colonna liquida del tubo manometrico rappresentato in fig.5.VIII-1.

Svolgimento

Indicando con:

l = lunghezza rettificata della colonna liquida,

Ω = sezione del tubo ad U,

δ = densità del liquido manometrico,

l'equazione del moto della massa m del liquido manometrico può essere scritta nella forma:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

con:

$$m = l\Omega\delta$$

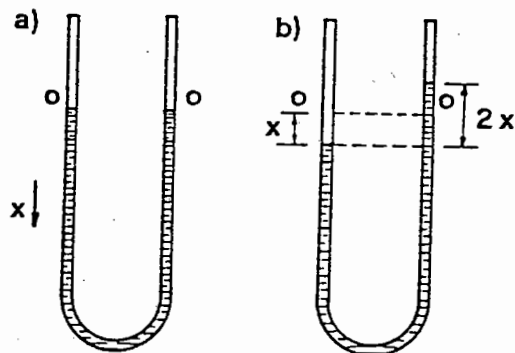


Fig.5.VIII-1

Per il calcolo della rigidità K del sistema, si supponga che il livello del liquido manometrico, ad es. nel ramo di sinistra del tubo, si abbassi di un tratto x : la forza di richiamo sarà quella esercitata dal peso del tratto di colonna liquida di lunghezza $2x$, presente nel ramo di destra:

$$Kx = \Omega\delta g 2x \quad ; \quad K = 2\Omega\delta g$$

La pulsazione naturale sarà quindi data da:

$$\omega_n = \sqrt{2\Omega\delta g / l\Omega\delta} = \sqrt{2g/l}$$

Si osservi che la pulsazione ω_n non dipende né dalla sezione Ω del tubo né dalla densità del liquido manometrico: tale pulsazione dipende, oltre che dall'accelerazione di gravità, solo dalla lunghezza rettificata della colonna liquida.

Si osservi ancora che tale pulsazione è anche indipendente da una eventuale differenza di livello del liquido, dovuta ad una differenza di pressione nei due rami del tubo manometrico, in quanto sia la massa m , che la rigidità K del sistema rimangono invariate.

Da quanto detto risulta che per $l = 1$ m:

$$\omega_n = \sqrt{2 \cdot 9,81/1} = 4,43 \text{ rad/s} \quad ; \quad T_n = 2\pi/\omega_n = 1,42 \text{ s}$$

Esercizio 5.IX

Un tubo manometrico (v. fig.5.IX-1) è collegato ad una condotta nella quale scorre un gas a bassa pressione relativa.

Il valore di tale pressione non è costante, ma varia con legge armonica, avente un periodo pari a 0,2 s, del tipo:

$$p(t) = p_0 + p_1 \cdot \cos \omega t$$

con $p_1/p_0 = 0,5$.

Determinare la lunghezza l della colonna liquida, che consente una indicazione della pressione media p_0 con errori di entità trascurabile.

Svolgimento

Per effetto della pressione media p_0 il dislivello h_0 nei due rami del tubo risulta dato dalla relazione:

$$p_0\Omega = h_0\delta g\Omega \rightarrow h_0 = p_0/\delta g$$

La massa del liquido manometrico, sottoposta ad una forza periodica $\Omega p_1(t)$, compie delle oscillazioni forzate di periodo T pari a 0,2 s.

La legge di tali oscillazioni forzate è del tipo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{st} A \cdot \cos \omega t = (\Omega \cdot 0,5 p_0 / 2\Omega\delta g) [1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)] \cos \omega t = \\ &= 0,25(p_0/\delta g) [1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)] \cos \omega t = 0,25 h_0 [1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)] \cos \omega t \end{aligned}$$

Se si fissa $\omega/\omega_n = 5$, si avrà:

$$x(t) \approx -0,01 h_0 \cos \omega t$$

e l'ampiezza dell'oscillazione forzata risulta pari ad $1/100$ dell'altezza h_0 e risulta quindi trascurabile rispetto ad h_0 .

Per ottenere questo risultato occorre che:

$$\omega_n = \omega/5 = 2\pi/(0,2 \cdot 5) = 2\pi \text{ rad/s}$$

Poiché, come risulta dall'esercizio precedente, la pulsazione naturale ω_n è data da:

$$\omega_n = \sqrt{2g/l}$$

dovrà essere:

$$l = 2g/\omega_n^2 = 2 \cdot 9,81/4\pi^2 \approx 0,5 \text{ m}$$

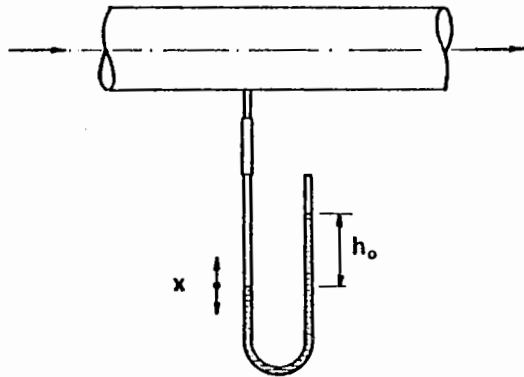


Fig.5.IX-1

È da osservare che tubi manometrici con lunghezza rettificata della colonna liquida maggiori di $0,5 \text{ m}$ portano a valori di ω_n più bassi ed a valori dell'ampiezza delle oscillazioni forzate minori di $1/100$ di h_0 .

5.17 Sistemi dissipativi: vibrazioni libere

Le azioni smorzanti presenti in un sistema meccanico sono di natura diversa: come si è accennato nel par.5.12 esse sono dovute alla resistenza del mezzo, nel quale il sistema oscilla, alle resistenze d'attrito presenti nei vincoli, al fenomeno d'isteresi elastica, dovuto alla variazione periodica delle sollecitazioni degli elementi elastici presenti nel sistema.

Per tener conto di queste azioni smorzanti nella maniera più semplice, nel caso di sistemi discreti si accetta l'ipotesi che sulle masse concentrate

m agiscano forze resistenti del tipo $-\sigma\dot{x}$, proporzionali alla prima potenza della velocità \dot{x} di m secondo una costante σ e di verso opposto ad x .

Azioni smorzanti di questo tipo sono dette viscoso e la costante σ viene indicata come coefficiente di smorzamento viscoso o più semplicemente come smorzamento viscoso o ancora più semplicemente come smorzamento.

Riprendendo in esame il sistema ad un grado di libertà di fig.5.12-1, una resistenza al moto del tipo descritto può essere esercitata sulla massa m da uno smorzatore (v. fig.5.17-1), costituito da un cilindro, collegato rigidamente alla massa m , entro il quale può scorrere un pistone a perfetta tenuta, collegato ad un punto fisso O_1 e recante una serie di fori calibrati di piccolo diametro. Il cilindro sia pieno di un fluido viscoso, p.es. olio minerale.

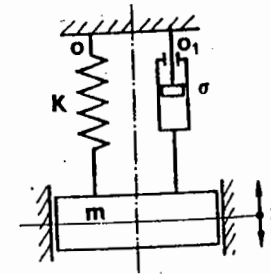


Fig.5.17-1

Durante l'oscillazione della massa m , il moto relativo tra pistone e cilindro dello smorzatore costringe il fluido a passare attraverso i fori calibrati con un moto che risulta laminare.

L'equazione del moto libero della massa m si ottiene scrivendo la condizione di equilibrio tra le forze agenti (reazione della molla $= -Kx$, reazione dello smorzatore $= -\sigma\dot{x}$ e la forza di inerzia $= -m\ddot{x}$, tutte dirette secondo l'asse x):

$$-m\ddot{x} - \sigma\dot{x} - Kx = 0$$

L'equazione del moto può quindi scriversi nella forma:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = 0 \quad (5.17-1)$$

L'equazione differenziale (5.17-1) rappresenta il modello matematico del moto libero di un sistema ad 1 grado di libertà, caratterizzato dai coefficienti costanti m, σ, K .

L'integrale generale $x(t)$ della (5.17-1) si ottiene con lo stesso metodo applicato nella soluzione della (5.12-1), ponendo cioè nella (5.17-1):

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \quad (5.17-2)$$

con C e λ costanti.

Con tale sostituzione si ottiene:

$$mC\lambda^2 e^{\lambda t} + \sigma C\lambda e^{\lambda t} + KCe^{\lambda t} = 0 \quad (5.17-3)$$

e quindi:

$$\lambda^2 + (\sigma/m)\lambda + K/m = 0 \quad (5.17-4)$$

La (5.17-4), indipendente da t , è l'equazione (algebraica) caratteristica dell'equazione differenziale (5.17-1).

Avendo già posto:

$$\omega_n = \text{pulsazione naturale} = \sqrt{K/m} \quad (5.17-6)$$

le due radici λ_1 e λ_2 dell'equazione (2.17-4), risultano essere le seguenti:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma/2m \pm \sqrt{(\sigma/2m)^2 - \omega_n^2} \quad (5.17-7)$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale (5.17-1) sarà quindi dato da:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5.17-8)$$

con λ_1 e λ_2 funzioni dei coefficienti (m, σ, K) del sistema e C_1 e C_2 costanti di integrazione, dipendenti dalle condizioni iniziali (x_0 e v_0).

La legge del moto $x(t)$, data dalla (5.17-8), ha caratteristiche sostanzialmente diverse a seconda che per il sistema in esame risulti:

$$\sigma/2m \geq \omega_n \quad (5.17-9)$$

cioè a seconda che il coefficiente di smorzamento σ soddisfi alle relazioni:

$$\sigma \geq 2m\omega_n = 2m\sqrt{K/m} = 2\sqrt{mK} \quad (5.17-10)$$

Indicato con:

$$\sigma_{cr} = \text{smorzamento critico} = 2\sqrt{mK} \quad (5.17-11)$$

le relazioni (5.17-9) possono scriversi:

$$\sigma \geq \sigma_{cr} \quad (5.17-12)$$

È da osservare che per un assegnato sistema (m, K), il valore di σ_{cr} resta definito dalla (5.17-11).

Se è $\sigma > \sigma_{cr}$, cioè se lo smorzamento σ del sistema è maggiore dello smorzamento critico σ_{cr} i valori di λ_1 e λ_2 forniti dalla (5.17-7) risultano reali e negativi.

Posto:

$$q = \sqrt{(\sigma/2m)^2 - \omega_n^2} \quad (5.17-13)$$

e tenendo presente che:

$$\sigma/2m = (\sigma/\sigma_{cr}) \cdot 2\sqrt{mK}/2m = (\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \quad (5.17-14)$$

le radici reali e negative $\lambda_{1,2}$ fornite dalla (5.17-7) possono scriversi:

$$\lambda_{1,2} = -(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\sigma/\sigma_{cr})^2 - 1} = -(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \pm q \quad (5.17-15)$$

La legge del moto $x(t)$, data dalla (5.17-8), può così scriversi:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt})$$

e tenendo presenti le relazioni:

$$e^{\pm qt} = \cosh qt \pm \sinh qt \quad (5.17-16)$$

può infine scriversi:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (A \cosh qt + B \sinh qt) \quad (5.17-17)$$

con:

$$A = C_1 + C_2 \quad B = C_1 - C_2$$

Le costanti di integrazione A e B sono calcolate in funzione delle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (5.17-18)$$

Derivando a questo scopo la (5.17-17):

$$\dot{x}(t) = -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (A \cos hqt + B \sin hqt) + e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (Aq \sin hqt + Bq \cos hqt) \quad (5.17-19)$$

ed imponendo le condizioni iniziali nelle espressioni di $x(t)$ e $\dot{x}(t)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ v_0 &= -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n A + Bq \end{aligned} \quad (5.17-20)$$

Le costanti di integrazione risultano quindi date da:

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= (v_0 + x_0 \omega_n \frac{\sigma}{\sigma_{cr}}) / q \end{aligned} \quad (5.17-21)$$

La legge del moto $x(t)$ per la (5.17-17) risulta infine essere:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} \left\{ x_0 \cosh qt + \left[(v_0 + x_0 \omega_n \frac{\sigma}{\sigma_{cr}}) / q \right] \sinh qt \right\} \quad (5.17-22)$$

Esaminando la (5.17-22) o più semplicemente la (5.17-8) con λ_1 e λ_2 reali e negative, si conclude che, comunque si ecciti il moto libero di m , $x(t)$ tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow \infty$.

In fig.5.17-2 è rappresentata la legge del moto $x(t)$ per diverse condizioni iniziali.

Si può concludere quindi che per $\sigma > \sigma_{cr}$ il moto libero della massa m non si presenta come una vibrazione: un moto di questo tipo viene indicato come aperiodico.

Se è $\sigma = \sigma_{cr}$, l'equazione caratteristica ammette una radice doppia: dalla (5.17-7) si ottiene infatti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\sigma_{cr}/2m = -2\sqrt{mk}/2m = -\omega_n$$

In questo caso l'integrale generale è dato da:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (5.17-23)$$

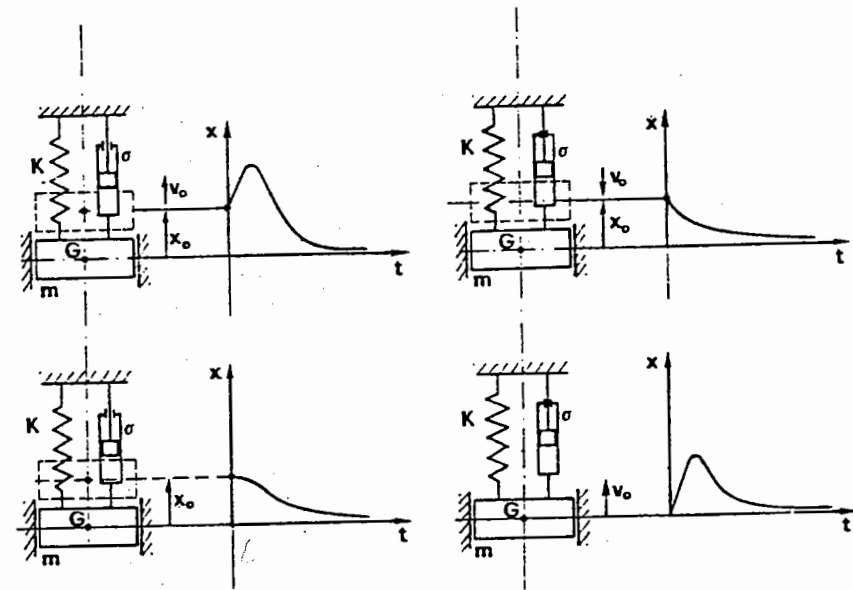


Fig.5.17-2

Le costanti di integrazione C_1 e C_2 si ricavano al solito dalla (5.17-23) e dalla:

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (5.17-24)$$

tenendo presente che $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ debbono soddisfare alle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Si ottiene così il sistema:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \\ v_0 &= C_2 - \omega_n C_1 \end{aligned}$$

dal quale si ricava:

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ C_2 &= v_0 + \omega_n x_0 \end{aligned}$$

La legge del moto $x(t)$ risulta quindi data da:

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t] e^{-\omega_n t} \quad (5.17-25)$$

ed il moto della massa m è, anche in questo caso, aperiodico e qualitativamente rappresentato dai diagrammi $x(t)$ di fig.5.17-2.

Se è $\sigma < \sigma_{cr}$ le radici dell'equazione caratteristica (5.17-4) sono complesse e coniugate, risultando dalla (5.17-7):

$$\lambda_{1,2} = -\sigma/2m \pm i\omega_n \sqrt{1 - (\sigma/2m\omega_n)^2}$$

Tenendo presente la (5.17-14) si può scrivere:

$$\lambda_{1,2} = -(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2}$$

Posto:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2} \quad (5.17-26)$$

l'integrale generale della (5.17-1) può scriversi:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (C_1 e^{i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t})$$

e, tenendo presenti le formule di Eulero (5.12-9), si ottiene infine:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} C \cos(\omega_s t + \phi_0) \quad (5.17-27)$$

con:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan \phi_0 = -B/A$$

Le costanti di integrazione A e B si ottengono come al solito dalla (5.17-27) e dalla:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t) + \\ & + e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} (-A\omega_s \sin \omega_s t + B\omega_s \cos \omega_s t) \end{aligned} \quad (5.17-28)$$

imponendo che la $x(t)$ e la $\dot{x}(t)$ soddisfino alle condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Si ottiene così il sistema:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ v_0 &= -A\omega_n \sigma/\sigma_{cr} + B\omega_s \end{aligned}$$

dal quale si ricavano i valori:

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= (v_0 + x_0 \omega_n \sigma/\sigma_{cr})/\omega_s \end{aligned}$$

La legge del moto $x(t)$, data dalla (5.17-27), risulta così completamente definita.

Dall'esame di questa relazione si deduce che il moto libero della massa m può essere considerato come una vibrazione armonica di pulsazione ω_s di ampiezza $C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}$, decrescente con t : questo moto viene spesso indicato come moto armonico smorzato.

Un esame più attento della (5.17-27) mette in evidenza che:

- 1°) la $x(t)$ si annulla ad intervalli di tempo $T_s = 2\pi/\omega_s$;
- 2°) anche la $\dot{x}(t)$ si annulla con lo stesso periodo;
- 3°) il valore della pulsazione ω_s della vibrazione libera smorzata, dato dalla relazione:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2} \quad (5.17-26)$$

diminuisce al crescere del rapporto σ/σ_{cr} : per un assegnato sistema (m, K) il periodo T_s cresce al crescere dello smorzamento σ ;

- 4°) se si traccia il diagramma dello spostamento x della massa m in funzione del tempo, tale diagramma si presenta come in fig.5.17-3.

Le curve di equazione:

$$x_e(t) = \pm C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} \quad (5.17-29)$$

sono le curve inviluppo della curva:

$$x(t) = C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} \cos(\omega_s t + \phi_0) \quad (5.17-27)$$

e prendono il nome di curve di estinzione.

Questa affermazione si giustifica osservando che per tutti i valori di t per i quali risulta:

$$\cos(\omega_s t + \phi_0) = \pm 1$$

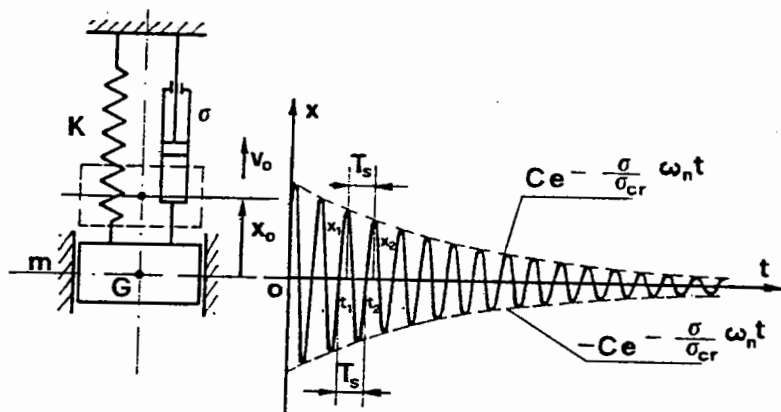


Fig.5.17-3

cioè per $(\omega_s t + \phi_0) = K\pi$ con $K = 0, 1, 2, \dots$, le due curve hanno un punto in comune, risultando in questi istanti:

$$x = x_e$$

e che in questi punti le due curve hanno la stessa tangente; infatti risulta:

$$\dot{x}_e(t) = \mp C(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}$$

$$\dot{x}(t) = -C(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} \cos(\omega_s t + \phi_0) - C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} \omega_s \sin(\omega_s t + \phi_0)$$

e quindi per $(\omega_s t + \phi_0) = K\pi$:

$$\dot{x}_e = \dot{x}$$

5°) indicato con t_1 l'istante in cui la $x(t)$ assume il valore massimo x_1 (v. fig.5.17-3) ed essendo, per quanto detto in 2°):

$$t_2 = t_1 + T_s$$

l'istante in cui la $x(t)$ assume il valore massimo successivo x_2 , si può scrivere:

$$x_1 = C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t_1} \cos(\omega_s t_1 + \phi_0)$$

$$x_2 = C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n (t_1 + T_s)} \cos(\omega_s t_1 + \phi_0 + 2\pi)$$

e quindi:

$$x_1/x_2 = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t_1} / e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n (t_1 + T_s)} = e^{\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n T_s} = e^{\frac{\sigma}{2m}T_s} \quad (5.17-30)$$

Le ampiezze dell'oscillazione decrescono quindi secondo una progressione geometrica di ragione $e^{\frac{\sigma}{2m}T_s}$.

Passando ai logaritmi la (5.17-30) si scrive:

$$\ln(x_1/x_2) = (\sigma/2m)T_s$$

Posto:

$$\delta = \ln(x_1/x_2)$$

si può infine scrivere:

$$\delta = \ln(x_1/x_2) = \ln x_1 - \ln x_2 = (\sigma/2m)T_s \quad (5.17-31)$$

Questa relazione esprime che i logaritmi naturali delle ampiezze dell'oscillazione libera smorzata decrescono secondo una progressione aritmetica di ragione $\delta = (\sigma/2m)T_s$: δ prende il nome di decremento logaritmico.

Se si determinano sperimentalmente i valori di δ e di T_s , il valore di σ può essere ricavato dalla (5.17-31).

A questo riguardo va osservato che se si registra l'oscillazione libera smorzata di un sistema e sulla registrazione (v. fig.5.17-4) si leggono i valori delle ampiezze x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \delta &= (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n)/n = \\ &= [(\ln x_1 - \ln x_2) + (\ln x_2 - \ln x_3) + \dots]/n = \\ &= (\ln x_1 - \ln x_{n+1})/n \end{aligned}$$

Gli scarti tra il valore di δ calcolato con la relazione:

$$\delta = (\ln x_1 - \ln x_{n+1})/n$$

ed i valori di δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) calcolati con la:

$$\delta_i = \ln x_i - \ln x_{i+1}$$

forniscono spesso indicazioni utili sulla validità del modello matematico (5.17-1): infatti l'ipotesi di smorzamento viscoso, che ha permesso di scrivere la (5.17-1), porta a valori nulli degli scarti suddetti ($\delta_i = \delta$) e quindi se

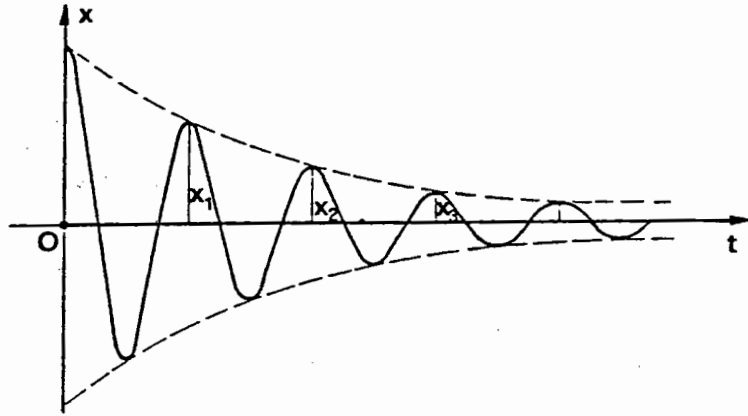


Fig. 5.17-4

dalla registrazione si deducono scarti diversi da zero, ciò sta ad indicare che lo smorzamento del sistema non è di natura viscosa e l'entità degli scarti è la misura della validità dell'ipotesi.

A questo riguardo va osservato che i risultati dell'analisi effettuata sono in genere in buon accordo con i risultati sperimentali richiamati nel par. 5.8.

È tuttavia da tener presente che, mentre dalla legge del moto $x(t)$, che si ricava dalla (5.17-1), si deduce che, per qualsiasi valore del rapporto σ/σ_{cr} , il moto della massa m tende a zero per $t \rightarrow \infty$, dall'esperienza si deduce invece che il moto libero si spegne completamente dopo un tempo finito.

Questa differenza di comportamento dipende dall'aver ipotizzato uno smorzamento viscoso, cioè proporzionale alla velocità.

5.18 Vibrazioni forzate armoniche

Se sulla massa m del sistema (m, σ, K) di fig. 5.18-1 agisce una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, l'equazione del moto (v. fig. 5.18-1) risulta essere:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \quad (5.18-1)$$

La soluzione di questa equazione differenziale (lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti, completa) si ottiene con lo stesso procedimento descritto nel par. 5.13.

L'integrale generale della (5.18-1) è dato da:

$$x(t) = x_i(t) + x_f(t) \quad (5.18-2)$$

con:

$x_i(t)$ = integrale generale dell'omogenea associata = moto libero di m ;

$x_f(t)$ = integrale particolare della (5.18-1) = moto forzato di m .

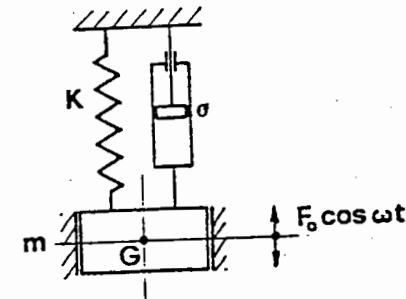


Fig. 5.18-1

Limitandoci a considerare il moto $x(t)$ dopo il transitorio iniziale, quando cioè il moto libero $x_i(t)$ è ormai trascurabile, si può porre:

$$x(t) = x_f(t) = X_f \cos(\omega t - \phi) \quad (5.18-3)$$

Anche in questo caso il moto forzato è armonico della stessa pulsazione ω dell'azione forzante, ma, a differenza dell'oscillazione forzata in assenza di smorzamento, esso presenta un ritardo di fase ϕ rispetto alla causa eccitante.

Mentre dal punto di vista analitico la necessità di introdurre l'incognita ϕ deriva dalla impossibilità di soddisfare alla (5.18-1) con un moto armonico $X_f \cos \omega t$, dal punto di vista fisico il ritardo di fase deriva dal principio generale che l'effetto (in questo caso la vibrazione forzata) non può che essere in ritardo rispetto alla causa (l'azione eccitante) che lo determina.

Le incognite X_f e ϕ vengono determinate sostituendo la (5.18-3) nell'equazione del moto.

Si ottiene così:

$$-m\omega^2 X_f \cos(\omega t - \phi) - \sigma\omega X_f \sin(\omega t - \phi) + K X_f \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t \quad (5.18-4)$$

relazione che deve essere soddisfatta per ogni valore di t ; in particolare per:

$$\begin{aligned} \omega t - \phi = 0 &\longrightarrow (K - m\omega^2)X_f = F_0 \cos \phi \\ \omega t - \phi = \pi/2 &\longrightarrow -\sigma\omega X_f = -F_0 \sin \phi \end{aligned} \quad (5.18-5)$$

Dividendo membro a membro la seconda per la prima delle (5.18-5), si ottiene:

$$\tan \phi = \sigma\omega / (K - m\omega^2) \quad (5.18-6)$$

mentre quadrando e sommando, si ottiene:

$$X_f = F_0 / \sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (\sigma\omega)^2} \quad (5.18-6')$$

In funzione dei rapporti adimensionali σ/σ_{cr} ed ω/ω_n le (5.18-6) e (5.18-6') si scrivono:

$$\tan \phi = \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.18-7)$$

$$X_f = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (5.18-8)$$

Si indichi con x_{st} lo spostamento che la massa m subisce per la applicazione statica di una forza pari ad F_0 (spostamento statico) e si osservi che anche in questo caso ($\sigma \neq 0$) risulta:

$$x_{st} = F_0 / K \quad (5.18-9)$$

in quanto lo smorzatore σ non può esercitare alcuna reazione in condizioni di equilibrio statico ($\dot{x} = 0$).

Se, d'altra parte, si indica con A il coefficiente di amplificazione inteso, come già è stato fatto nel par.5.13, come rapporto tra l'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata e lo spostamento statico x_{st} , risulta dalla (5.18-8):

$$X_f = x_{st} \cdot A \quad (5.18-10)$$

con:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (5.18-11)$$

In conclusione il moto forzato $x_f(t)$ risulta dato da:

$$x_f(t) = x_{st} \cdot A \cos(\omega t - \phi) \quad (5.18-12)$$

con x_{st} , A e ϕ , dati rispettivamente dalle (5.18-9), (5.18-11) e (5.18-7).

Questi risultati valgono evidentemente anche per $\sigma = 0$: in questo caso i valori di A e ϕ coincidono con quelli già ricavati nel par.5.13:

$$|A| = 1 / |1 - \omega^2 / \omega_n^2| \quad (5.18-13)$$

$$\tan \phi = 0 \longrightarrow \begin{cases} \phi = 0 & \text{per } \omega / \omega_n < 1 \\ \phi = \pi & \text{per } \omega / \omega_n > 1 \end{cases}$$

e le curve di $|A|$ e ϕ in funzione di ω/ω_n sono quelle già riportate in fig.5.13-1,b).

In fig.5.18-2 sono riportate le curve di A e di ϕ per diversi valori del rapporto σ/σ_{cr} : dall'esame della curva $A = f(\omega/\omega_n)$ si deduce che:

1°) al crescere di σ/σ_{cr} le curve $A = f(\omega/\omega_n)$ si abbassano e presentano un massimo per valori di ω/ω_n via via più piccoli di 1. Il valore ω_M/ω_n , per il quale si verifica tale massimo, si ottiene ponendo:

$$\frac{dA}{d(\omega/\omega_n)} = 0$$

e risulta essere:

$$\frac{\omega_M}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \frac{\sigma^2}{\sigma_{cr}^2}} \quad (5.18-14)$$

2°) il valore di σ/σ_{cr} , cui corrisponde $\omega_M/\omega_n = 0$, risulta, per la (5.18-14), dato da:

$$\sigma/\sigma_{cr} = 1/\sqrt{2} = 0.707 \quad (5.18-15)$$

Ciò sta ad indicare che per valori di σ uguali o maggiori al 70.7% dello smorzamento critico, l'ampiezza dell'oscillazione forzata risulta più piccola dello spostamento statico, qualunque sia il valore della pulsazione della forza eccitante: il fenomeno della risonanza non è quindi più osservabile per $\sigma \geq 0.707\sigma_{cr}$.

3°) Tenendo presente il valore della pulsazione ω_s delle oscillazioni libere smorzate dato dalla (5.17-26):

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2}$$

e la (5.18-14) si deduce che:

$$\omega_M < \omega_s < \omega_n \tag{5.18-16}$$

4°) Per piccoli valori di σ/σ_{cr} (≤ 0.1) può ritenersi:

$$\omega_n \approx \omega_s \approx \omega_M \tag{5.18-17}$$

e quindi il valore massimo di A risulta per la (5.18-11):

$$A_{max} = 1/(2\sigma/\sigma_{cr}) = \sigma_{cr}/2\sigma \tag{5.18-18}$$

In queste condizioni ($\sigma/\sigma_{cr} \leq 0.1$) e per valori di ω sufficientemente lontani da ω_n ($0.8 > \omega/\omega_n > 1.2$) i valori di A , calcolati con la prima delle (5.18-13) ($\sigma = 0$), coincidono praticamente con quelli calcolati con la (5.18-11).

Questo risultato sta ad indicare che per sistemi poco smorzati, in condizioni lontane da quelle di risonanza, il modello matematico più semplice ($\sigma = 0$) consente una valutazione accettabile del moto forzato.

Dall'esame delle curve $\phi = f(\omega/\omega_n)$ di fig.5.18-2, si deduce che:

1°) Tutte le curve, indipendentemente dal valore del parametro σ/σ_{cr} , passano per il punto di coordinate $\omega/\omega_n = 1$ e $\phi = \pi/2$.

Ciò sta ad indicare che il valore della pulsazione naturale può essere considerato come il valore della pulsazione della causa eccitante per il quale risulta $\phi = \pi/2$.

2°) Per piccoli valori del rapporto σ/σ_{cr} , il ritardo di fase ϕ è praticamente uguale a zero per $\omega/\omega_n < 1$, mentre risulta uguale a π per $\omega/\omega_n > 1$.

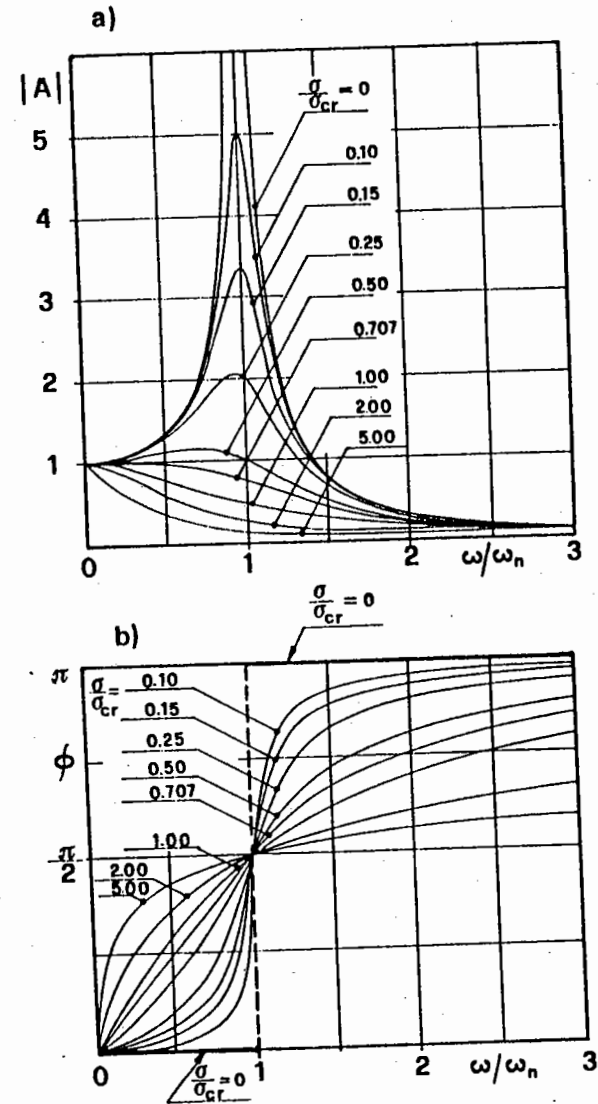


Fig.5.18-2

5.19 Metodo vettoriale

Ai risultati ottenuti nel paragrafo precedente si può dare una migliore interpretazione fisica mediante la rappresentazione vettoriale delle forze, che compaiono nella (5.18-1):

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \quad (5.18-1)$$

Tenendo presente che in condizioni stazionarie risulta:

$$x(t) = x_f(t) = X_f \cos(\omega t - \phi) \quad (5.18-3)$$

la (5.18-1) si scrive:

$$-m\omega^2 X_f \cos(\omega t - \phi) - \sigma\omega X_f \sin(\omega t - \phi) + KX_f \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t \quad (5.18-4)$$

Da questa relazione si deduce che la forza d'inerzia $-m\ddot{x}$, la reazione dello smorzatore $-\sigma\dot{x}$, la reazione della molla $-Kx$ e la forza eccitante $F_0 \cos \omega t$ sono forze armoniche di pulsazione ω e di ampiezza rispettivamente $m\omega^2 X_f$, $\sigma\omega X_f$, KX_f ed F_0 .

Queste forze sono quindi rappresentabili mediante vettori rotanti con la stessa velocità angolare ω , di moduli $m\omega^2 X_f$, $\sigma\omega X_f$, KX_f , F_0 , il primo in opposizione di fase col vettore accelerazione $\omega^2 X_f$, il secondo in opposizione di fase col vettore velocità ωX_f ed il quarto in anticipo di fase ϕ rispetto al vettore spostamento X_f .

Segnato il vettore rotante X_f nella posizione relativa all'istante t definito dalla relazione $(\omega t - \phi) = 0$, in fig.5.19-1,a) sono stati segnati i vettori rappresentativi di \dot{x} e \ddot{x} e quindi quelli rappresentativi delle forze che compaiono nella (5.18-1).

Dalla fig.5.19-1,a) si deduce che per l'equilibrio delle forze rotanti deve essere:

$$\begin{aligned} F_0 \cos \phi + m\omega^2 X_f &= KX_f \\ F_0 \sin \phi &= \sigma\omega X_f \end{aligned} \quad (5.19-1)$$

Questo sistema di equazioni nelle incognite X_f e ϕ coincide col sistema (5.18-5) e quindi i valori di X_f e ϕ coincidono con quelli dati dalle (5.18-7) e (5.18-8).

Nel caso particolare, $\phi = \pi/2$, rappresentato in fig.5.19-1,b) si deduce:

$$\begin{aligned} m\omega^2 X_f &= KX_f & \longrightarrow & \quad \omega^2 = K/m = \omega_n^2 \\ F_0 &= \sigma\omega_n X_f & \longrightarrow & \quad X_f = F_0/\sigma\omega_n = x_{st} \cdot 1/(2\sigma/\sigma_{cr}) \end{aligned}$$

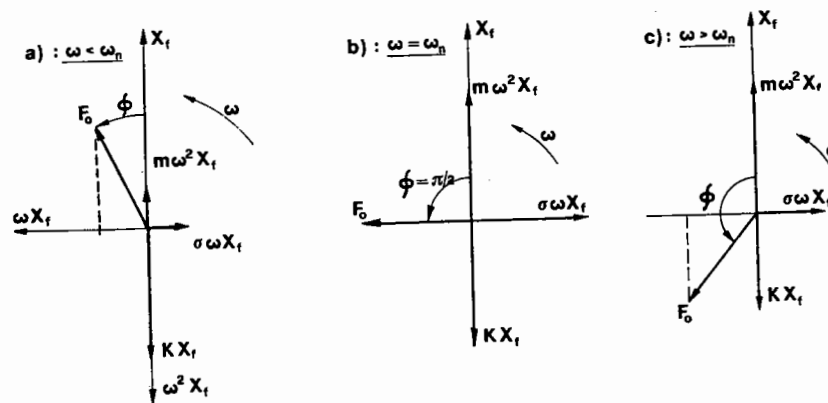


Fig.5.19-1

risultati questi già ricavati (v. la 5.18-18).

I diagrammi vettoriali di fig.5.19-1 non solo offrono una via alternativa per determinare le caratteristiche del moto forzato, ma consentono, come è stato detto, anche una migliore interpretazione fisica dei risultati raggiunti.

Per $\omega \ll \omega_n$ la forza d'inerzia e la reazione dello smorzatore sono piccole: in queste condizioni anche ϕ risulta piccolo e la forza eccitante è bilanciata praticamente dalla sola reazione della molla.

Per $\omega = \omega_n$ la forza d'inerzia e la reazione della molla si fanno equilibrio, mentre la forza applicata serve solo a bilanciare l'unica forza dissipativa presente nel sistema.

Per $\omega \gg \omega_n$, ϕ tende a π e la forza applicata serve praticamente a bilanciare solo la forza d'inerzia, adesso prevalente rispetto alla reazione dello smorzatore.

5.20 Vibrazione eccitata da un moto armonico

Il sistema (m, K, σ) può essere eccitato a vibrare, imponendo un moto armonico o all'estremo (non collegato ad m) della molla K (v. fig.5.20-1,a), o all'estremo dello smorzatore σ (v. fig.5.20-1,b) o ad entrambi gli estremi di K e σ (v. fig.5.20-1,c).

Nel primo caso l'equazione del moto risulta essere:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx_r = 0 \quad (5.20-1)$$

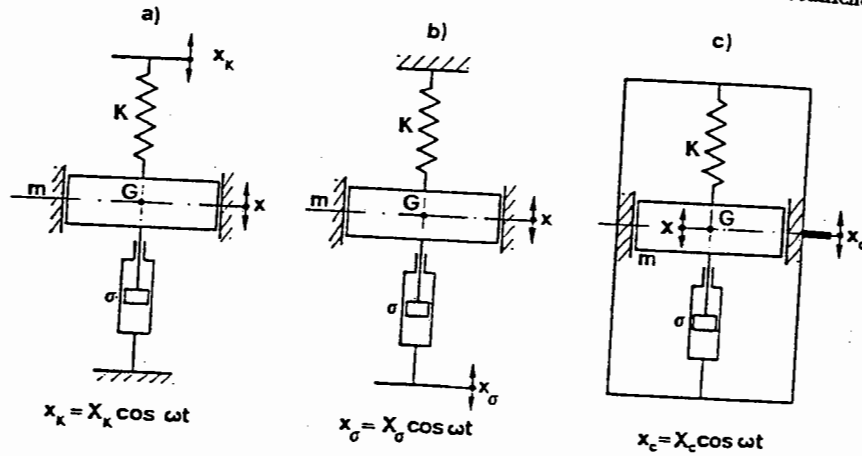


Fig. 5.20-1

con:

x_r = moto relativo degli estremi della molla = $x - x_k$

e quindi potrà essere scritta nella forma:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = KX_k \cos \omega t \quad (5.20-2)$$

Nel secondo caso risulta:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = 0 \quad (5.20-3)$$

con:

x_r = moto relativo degli estremi dello smorzatore = $x - x_\sigma$

e quindi:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = -\sigma X_\sigma \omega \sin \omega t \quad (5.20-4)$$

Nel terzo caso l'equazione del moto è data da:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx_r = 0 \quad (5.20-5)$$

Se interessa determinare la legge del moto assoluto $x(t)$ di m , l'equazione del moto va scritta:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx &= KX_c \cos \omega t - \sigma\omega X_c \sin \omega t = \\ &= F_0 \cos(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (5.20-6)$$

dove:

$$F_0 = \sqrt{(KX_c)^2 + (\sigma\omega X_c)^2} \quad ; \quad \tan \phi_0 = \sigma\omega/K$$

Se invece interessa determinare la legge $x_r(t)$ del moto relativo di m rispetto al telaio mobile, l'equazione (5.20-5) va scritta nella forma:

$$m\ddot{x}_r + \sigma\dot{x}_r + Kx_r = m\omega^2 X_c \cos \omega t \quad (5.20-7)$$

In ciascuno dei casi esaminati l'equazione del moto è stata scritta, esplicitando al secondo membro la forza armonica che eccita la massa m a vibrare: la legge del moto desiderata si ottiene applicando le formule già ricavate per il modello matematico:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

cioè la ormai nota relazione:

$$x(t) = x_{st} \cdot A \cos(\omega t - \phi)$$

con:

$$x_{st} = F_0/K \quad ; \quad A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad ; \quad \tan \phi = \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

5.21 Esempi di applicazione

I risultati del moto libero e forzato ottenuti nei paragrafi precedenti per il sistema (m, K, σ) , possono essere applicati a tutti i sistemi ad 1 grado di libertà con smorzamento viscoso.

Tutti gli esempi, esaminati nel par.5.15, possono quindi essere ripresi e riconsiderati alla luce di questi risultati.

Nel paragrafi che seguono, come applicazione dei risultati ottenuti, sarà esaminato il problema dell'isolamento delle vibrazioni.

5.21-1 Isolamento attivo delle vibrazioni

Durante il funzionamento di una macchina, a causa del moto degli organi che la compongono, si generano forze d'inerzia che, essendo esterne alla macchina stessa (v. par.1.6), si trasmettono alla struttura di sostegno.

Forze d'inerzia di questo tipo sono quelle che si generano durante la rotazione del rotore di una macchina a causa dello sbilanciamento residuo dello stesso (v. Cap. 3).

Come si vedrà nel Cap. 13, forze d'inerzia di notevole intensità si generano nel funzionamento di una macchina alternativa.

A causa della periodicità di queste forze, la struttura sulla quale è fissata la macchina oscilla in maniera indesiderata e, se si verificano condizioni di risonanza, con ampiezze tali da compromettere la stabilità e della struttura di sostegno e della macchina stessa.

Si presenta così il problema di "isolare" la macchina, interponendo tra la macchina e la struttura di sostegno un adatto "sistema di sospensione".

Il sistema di sospensione è costituito da un certo numero di elementi elastici, costituiti da molle d'acciaio o da supporti di gomma, o di feltro, o di sughero.

Il sistema suddetto deve assicurare, che solo una piccola aliquota delle forze esterne, che si destano durante il funzionamento della macchina, si trasmetta alla struttura di sostegno.

Il problema descritto prende il nome di "isolamento attivo" delle vibrazioni.

Se si considera la macchina come un corpo rigido, il problema dell'isolamento delle vibrazioni può essere studiato esaminando il moto forzato di un corpo rigido elasticamente vincolato (v. fig.5.21-1,a) e quindi di un sistema che presenta sei gradi di libertà (v. par.5.10).

Tuttavia utili informazioni possono ricavarsi dallo studio di un modello matematico più semplice, che considera il sistema, costituito dalla macchina di massa m e dagli elementi elastici, come un sistema ad 1 grado di libertà (m, K, σ) , (v. fig.5.21-1,b), eccitato a vibrare da una forza armonica $F_0 \cos \omega t$.

In queste ipotesi l'equazione del moto forzato della massa m risulta, come è noto, la seguente:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

A caratterizzare l'efficacia del sistema di sospensione si assume il rapporto T tra l'ampiezza F_t della forza trasmessa alla struttura di appoggio e l'ampiezza F_0 della forza agente su m :

$$T = F_t / F_0$$

Il rapporto T prende il nome di *rapporto di trasmissibilità*, o più semplicemente di *trasmissibilità* e per un buon isolamento deve risultare molto piccolo.

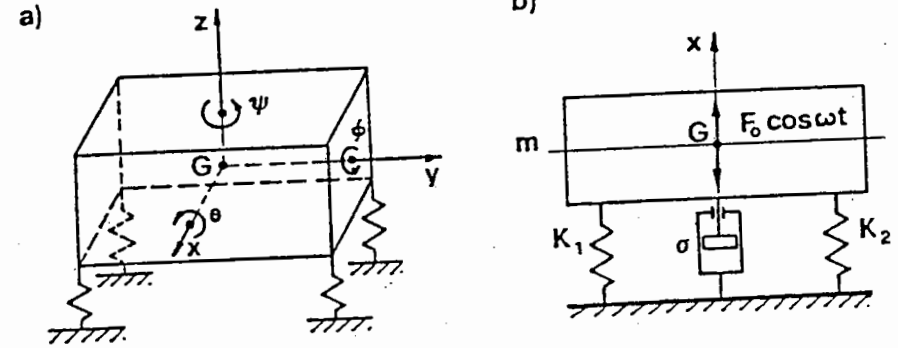


Fig.5.21-1

La forza trasmessa alla struttura di sostegno è uguale e contraria alla risultante della reazione $-Kx(t)$ delle molle di sospensione K , e della reazione $-\sigma\dot{x}(t)$ dello smorzatore σ .

Nella rappresentazione vettoriale delle forze agenti sul sistema (vedi paragrafo 5.19), l'ampiezza F_t è data dal modulo del risultante dei due vettori KX_f e $\sigma\omega X_f$, in quadratura tra loro (v. fig.5.21-1,c):

$$F_t = \sqrt{(KX_f)^2 + (\sigma\omega X_f)^2} = KX_f \sqrt{1 + (\sigma\omega/K)^2} = Kx_{st} A \sqrt{1 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}$$

Risulta pertanto:

$$T = F_t / F_0 = A \sqrt{1 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}$$

e quindi:

$$T = F_t / F_0 = \frac{\sqrt{1 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}}$$

In fig.5.21-1,d) sono riportate le curve di T al variare di ω/ω_n e per diversi valori di σ/σ_{cr} . L'andamento qualitativo di queste curve si deduce osservando che:

1) se si trascura lo smorzamento ($\sigma = 0$), l'espressione di T diviene:

$$T = 1 / (1 - \omega^2/\omega_n^2) \tag{5.21-1}$$

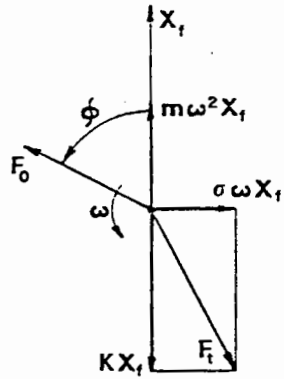


Fig.5.21-1,c

e coincide con l'espressione del coefficiente di amplificazione A , valida per $\sigma = 0$: la curva di $|T| = f(\omega/\omega_n)$ coincide quindi con la curva di $|A| = f(\omega/\omega_n)$ relativa a $\sigma/\sigma_{cr} = 0$.

- 2) per $\omega/\omega_n = 0$, tutte le curve passano per il punto di ordinata 1.
- 3) per $\omega/\omega_n = \sqrt{2} = 1.41$, tutte le curve passano ancora per il punto di ordinata 1.

Dalla fig.5.21-1,d) si deduce che per ottenere bassi valori di T occorre che la pulsazione ω della forza eccitante risulti molto maggiore della pulsazione naturale ω_n .

Se la forza $F(t)$ è periodica di periodo T , indicata con ω la pulsazione dell'armonica fondamentale:

$$\omega = 2\pi/T$$

per ottenere un buon isolamento è sufficiente che risulti $\omega > \omega_n$, in quanto per tutte le armoniche di ordine superiore al primo è, a maggior ragione, verificata la condizione:

$$n\omega = \text{pulsazione dell'armonica di ordine } n > \omega_n$$

che assicura per tutte queste armoniche un rapporto di trasmissibilità tanto più piccolo quanto più grande è n .

Per $\omega > 1.41\omega_n$ il coefficiente di trasmissibilità T aumenta all'aumentare di σ e quindi lo smorzamento del sistema ha un effetto negativo nei riguardi

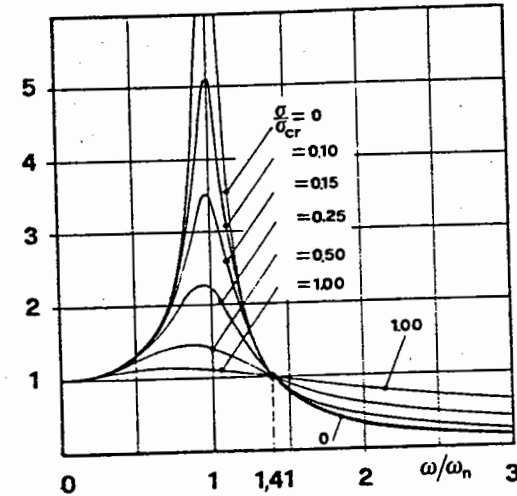


Fig.5.21-1,d

dell'isolamento delle vibrazioni, risultato questo che non è sorprendente, se si pensa che lo smorzatore σ (v. fig.5.21-1) rappresenta una via attraverso la quale la forza $F_0 \cos \omega t$ si trasmette alla struttura di sostegno.

La presenza dello smorzamento è però positiva all'avviamento ed all'arresto della macchina: durante queste fasi infatti il sistema passa attraverso la condizione di risonanza e l'ampiezza delle oscillazioni forzate di m può raggiungere valori molto grandi, se σ/σ_{cr} è piccolo.

Noti i valori di F_0 ed ω , che sono dati del problema, e posto $\omega_n = (1/r)\omega$, se si fissa il valore di r ($r = 3 \div 5$), la rigidità K del sistema di sospensione risulta definita dalla relazione:

$$\omega_n = \omega/r = \sqrt{K/m}$$

Se la macchina da isolare è molto lenta ($n = 100 \div 500$ giri/min), la pulsazione naturale ω_n deve risultare bassa e ciò comporta una sospensione di rigidità K molto piccola.

La realizzazione di sospensioni a basso valore di K pone però dei problemi; infatti indicando con:

P = peso della massa m ;

δ_{st} = freccia statica del sistema di sospensione, dovuta al peso $P = P/K$

risulta:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{Kg/P} = \sqrt{g/\delta_{st}}$$

Questa relazione mette in evidenza che ω_n è funzione solo di δ_{st} e che per ottenere piccoli valori di ω_n , la freccia statica δ_{st} del sistema di sospensione deve risultare molto grande.

Poiché per ogni tipo di elemento elastico la freccia statica non può superare un certo valore, si deduce che a ciascun tipo di elemento elastico corrisponde un valore minimo della pulsazione naturale ω_n .

Indicando con f_n la frequenza naturale del sistema in c.p.m. risulta:

$$f_n = (60/2\pi)\sqrt{g/\delta_{st}} \quad \text{c.p.m.}$$

In fig.5.21-1,e è riportato l'andamento di f_n in funzione di δ_{st} ; sulla stessa figura sono segnati, a titolo indicativo, i valori minimi delle frequenze f_n raggiungibili con ciascun tipo di elemento elastico.

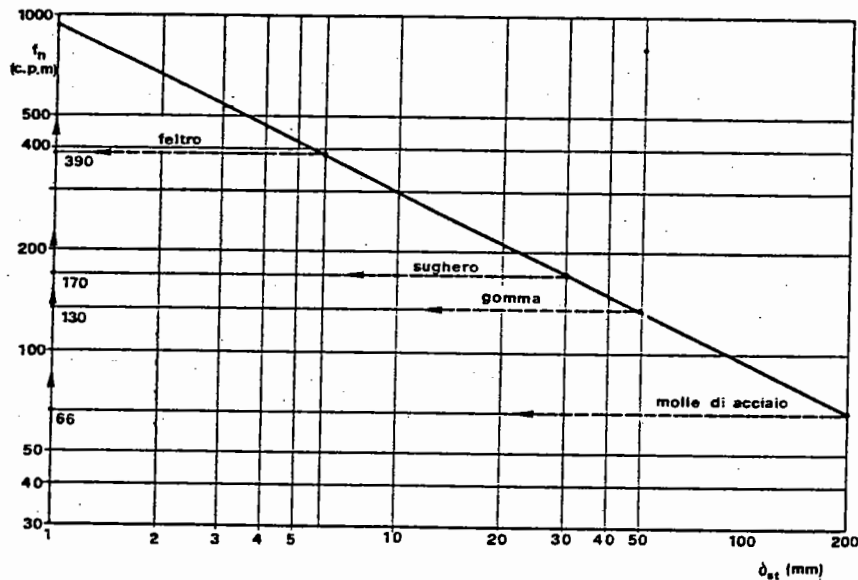


Fig.5.21-1,e

Dall'esame di questa figura si può concludere che al diminuire della frequenza f dell'azione eccitante, per ottenere un buon isolamento, occorre impiegare elementi di sospensione più costosi, passando da supporti cilindrici in feltro, a supporti sempre cilindrici in sughero ed in gomma.

Con le molle di acciaio è possibile realizzare i più bassi valori di ω_n e quindi ottenere sistemi di sospensione efficienti anche per macchine relativamente lente; altri pregi dei sistemi di sospensione di questo tipo sono la

resistenza alla corrosione e la possibilità di operare a temperature molto basse o molto alte.

Per contro le molle d'acciaio presentano uno smorzamento molto più basso di quello presente nei supporti di altri materiali ed è quindi necessario ricorrere ad accorgimenti particolari per aumentare lo smorzamento del sistema.

5.21-2 Isolamento passivo

Nella pratica tecnica si presenta anche il problema inverso di quello trattato nel paragrafo precedente: si deve cioè impedire che le vibrazioni della struttura di appoggio, causate dal funzionamento di altre macchine, si comunichino ad una macchina, sulla quale non agisce alcuna apprezzabile forza periodica e che per ragioni particolari non deve vibrare.

Questo secondo tipo di isolamento delle vibrazioni prende il nome di isolamento passivo.

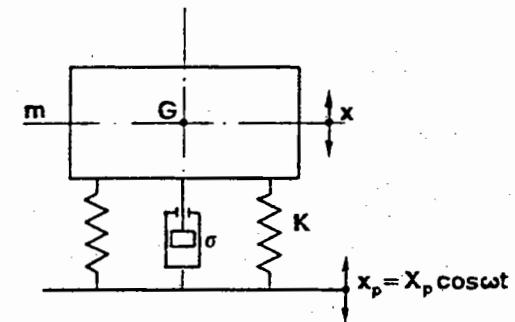


Fig.5.21-2

Se anche in questo caso si considera il sistema macchina-sospensione come un sistema (m, σ, K) ad 1 grado di libertà (v. fig.5.21-2) e si ipotizza che il piano di appoggio vibri con legge armonica:

$$x_p = X_p \cos \omega t$$

l'equazione del moto $x(t)$ di m è data da:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx_r = 0$$

e coincide con quella (5.20-5), relativa al sistema rappresentato in fig.5.20-1,c).

Posto:

$$x_r = x - x_p$$

l'equazione del moto si scrive:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = KX_p \cos \omega t - \omega\sigma X_p \sin \omega t = F_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

con:

$$F_0 = \sqrt{(KX_p)^2 + (\sigma\omega X_p)^2} = KX_p \sqrt{1 + [2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)]^2}$$

$$\tan \phi_0 = \sigma\omega/K = 2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)$$

Applicando la (5.18-12) si ottiene:

$$x(t) = x_f(t) = x_{st} A \cos(\omega t + \phi_0 - \phi)$$

con:

$$x_{st} = F_0/K = X_p \sqrt{1 + [2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)]^2}$$

$$A = 1/\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + [2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)]^2}$$

$$\tan \phi = [2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)] / (1 - \omega^2/\omega_n^2)$$

Se in questo caso, ad indicare l'efficacia del sistema di sospensione, si assume il rapporto T tra l'ampiezza $X_f = x_{st} A$ della oscillazione della massa m e l'ampiezza X_p dell'oscillazione del piano di appoggio:

$$T = X_f/X_p$$

si ottiene:

$$T = \frac{X_f}{X_p} = x_{st} \frac{A}{X_p} = \frac{\sqrt{1 + [2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)]^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + [2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)]^2}}$$

che coincide con l'espressione di $T = F_t/F_0$ ricavata nel caso dell'isolamento attivo.

Per questo motivo il rapporto X_f/X_p prende il nome di rapporto di trasmissibilità o trasmissibilità del sistema e la rappresentazione di $|T| = f(\omega/\omega_n, \sigma/\sigma_{cr})$ coincide con quella di fig.2.21-1,d.

Valgono, pertanto in questo caso considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso dell'isolamento attivo, considerazioni che possono così essere sintetizzate:

- 1°) per avere un piccolo valore di T deve risultare $\omega_n \ll \omega$, cioè la pulsazione naturale ω_n del sistema macchina-supporti elastici deve essere più piccola della pulsazione ω dell'armonica fondamentale dell'oscillazione periodica della struttura di appoggio della macchina;
- 2°) la presenza di uno smorzamento di tipo viscoso aumenta, a parità di tutte le altre condizioni, il valore di T ;
- 3°) questo effetto negativo è compensato dal fatto che, durante l'avviamento o l'arresto delle macchine adiacenti alla macchina in questione, il passaggio attraverso le condizioni di risonanza comporta oscillazioni di ampiezza tollerabile per la macchina in esame.

Esercizio 5.X

Un gruppo costituito da una macchina motrice ed una utilizzatrice è montato su di un telaio rigido A (v. fig.5.X-1); la massa complessiva del gruppo e del telaio è di 500 Kg.

Si supponga che durante il funzionamento del gruppo si generi una forza armonica verticale con pulsazione pari alla velocità del gruppo stesso e di ampiezza F_0 pari a 1000 N. La velocità angolare del gruppo è pari a 500 giri/min.

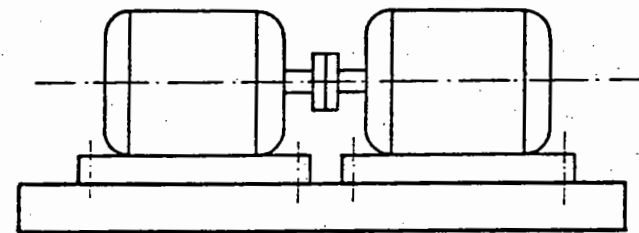


Fig.5.X-1

Il problema dell'isolamento dalle vibrazioni può essere affrontato in due modi diversi:

- 1) Il primo (v. fig.5.X-2), più semplice, consiste nell'interporre degli elementi

elastici di sospensione tra il sistema costituito dal gruppo e dal telaio e la struttura di sostegno.

- 2) Il secondo (v. fig. 5.X-3), più complesso, consiste nell'ancorare il telaio ad un blocco di fondazione in calcestruzzo armato, avente le dimensioni riportate in figura e densità $\delta = 2.5 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$, e nel sospendere il sistema così ottenuto, alla struttura di sostegno mediante opportuni elementi elastici.

In entrambi i casi si vuole realizzare un rapporto di trasmissibilità pari ad $1/24$.

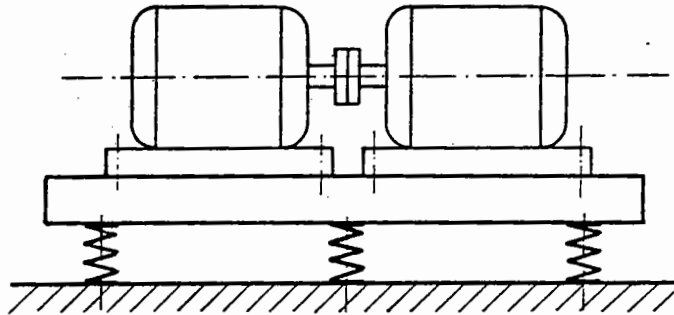


Fig. 5.X-2

In base ai dati assegnati e trascurando le azioni smorzanti, determinare in entrambi i casi, rappresentati nelle figg. 5.X-2 e 5.X-3:

- 1) la forza trasmessa alla struttura di sostegno;
- 2) il tipo di elementi elastici (feltro, sughero, gomma o molle di acciaio) da usare;
- 3) le rigidità del sistema di sospensione;
- 4) le ampiezze delle oscillazioni forzate del gruppo.

Soluzione:

- 1) Per tutte e due le sospensioni elastiche deve essere:

$$T = 1/24$$

per cui la forza F_t , trasmessa alla struttura di sostegno risulterà, in entrambi i casi pari a:

$$F_t = F_0 \cdot T = 1000/24 \approx 42 \text{ N}$$

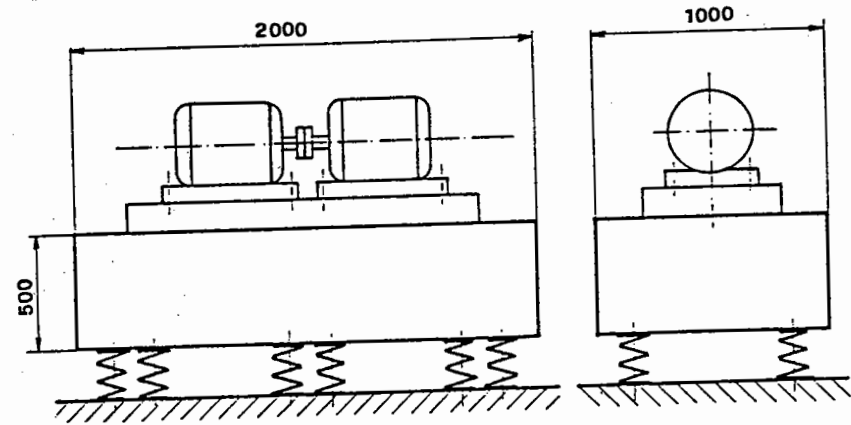


Fig. 5.X-3

- 2) Dovendo risultare in entrambi i casi:

$$|T| = |1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)| = 1/24$$

ed essendo:

$$\omega = 2\pi n/60 = 52.36 \text{ rad/s}$$

per tutte e due le disposizioni, dovrà risultare:

$$\omega_n = \omega/5 = 52.36/5 = 10.47 \text{ rad/s}$$

ed

$$f_n = 500/5 = 100 \text{ c.p.m.}$$

Dal diagramma di fig. 5.21, e si deduce che per ottenere questo valore della frequenza naturale, in entrambi i casi si dovranno usare molle d'acciaio.

La freccia statica risulterà essere:

$$\delta_{st} = g/\omega_n^2 = 9.81/10.47^2 = 0.089 \text{ m} = 89 \text{ mm}$$

- 3) Per la prima disposizione, avendo indicato con m la massa complessiva del gruppo e del telaio, la rigidità k della sospensione sarà data dalla relazione:

$$K = m \cdot \omega_n^2 = 500 \cdot 10.47^2 = 54.8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

Per la seconda disposizione la rigidità K della sospensione è data da:

$$K = M \cdot \omega_n^2$$

con:

$$M = m + m_B$$

Essendo:

$$\begin{aligned} m &= \text{massa del blocco di calcestruzzo armato} = \\ &= \delta V = 2.5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0.5 = 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg} \end{aligned}$$

risulta:

$$M = 500 + 2500 = 3000 \text{ kg}$$

e quindi:

$$K = 3000 \cdot (10.47)^2 = 3.29 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

4) L'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata per la prima disposizione risulta essere:

$$X_f = x_{st} A = F_0 \cdot A / K = F_0 \cdot T / K = (1000 / 5.48 \cdot 10^4) (1/24) = 7.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Per la seconda disposizione risulta invece:

$$X_f = x_{st} A = F_0 \cdot A / K = F_0 \cdot T / K = (1000 / 3.29 \cdot 10^5) (1/24) = 1.27 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Esercizio 5.XI

Il costruttore del gruppo di cui all'esercizio precedente garantisce un buon funzionamento del gruppo stesso se, a velocità di regime, le ampiezze delle vibrazioni sono inferiori a 0.2 mm.

Per questo motivo si deve adottare la soluzione di fig.5.X-3.

Volendo utilizzare, per la sospensione, molle di acciaio del tipo rappresentato in fig.5.XI-1, aventi un numero di spire attive n pari a 6, sulla base dei risultati ottenuti nell'esercizio precedente, determinare:

- 1) Il numero delle molle di acciaio da disporre in parallelo;
- 2) la loro disposizione più opportuna;
- 3) la sollecitazione massima alla quale saranno sottoposti gli elementi elastici.

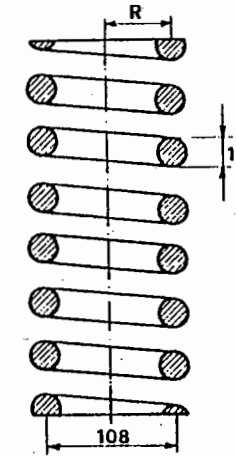


Fig.5.XI-1

Soluzione1) La rigidità K di ciascuna delle molle è data da:

$$K_i = G d^4 / 64 n R^3 = 8 \cdot 10^{10} (12 \cdot 10^{-3}) / 64 \cdot 6 \cdot (54 \cdot 10^{-3})^3 = 2.74 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

e quindi il numero n delle molle da disporre in parallelo risulta essere:

$$n = K / K_i = 3.29 \cdot 10^5 / 2.74 \cdot 10^4 = 12$$

2) La disposizione più opportuna delle 12 molle è quella riportata in fig.5.XI-2.

3) Tenendo presente che la forza massima F che agisce su ciascun elemento elastico è data da:

$$F = (P + F_t) / n$$

con:

$$P = \text{peso del gruppo + basamento} = g \cdot M = 9.81 \cdot 3000 = 29430 \text{ N}$$

risulta:

$$F = (P + F_t) / n \approx P / n = 29430 / 12 = 2452.5 \text{ N}$$

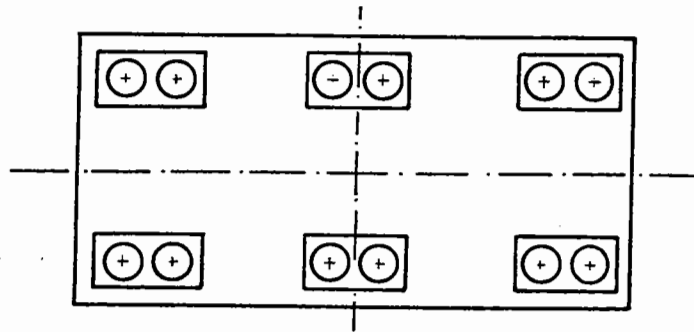


Fig. 5.XI-2

A questa forza, diretta secondo l'asse delle molle, corrisponde un momento torcente nel tondino d'acciaio della molla pari a:

$$M_t = F \cdot R = 2452.5 \cdot 0.054 = 132.34 \text{ N}\cdot\text{m}$$

La sollecitazione a torsione è data da:

$$\tau = (M_t / I_p) d / 2$$

con:

$$I_p = \text{momento d'inerzia polare della sezione del tondino} = \\ = (d/2)^4 \cdot \pi / 2 = (6 \cdot 10^{-3})^4 \pi / 2 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

Risulta quindi:

$$\tau = (132.34 / 2 \cdot 10^{-9}) \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 397 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 397 \text{ N/mm}^2$$

Tale sollecitazione si può ritenere ammissibile per gli acciai legati utilizzati per la costruzione delle molle.

5.22 Sistemi a due gradi di libertà: fenomeni fondamentali

Si consideri un sistema costituito (v. fig. 5.22-1) da un'asta di acciaio alla quale sono solidali due masse m_1 ed m_2 , disposte come in fig. 5.22-1, a).

Se mediante il tavolo vibrante T , al quale si è già accennato nel par. 5.8, si eccita il sistema a vibrare, imponendo all'estremo S un moto armonico:

$$x_K(t) = X_K \cos \omega t$$

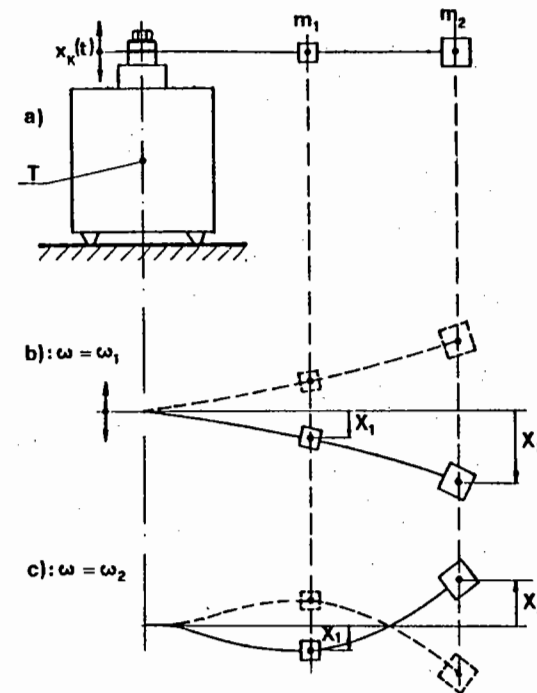


Fig. 5.22-1

il sistema compie oscillazioni forzate armoniche di pulsazione pari a quella dell'azione eccitante x_K .

Se lo smorzamento del sistema è piccolo e se si varia con gradualità la pulsazione ω , si nota che il sistema entra in risonanza per due diversi valori ω_1 ed ω_2 di ω : in corrispondenza di questi due valori della pulsazione forzante le ampiezze di oscillazione diventano molto grandi ed il sistema oscilla in un modo caratteristico. Se si esamina il modo di vibrare mediante una lampada stroboscopica si osserva che per $\omega = \omega_1$ ($\omega_1 < \omega_2$) le due masse oscillano in fase tra loro (v. fig. 5.22-1, b) ed in modo tale che, indicata con C una costante, in qualsiasi istante dell'oscillazione, risulta:

$$x_1(t) / x_2(t) = C_1 > 0 \quad (5.22-1)$$

Per $\omega = \omega_2$ il modo di vibrare del sistema è diverso ed è caratterizzato dal fatto che le due masse oscillano in opposizione di fase: indicata con C_2 una nuova costante, si potrà ritenere che in queste condizioni sia:

$$x_1(t) / x_2(t) = C_2 < 0 \quad (5.22-2)$$