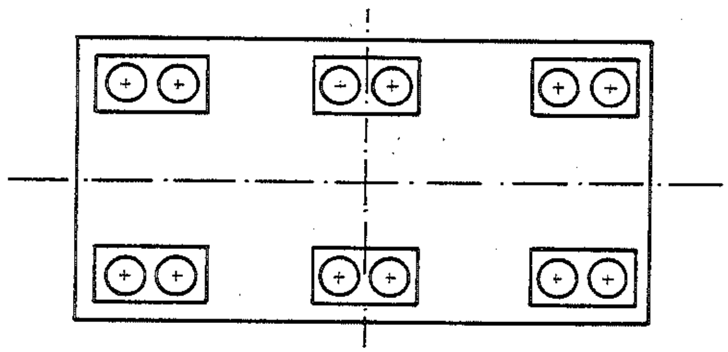

Fig.5.XI-2

A questa forza, diretta secondo l'asse delle molle, corrisponde un momento torcente nel tondino d'acciaio della molla pari a:

$$M_t = F \cdot R = 2452.5 : 0.054 = 132.34 \text{ N·m}$$

La sollecitazione a torsione è data da:

$$\tau = (M_t/I_p)d/2$$

con:

$I_p$ = momento d'inerzia polare della sezione del tondino =
$= (d/2)^4 \cdot \pi/2 = (6 \cdot 10^{-3})^4 \pi/2 = 2 \cdot 10^{-9}$ m$^4$

Risulta quindi:

$$\tau = (132.34/2 \cdot 10^{-9}) \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 397 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 397 \text{ N/mm}^2$$

Tale sollecitazione si può ritenere ammissibile per gli acciai legati utilizzati per la costruzione delle molle.

## 5.22 Sistemi a due gradi di libertà: fenomeni fondamentali

Si consideri un sistema costituito (v. fig.5.22–1) da un'asta di acciaio alla quale sono solidali due masse $m_1$ ed $m_2$, disposte come in fig.5.22–1,a).
Se mediante il tavolo vibrante $T$, al quale si è già accennato nel par.5.8, si eccita il sistema a vibrare, imponendo all'estremo $S$ un moto armonico:

$$x_K(t) = X_K \cos \omega t$$



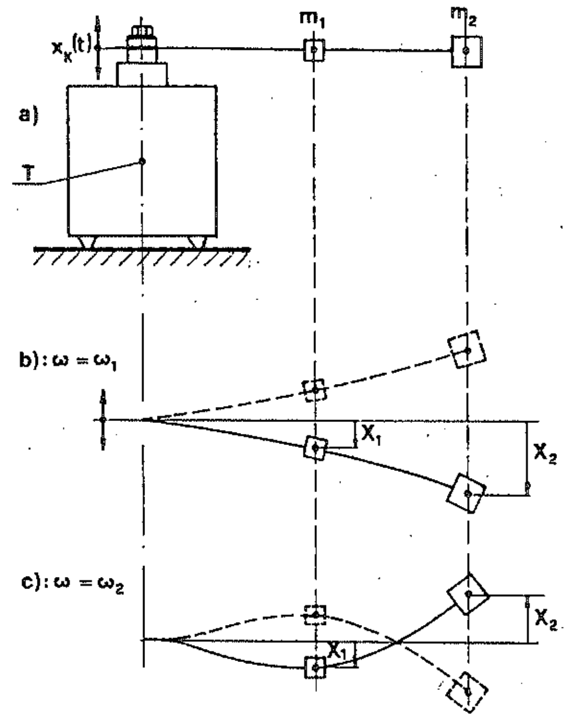


Fig.5.22–1

il sistema compie oscillazioni forzate armoniche di pulsazione pari a quell dell'azione eccitante $x_K$.

Se lo smorzamento del sistema è piccolo e se si varia con gradualità l pulsazione $\omega$, si nota che il sistema entra in risonanza per due diversi valo $\omega_1$ ed $\omega_2$ di $\omega$: in corrispondenza di questi due valori della pulsazion forzante le ampiezze di oscillazione diventano molto grandi ed il sistem oscilla in un modo caratteristico. Se si esamina il modo di vibrare mediant una lampada stroboscopica si osserva che per $\omega = \omega_1$ $(\omega_1 < \omega_2)$ le du masse oscillano in fase tra loro (v. fig.5.22–1,b) ed in modo tale che, indicat con $C$ una costante, in qualsiasi istante dell'oscillazione, risulta:

$$x_1(t)/x_2(t) = C_1 > 0 \qquad (5.22\text{-}1$$

Per $\omega = \omega_2$ il modo di vibrare del sistema è diverso ed è caratterizzat dal fatto che le due masse oscillano in opposizione di fase: indicata con $C$ una nuova costante, si potrà ritenere che in queste condizioni sia:

$$x_1(t)/x_2(t) = C_2 < 0 \qquad (5.22\text{-}2$$

Sulla base di quanto detto a proposito dei sistemi ad 1 grado di libertà, un'esperienza del tipo descritto va interpretata considerando che se il sistema presenta due risonanze per $\omega = \omega_1$ e per $\omega = \omega_2$, il sistema ha due frequenze proprie o naturali, a ciascuna delle quali corrisponde un modo di vibrare caratterizzato dalle (5.22-1) e (5.22-2) rispettivamente.

Nei paragrafi che seguono sarà esaminato per via teorica il comportamento di un sistema, simile a quello riportato in fig.5.22–1, mediante un modello matematico a due gradi di libertà, discreto, lineare, a coefficienti costanti.

## 5.23 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento

Si consideri il sistema rappresentato in fig.5.23–1 e si ritengano valide le seguenti ipotesi semplificative: le due masse $m_1$ ed $m_2$ scorrano tra guide lisce, non rappresentate in figura; le molle $K_1$, $K_2$, $K_3$ siano assimilabili a legami elastici, privi di massa.

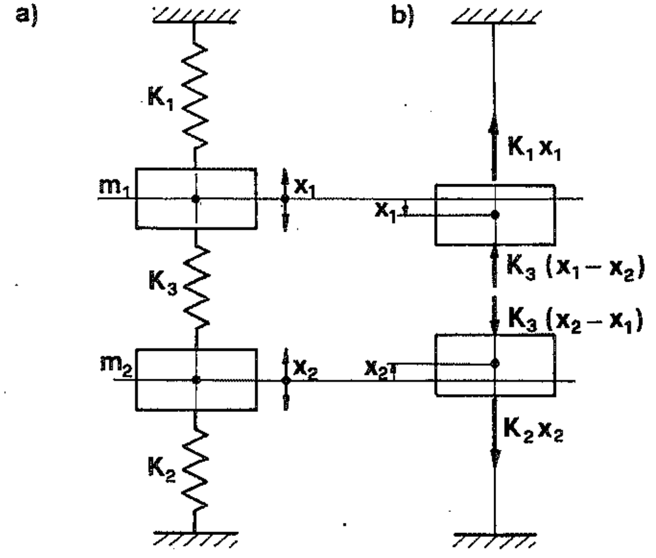


Fig.5:23–1

In queste ipotesi il sistema si riduce ad un sistema a due gradi di libertà; a definirne in ogni istante la configurazione si assumano gli spostamenti $x_1$ ed $x_2$ delle due masse, misurati a partire dalle rispettive posizioni di riposo.

Si ritengano infine trascurabili le azioni smorzanti.



### a) *Integrazione delle equazioni del moto*

Si immagini che il sistema stia oscillando liberamente e siano $x_1$ ed $x_2$ (v. fig.5.23–1,b) le posizioni delle due masse in un istante generico $t$.

Le equazioni del moto libero del sistema si scrivono considerando che nella posizione considerata, per il principio di d'Alembert, su ciascuna delle due masse si fanno equilibrio la forza d'inerzia e le reazioni elastiche delle molle, collegate a quella massa.

Procedendo in questo modo, le equazioni del moto si scrivono:

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x}_1 - K_1x_1 - K_3(x_1 - x_2) = 0 \\ -m_2\ddot{x}_2 - K_2x_2 - K_3(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}1)$$

e possono essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_3)x_1 - K_3x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_3x_1 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}1)$$

I coefficienti:

$$\begin{aligned} k_{11} &= K_1 + K_3 \\ k_{22} &= K_2 + K_3 \\ k_{12} &= k_{21} = -K_3 \end{aligned} \qquad (5.23\text{-}2)$$

prendono il nome di coefficienti di rigidità del sistema ed hanno un chiaro significato fisico.

Infatti se, partendo dalla posizione di equilibrio statico del sistema, si immagina (v. fig.5.23–2) di spostare la massa $m_1$ di una quantità $x_1 = 1$ ferma restando la massa $m_2$ $(x_2 = 0)$, la reazione che il sistema esercita su $m_1$ è data da $-(K_1 + K_3) \cdot 1 = -k_{11}$.

Nelle stesse condizioni $(x_1 = 1;\, x_2 = 0)$ la reazione che il sistema esercita su $m_2$ è data da $K_3 \cdot 1 = -k_{21}$.

Analogamente si definiscono i coefficienti $k_{22}$ e $k_{12}$.

In generale si può dire che per un sistema ad $n$ gradi di libertà il coefficiente di rigidità $k_{ij}$ è la reazione, col segno cambiato, che il sistema esercita sulla massa $i$–esima, se si impone uno spostamento unitario alla massa $j$–esima $(x_j = 1)$ ferme restando tutte le altre masse del sistema $(x_i = 0$ per $i \neq j)$.

Il sistema di equazioni differenziali omogenee (5.23-1), con le posizioni (5.23-2), si scrive:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}3)$$

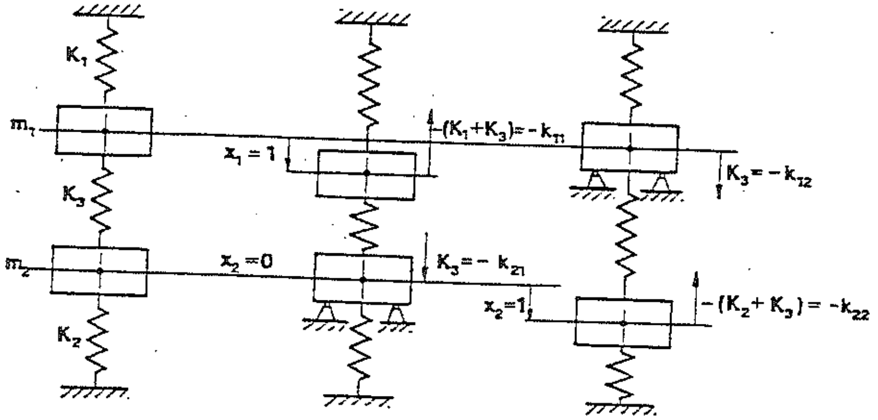


Fig.5.23-2

Questo sistema di equazioni differenziali rappresenta quindi il modello matematico del moto libero di un sistema discreto, a due gradi di libertà, in assenza di azioni smorzanti.

L'integrale generale del sistema (5.23-3) si ottiene ponendo nelle (5.23-3):

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ x_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases} \qquad (5.23\text{-}4)$$

Si ottiene così il sistema di equazioni algebriche omogenee in $C_1$ e $C_2$:

$$\begin{cases} m_1\lambda^2 C_1 + k_{11}C_1 + k_{12}C_2 = 0 \\ m_2\lambda^2 C_2 + k_{21}C_1 + k_{22}C_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}5)$$

Dividendo la prima di queste equazioni per $m_1$, la seconda per $m_2$ ed ordinando si ottiene:

$$\begin{cases} (\lambda^2 + k_{11}/m_1)C_1 + (k_{12}/m_1)C_2 = 0 \\ (k_{21}/m_2)C_1 + (\lambda^2 + k_{22}/m_2)C_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}6)$$

Posto:

$$\begin{aligned} k_{11}/m_1 &= (K_1 + K_3)/m_1 = \Omega_1^2 \\ k_{22}/m_2 &= (K_2 + K_3)/m_2 = \Omega_2^2 \\ k_{12}/m_1 &= -K_3/m_1 = -\Omega_{13}^2 \\ k_{21}/m_2 &= -K_3/m_2 = -\Omega_{23}^2 \end{aligned} \qquad (5.23\text{-}7)$$



le (5.23-6) si scrivono:

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \Omega_1^2)C_1 - \Omega_{13}^2 C_2 = 0 \\ -\Omega_{23}^2 C_1 + (\lambda^2 + \Omega_2^2)C_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}8)$$

Si osservi che le grandezze $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_{13}$, $\Omega_{23}$, definite dalle posizioni (5.23-7), hanno le dimensioni di una pulsazione e coincidono con le pulsazioni naturali dei quattro sistemi ad 1 grado di libertà rappresentati in fig.5.23-3 e che sono parti (subsistemi) del sistema in esame.

Perché il sistema di equazioni (5.23-8) abbia soluzioni $C_1$ e $C_2$ diverse da zero, il determinante dei coefficienti deve essere pari a zero.

Si osservi a questo proposito che soluzioni nulle ($C_1 = C_2 = 0$) significano per le (5.23-4), assenza di moto del sistema (soluzione banale) e che per $\Delta = 0$ dalle (5.23-8) si ottengono soluzioni $C_1$ e $C_2$ indeterminate:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\Omega_{13}^2 \\ 0 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & -\Omega_{13}^2 \\ -\Omega_{23}^2 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} = 0/0$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & 0 \\ -\Omega_{23}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & -\Omega_{13}^2 \\ -\Omega_{23}^2 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} = 0/0$$

Per quanto detto dovrà risultare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & -\Omega_{13}^2 \\ -\Omega_{23}^2 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.23\text{-}9)$$

Sviluppando $\Delta$, si ottiene:

$$\lambda^4 + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\lambda^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2 = 0 \qquad (5\text{-}23\text{-}10)$$

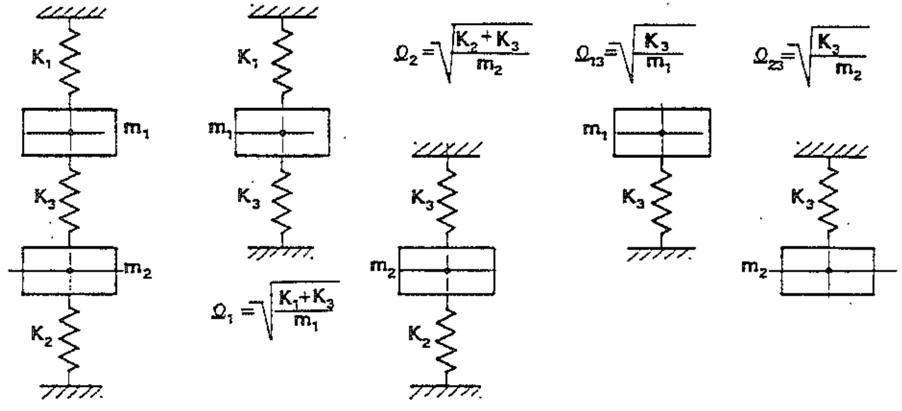


Fig.5.23–3

Il determinante $\Delta$ è il determinante caratteristico del sistema di equazioni (5.23-8) e l'equazione (5.23-10) è l'equazione algebrica caratteristica dello stesso sistema.

L'equazione (5.23-10) è biquadratica in $\lambda$ e le sue due radici risultano essere le seguenti:

$$\lambda_{1,2}^2 = -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 \pm \sqrt{[(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2]^2-(\Omega_1^2\Omega_2^2-\Omega_{13}^2\Omega_{23}^2)} =$$
$$= -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 \pm \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2+\Omega_{13}^2\Omega_{23}^2}$$

Poiché il discriminante è maggiore di zero e minore di $[(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2]^2$, le due radici risultano reali e negative.
Posto:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 = -\omega_1^2 &= -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 + \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2+\Omega_{13}^2\Omega_{23}^2}\\ \lambda_2^2 = -\omega_2^2 &= -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 - \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2+\Omega_{13}^2\Omega_{23}^2}\end{aligned} \qquad (5.23\text{-}10')$$

con $\omega_1$ e $\omega_2$ reali e positive ed $\omega_1 < \omega_2$, le quattro radici della equazione caratteristica risultano date da:

$$\lambda_1 = \pm i\omega_1$$
$$\lambda_2 = \pm i\omega_2$$



A ciascuna di queste radici corrisponde un integrale particolare del tip (5.23-4): l'integrale generale del sistema (5.23-3) sarà quindi dato da:

$$\begin{cases} x_1(t) &= C_{11}e^{i\omega_1 t}+C_{12}e^{-i\omega_1 t}+C_{13}e^{i\omega_2 t}+C_{14}e^{-i\omega_2 t}\\ x_2(t) &= C_{21}e^{i\omega_1 t}+C_{22}e^{-i\omega_1 t}+C_{23}e^{i\omega_2 t}+C_{24}e^{-i\omega_2 t}\end{cases} \qquad (5.23\text{-}11$$

Tenendo presenti le formule di Eulero si potrà scrivere in definitiva:

$$\begin{cases} x_1(t) &= A_{11}\cos(\omega_1 t+\phi_{11})+A_{12}\cos(\omega_2 t+\phi_{12})\\ x_2(t) &= A_{21}\cos(\omega_1 t+\phi_{21})+A_{22}\cos(\omega_2 t+\phi_{22})\end{cases} \qquad (5.23\text{-}12$$

Da queste relazioni si deduce che il moto libero di ciascuna delle du masse $m_1$ ed $m_2$ è somma di due moti armonici di pulsazione $\omega_1$ ed $\omega$ rispettivamente.

Noti i valori di $\Omega_1^2$, $\Omega_2^2$, $\Omega_{13}^2$, $\Omega_{23}^2$, dati dalle (5.23-7), i valori di $\omega_1^2$ ed $\omega$ possono essere ricavati graficamente con la costruzione riportata i fig.5.23–4, analoga a quella del cerchio di Mohr relativo a stati tensional piani.

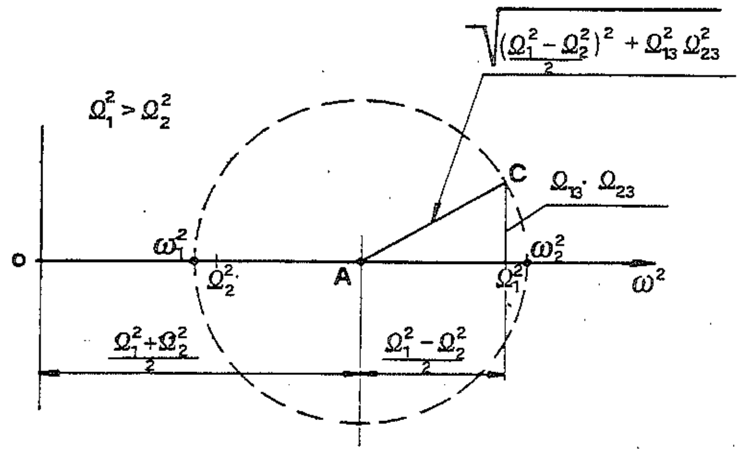


Fig.5.23–4

Riportati sull'asse $\omega^2$, in una prefissata scala, i valori di $\Omega_1^2$ ed $\Omega_2^2$, s individua il punto medio $A$ del segmento $\Omega_1^2\Omega_2^2$.

Il segmento $OA$ rappresenta il valore di $(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2$, mentre il segment $A\Omega_1^2$ rappresenta, sempre nella scala adottata, il valore $(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2$.

Riportato per il punto $\Omega_1^2$ il segmento pari a $\Omega_{13} \cdot \Omega_{23}$, normale all'asse delle $\omega^2$, il segmento $AC$ rappresenta il valore:

$$AC = \sqrt{\left(\frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2}\right)^2 + \Omega_{13}^2 \Omega_{23}^2}$$

La circonferenza di centro $A$ e raggio pari ad $AC$ individua, sull'asse $\omega^2$, i valori di $\omega_1^2$ e $\omega_2^2$.

In figura si è supposto $\Omega_1^2 > \Omega_2^2$, ma la costruzione è analoga per $\Omega_1^2 < \Omega_2^2$. Dall'esame della fig.5.23–4 si deduce che per $\Omega_1 > \Omega_2$ risulta:

$$\omega_1 < \Omega_2 < \Omega_1 < \omega_2 \qquad (5.23\text{-}13)$$

Analogamente si deduce che per $\Omega_2 > \Omega_1$ risulta:

$$\omega_1 < \Omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 \qquad (5.23\text{-}14)$$

Il valore della pulsazione $\omega_1$ è quindi in ogni caso più basso dei valori $\Omega_1$ ed $\Omega_2$, mentre il valore di $\omega_2$ risulta essere sempre più grande dei suddetti valori.

### b) *La determinazione delle costanti di integrazione*

Riprendendo in esame le (5.23-12), si osserva che in queste relazioni compaiono otto costanti di integrazione, $A_{ij}$ e $\phi_{ij}$ ($i$ e $j = 1,2$); per la loro determinazione è necessario scrivere otto relazioni indipendenti, che le legano.

Quattro di queste relazioni si ottengono fissando le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{1,0} \\ \dot{x}_1(0) &= v_{1,0} \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} x_2(0) &= x_{2,0} \\ \dot{x}_2(0) &= v_{2,0} \end{aligned}$$

Le altre quattro relazioni debbono necessariamente essere caratteristiche del sistema e si determinano nel modo seguente.

Poiché ciascuno dei due moti armonici, che compaiono nelle (5.23-12), costituisce un integrale particolare delle equazioni del moto, ognuna di queste equazioni deve essere soddisfatta da ciascuno dei moti suddetti.

Prendendo in considerazione l'integrale particolare:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \\ x_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) \end{cases} \qquad (5.23\text{-}15)$$



e sostituendo questi valori nella prima delle (5.23-3) si ottiene:

$$-m_1\omega_1^2 A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + k_{11}A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) +$$
$$+k_{12}A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = 0$$

e quindi:

$$A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_{11})/A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = -k_{12}/(k_{11} - m_1\omega_1^2)$$

Dividendo per $m_1$ numeratore e denominatore della frazione a s membro di questa relazione e ricordando le (5.23-7), si può scrivere

$$A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_{11})/A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2) \qquad (5$$

Essendo il secondo membro della (5.23-16) costante, le due gr armoniche, che figurano a primo membro della stessa relazione, dc essere in fase tra loro, risultando così:

$$\phi_{11} = \phi_{21} + 2k\pi \qquad (k = 0,1,2,...)$$

(

$$A_{11}/A_{21} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2)$$

Analogamente sostituendo nella prima delle (5.23-3) l'integrale lare:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \\ x_2(t) = A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_{22}) \end{cases} \qquad ($$

si ottiene:

$$A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_{12})/A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_{22}) = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2) \qquad ($$

Essendo il secondo membro di questa relazione costante dovr essere:

$$\phi_{12} = \phi_{22} + 2k\pi \qquad (k = 0,1,2,...)$$
$$A_{12}/A_{22} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2)$$

Le (5.23-17) e le (5.23-20) sono le quattro relazioni che, aggi condizioni iniziali, permettono il calcolo delle otto costanti di inte

Posto:

$$\alpha_1 = A_{11}/A_{21} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2)$$
$$\alpha_2 = A_{12}/A_{22} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2)$$
$$\phi_{11} = \phi_{21} = \phi_1 \quad ; \quad \phi_{12} = \phi_{22} = \phi_2$$

l'integrale generale (5.23-12) si può infine scrivere:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = (A_{11}/\alpha_1)\cos(\omega_1 t + \phi_1) + (A_{12}/\alpha_2)\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \qquad (5.23\text{-}22)$$

e le quattro costanti di integrazione che vi compaiono ($A_{11}$, $A_{12}$, $\phi_1$ e $\phi_2$) sono determinate dalle quattro condizioni iniziali.

### c) I modi di vibrare del sistema

Da quanto precede si possono trarre le seguenti conclusioni:

1°) Il moto libero $x_1(t)$ e $x_2(t)$ di ciascuna delle due masse $m_1$ ed $m_2$ del sistema è somma di due moti armonici di diversa pulsazione e risulta pertanto non armonico ed in genere non periodico.
Ciascuno di questi moti armonici viene chiamato modo di vibrare del sistema.

2°) Ogni modo di vibrare del sistema è caratterizzato, oltre che dal valore della pulsazione naturale, dal rapporto tra le ampiezze di oscillazione delle due masse.
Indicando come ***primo modo di vibrare*** quello a pulsazione più bassa $\omega_1$ e ***secondo modo di vibrare*** quello a pulsazione $\omega_2$, le grandezze che li caratterizzano sono date da:
1° modo di vibrare

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 - \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2}} \\ \alpha_1 = A_{11}/A_{21} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2-\omega_1^2) \end{cases}$$

2° modo di vibrare

$$\begin{cases} \omega_2 = \sqrt{(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 + \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2}} \\ \alpha_2 = A_{12}/A_{22} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2-\omega_2^2) \end{cases}$$

3°) Tenendo presente le disuguaglianze (5.23-13) e (5.23-14), si deduce che:

$$\alpha_1 = A_{11}/A_{21} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2-\omega_1^2) > 0$$
$$\alpha_2 = A_{12}/A_{22} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2-\omega_2^2) < 0$$

e queste relazioni stanno ad indicare che il primo modo di vibrare (a pulsazione $\omega_1$ più bassa) è caratterizzato dalla circostanza che le due



masse si muovono in ogni istante nello stesso verso, ma in general diversa velocità (diversa ampiezza ed uguale frequenza).
Il secondo modo di vibrare (a pulsazione $\omega_2$ più elevata) è caratter to invece dalla circostanza che le due masse si muovono in ogni is in verso opposto ed in generale con diversa velocità.

4°) Poiché ciascun modo di vibrare soddisfa separatamente alle equa del moto, se le condizioni iniziali sono opportunamente scelte, il sis oscilla secondo un particolare modo e quindi con legge armonica. Si dimostra che le condizioni iniziali, alle quali corrisponde una lazione libera costituita da un solo modo di vibrare, sono quell soddisfano alle relazioni:

$$1° \text{ modo di vibrare} \quad = \quad \begin{cases} x_{1,0}/x_{2,0} = A_{11}/A_{21} = \alpha_1 \\ v_{1,0}/v_{2,0} = A_{11}/A_{21} = \alpha_1 \end{cases}$$

$$2° \text{ modo di vibrare} \quad = \quad \begin{cases} x_{1,0}/x_{2,0} = A_{12}/A_{22} = \alpha_2 \\ v_{1,0}/v_{2,0} = A_{12}/A_{22} = \alpha_2 \end{cases}$$

I due modi di vibrare del sistema sono spesso rappresentati traccian linee elastiche normali (v. fig.5.23-5).

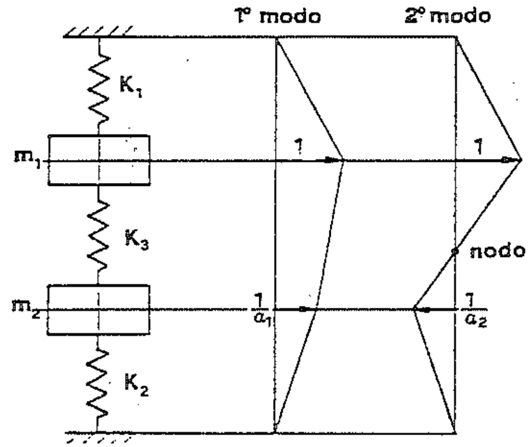


Fig.5.23-5

Queste particolari linee elastiche risultano definite imponendo la dizione (condizione di normalizzazione) che l'ampiezza di vibrazione massa $m_1$ nei due modi di vibrare sia pari ad uno:

$$A_{11} = A_{12} = 1$$

Restano così fissati i valori delle ampiezze di vibrazione della massa $m_2$:

$$1^\circ \text{ modo di vibrare} \quad : \quad A_{21} = 1/\alpha_1 > 0$$

$$2^\circ \text{ modo di vibrare} \quad : \quad A_{22} = 1/\alpha_2 < 0$$

È interessante notare che il secondo modo di vibrare è caratterizzato dalla presenza di un nodo di oscillazione, cioè di una sezione dell'elemento elastico, che accoppia le due masse, che non oscilla.

## 5.24 Oscillazioni forzate in assenza di smorzamento

Se sulle due masse $m_1$ ed $m_2$ del sistema di fig.5.23–1 agiscono forze eccitanti $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, il sistema compie un moto forzato.
Le equazioni del moto forzato del sistema sono:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = f_2(t) \end{cases} \tag{5.24-1}$$

Se le azioni forzanti sono funzioni periodiche del tempo, essendo il sistema lineare, è possibile determinare separatamente i moti forzati del sistema, eccitati da ciascuna delle componenti armoniche delle azioni forzanti: il moto del sistema si otterrà sovrapponendo gli effetti così calcolati.
Si supponga, pertanto, che su una delle masse del sistema, p.es. la $m_1$, agisca una forza armonica $F(t) = F_0 \cos\omega t$ (v. fig.5.24–1).
Le equazioni del moto (5.24-1) diventano:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = F_0\cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{5.24-2}$$

L'integrale generale del sistema sarà del tipo:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1l} + x_{1f} \\ x_2(t) = x_{2l} + x_{2f} \end{cases}$$

dove $x_{1l}$ ed $x_{2l}$ rappresentano l'integrale generale del sistema omogeneo e quindi l'oscillazione libera, mentre $x_{1f}$ ed $x_{2f}$ rappresentano l'integrale particolare del sistema (5.24-2) e quindi l'oscillazione forzata, eccitata dalla forza $F_0 \cos\omega t$.



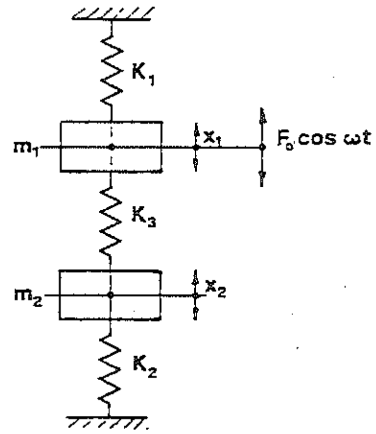


Fig.5.24–1

L'integrale particolare suddetto è del tipo:

$$\begin{cases} x_{1f} = X_1\cos\omega t \\ x_{2f} = X_2\cos\omega t \end{cases}$$

e il moto forzato di ciascuna delle due masse è un moto armonico sazione pari a quella della causa eccitante.
Sostituendo le (5.24-3) nelle equazioni del moto (5.24-2) ed ordin $X_1$ ed $X_2$ si ottiene:

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + k_{11})X_1 + k_{12}X_2 = F_0 \\ (k_{21}X_1 + (-m_2\omega^2 + k_{22})X_2 = 0 \end{cases}$$

Le (5.24-4) costituiscono un sistema di due equazioni algebriche n incognite $X_1$ ed $X_2$.
Dividendo la prima delle (5.24-4) per $m_1$ e la seconda per $m_2$ e presenti le (5.23-7), si ottiene:

$$\begin{cases} (\Omega_1^2 - \omega^2)X_1 - \Omega_{13}^2 X_2 = F_0/m_1 \\ -\Omega_{23}^2 X_1 + (\Omega_2^2 - \omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

Indicando con $\Delta$ il determinante dei coefficienti del sistema (5.24

$$\Delta = (\Omega_1^2 - \omega^2)(\Omega_2^2 - \omega^2) - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2$$

si potrà scrivere:

$$\begin{cases} X_1 = (F_0/m_1)(\Omega_2^2 - \omega^2)/\Delta \\ X_2 = (F_0/m_1)\Omega_{23}^2/\Delta \end{cases} \tag{5.24-7}$$

D'altra parte gli spostamenti $x_{1,st}$ e $x_{2,st}$, che subiscono le due masse del sistema per l'applicazione statica su $m_1$ di una forza pari ad $F_0$, si ottengono dalle (5.24-2) ponendo:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0 \quad ; \quad x_1 = x_{1,st} \quad ; \quad x_2 = x_{2,st}$$

Si avrà pertanto:

$$\begin{cases} k_{11}x_{1,st} + k_{12}x_{2,st} = F_0 \\ k_{21}x_{1,st} + k_{22}x_{2,st} = 0 \end{cases} \tag{5.24-8}$$

Dividendo la prima di queste equazioni per $m_1$ e la seconda per $m_2$ e tenendo presenti le (5.23-7) si ottiene:

$$\begin{cases} \Omega_1^2 x_{1,st} - \Omega_{13}^2 x_{2,st} = F_0/m_1 \\ -\Omega_{23}^2 x_{1,st} + \Omega_2^2 x_{2,st} = 0 \end{cases} \tag{5.24-9}$$

e quindi:

$$\begin{cases} x_{1,st} = \dfrac{F_0}{m_1} \cdot \dfrac{\Omega_2^2}{\Delta_{st}} \\ x_{2,st} = \dfrac{F_0}{m_1} \cdot \dfrac{\Omega_{23}^2}{\Delta_{st}} \end{cases} \tag{5.24-10}$$

avendo indicato con $\Delta_{st}$ il determinante dei coefficienti del sistema (5.24-9):

$$\Delta_{st} = \Omega_1^2\Omega_2^2 - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2$$

Tenendo presenti le (5.24-7) e le (5.24-10), è possibile ricavare i rapporti $X_1/x_{1,st}$ e $X_2/x_{2,st}$:

$$\begin{cases} X_1/x_{1,st} = \dfrac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\Omega_2^2} \cdot \dfrac{\Delta_{st}}{\Delta} \\ X_2/x_{2,st} = \dfrac{\Delta_{st}}{\Delta} \end{cases} \tag{5.24-11}$$

Le (5.24-11) permettono di tracciare le curve $X_1/x_{1,st}$ e $X_2/x_{2,st}$ in funzione di $\omega$ (v. fig.5.24-2).



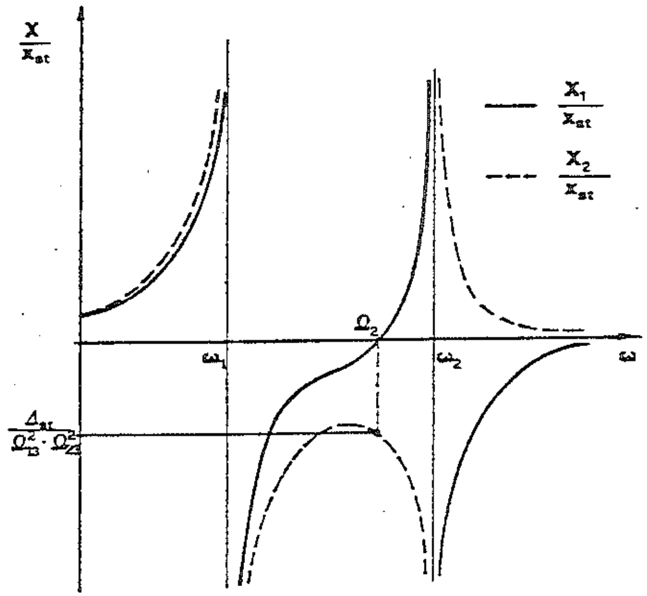


Fig.5.24-2

A questo scopo basta tener presente che:

1°) per $\omega = 0$ : $\Delta = \Delta_{st}$ ; $X_1/x_{1,st} = X_2/x_{2,st} = 1$
2°) per $\omega \to \omega_1$, e per $\omega \to \omega_2$ : $\Delta \to 0$ e $X_1/x_{1,st}$ e $X_2/x_{2,st}$
3°) per $\omega = \Omega_2$ : $X_1/x_{1,st} = 0$ ; $X_2/x_{2,st} = -\Delta_{st}/\Omega_{13}^2 \cdot \Omega_{23}^2$
4°) per $\omega \to \infty$ : $X_1/x_{1,st} \to 0$ ; $X_2/x_{2,st} \to 0$

È interessante notare che per $\omega = \Omega_2$ la massa $m_1$, sulla quale forza eccitante, resta ferma ($x_1 = 0$), mentre per la massa $m_2$ risu (5.24-11) e (5.24-10):

$$X_2 = x_{2,st} \cdot \Delta_{st}/\Delta = -\frac{F_0}{m_1} \cdot \frac{\Omega_{23}^2}{\Omega_{13}^2\Omega_{23}^2} = -\frac{F_0}{K_3}$$

La (5.24-12) esprime la circostanza che la massa $m_2$ oscilla in m che la reazione della molla $K_3$ fa in ogni istante equilibrio alla f agente sulla massa $m_1$:

$$K_3 x_2(t) = K_3 X_2 \cos\omega t = F_0 \cos\omega t$$

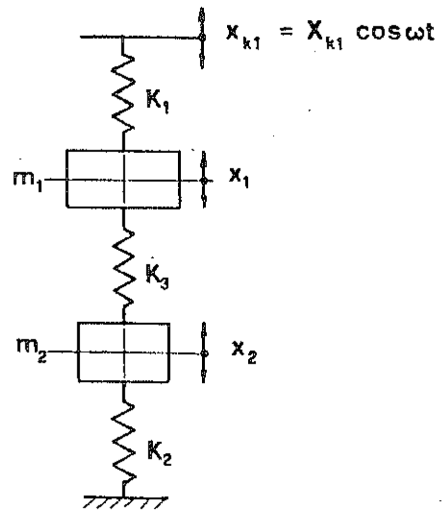


Fig.5.24–3

Anche nel caso in esame l'oscillazione forzata può essere eccitata imponendo, ad uno o ad entrambi gli estremi del sistema, un moto periodico.

Nell'ipotesi che l'estremo della molla $K_1$ vibri (v. fig.5.24–3) con legge armonica:

$$x_{K_1}(t) = X_{K_1} \cos\omega t$$

le equazioni del moto del sistema risultano essere le seguenti:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + K_1(x_1 - x_{K_1}) + K_3(x_1 - x_2) = 0 \\ m_1\ddot{x}_2 + K_2 x_2 + K_3(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Tenendo presenti le (5.23-2) si può scrivere:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = K_1 x_{K_1} = K_1 X_{K_1} \cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

e le equazioni del moto risultano essere quelle di un moto eccitato da una forza armonica applicata su $m_1$, di ampiezza $F_0 = K_1 X_{K_1}$ e pulsazione $\omega$.

Il moto forzato del sistema è quindi dato per le (5.24-3) e (5.24-7):

$$\begin{cases} x_{1f} = X_1 \cos\omega t \\ x_{2f} = X_2 \cos\omega t \end{cases}$$



con:

$$\begin{cases} X_1 = K_1 X_{K_1}(\Omega_2^2 - \omega^2)/m_1\Delta \\ X_2 = K_1 X_{K_1}\Omega_{23}^2/m_1\Delta \end{cases}$$

È da notare tra l'altro che anche in questo caso risulterà $X_1 =$ 
$\omega = \Omega_2$.

## 5.25 Esempio di applicazione: smorzatori dinamici

Per contenere entro limiti accettabili le vibrazioni forzate di un sis meccanico, si fa spesso ricorso ad uno smorzatore dinamico.

Questo tipo di smorzatore è costituito essenzialmente da un sistema liario massa–molla, che, collegato al sistema vibrante, provoca una att zione o smorzamento delle vibrazioni forzate di quest'ultimo: il prir di funzionamento di uno smorzatore dinamico è, come si vedrà, comp mente diverso da quello degli smorzatori di tipo viscoso.

A questo scopo si supponga che il sistema sottoposto ad oscill forzate sia il sistema ad 1 grado di libertà $(M, K)$ di fig.5.25–1 e c esso sia collegato lo smorzatore dinamico $(m, k)$.

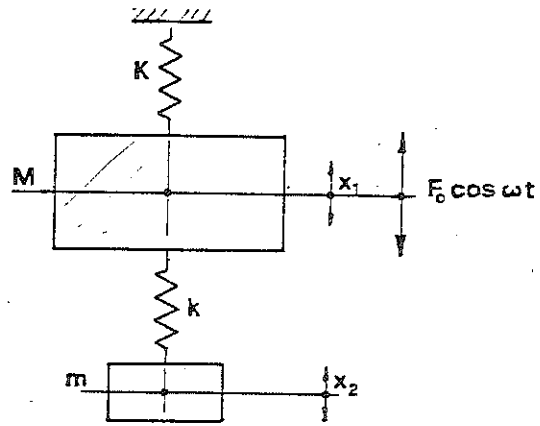


Fig.5.25–1

Con l'applicazione di quest'ultimo, il sistema vibrante diviene a due di libertà e ad esso possono essere applicati i risultati ottenuti nel para precedente.

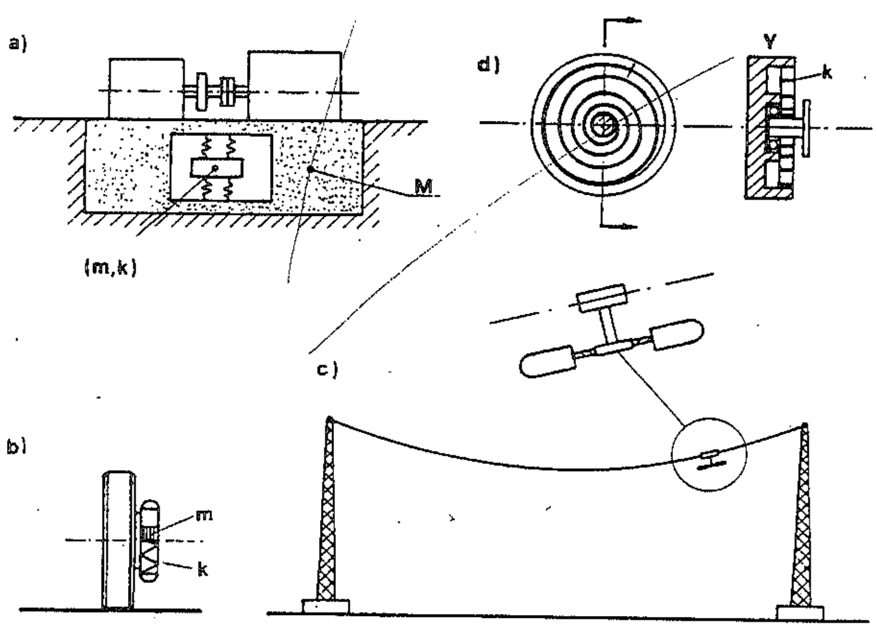


Fig.5.25–2

Ricordando che per $\omega = \Omega_2$ risulta:

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = -F_0/K_3 \end{cases}$$

e tenendo presente che dal confronto delle figg. 5.24–1 e 5.25–1 risulta:

$$m_1 = M \quad ; \quad m_2 = m$$
$$K_1 = K \quad ; \quad K_2 = 0 \quad ; \quad K_3 = k$$

Si deduce quindi che per:

$$\omega = \Omega_2 = \sqrt{k_{22}/m_2} = \sqrt{k/m} \tag{5.25-1}$$

risulta:

$$\begin{cases} x_{1f} = 0 \\ x_{2f} = -F_0 \cos\omega t/k \end{cases}$$

Questo risultato sta ad indicare che lo smorzatore dinamico $(m,k)$ annulla l'oscillazione forzata della massa $M$, se la sua pulsazione naturale, $\omega_s = \sqrt{k/m}$, eguaglia la pulsazione della causa eccitante $F_0 \cos\omega t$.



In tali condizioni $(\omega = \omega_s)$ la massa $m$ dello smorzatore oscilla in sizione di fase con la causa eccitante, determinando una reazione ( dell'elemento elastico $k$, che bilancia istante per istante la $F_0 \cos\omega t$.

Nota la pulsazione $\omega$ della causa eccitante, la determinazione dei della massa $m$ e della rigidità $k$ dello smorzatore si ottiene associand (5.25-1) la relazione che fissa il valore del rapporto $r$ $(r < 1)$ tra la ı $m$ dello smorzatore e la massa nota $M$ del sistema da smorzare:

$$\omega = \omega_s = \sqrt{k/m}$$

$$m/M = r$$

Smorzatori del tipo descritto sono usati per attenuare le vibrazioni fc dei basamenti industriali (v. fig.5.25–2,a), delle ruote di un autov (v. fig.5.25–2,b), le vibrazioni autoeccitate dei conduttori delle linee a tensione (smorzatori Stockbridge, v. fig.5.25–2,c), le oscillazioni tors nei motori a c.i. (v. fig.5.25–2,d).

## 5.26 Sistemi ad $n$ gradi di libertà

Si riprenda in esame il sistema conservativo a due gradi di libertà presentato in fig.5.23–1 e si riscrivano le corrispondenti equazioni del libero (5.23-3):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (5$$

Il sistema di equazioni differenziali (5.23-1) può essere scritto in matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (5$$

ed in forma simbolica:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \qquad (5$$

dove:

$[m] =$ matrice diagonale $2 \times 2$ delle masse $= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

$[k] =$ matrice simmetrica $(k_{12} = k_{21})$ $2 \times 2$ dei coefficienti di rigidità $= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$

$\{\ddot{x}\} =$ matrice colonna $2 \times 1 = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$

$\{x\} =$ matrice colonna $2 \times 1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$

Per un sistema ad $n$ gradi di libertà le equazioni del moto coincidono formalmente con le (5.26-2), essendo:

$[m] =$ matrice diagonale $n \times n$ delle masse $m_i$ $=$

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & 0 & \\ & & \cdots & \\ 0 & & \cdots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

$[k] =$ matrice simmetrica $n \times n$ dei coefficienti di rigidità $=$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & \dots & k_{1n} \\ & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \text{sim} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{\ddot{x}\} =$ vettore colonna $n \times 1$ delle accelerazioni $\ddot{x}_i$

$\{x\} =$ vettore colonna $n \times 1$ degli spostamenti $x_i$.



Le (5.26-2) valgono quindi per qualsiasi sistema discreto conserva
interessante osservare che, scritta l'equazione del moto libero per un s
ad 1 grado di libertà:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (!$$

le (5.26-2) si ottengono semplicemente aggiungendo alla (5.12-1) i s
di matrice.

A questa identità formale del modello matematico si accompagr
analogia di comportamento dinamico di maggior rilievo.

Per un sistema ad $n$ gradi di libertà si può infatti affermare che:

1°) il moto libero $x_i(t)$ di ciascuna delle masse $m_i$ del sistema è in ge
somma di $n$ moti armonici di pulsazione $\omega_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$: ci
di questi moti armonici viene chiamato *modo di vibrare del sist*

2°) ogni *modo di vibrare del sistema* è caratterizzato oltre che dal
sazione $\omega_j$, da una particolare linea elastica normale: sono cioè
minati i valori dei rapporti:

$$u_{ij} = A_{ij}/A_{1j}$$

tra l'ampiezza $A_{ij}$ della massa $i$–esima e l'ampiezza della mass

3°) ordinati i valori di $\omega_j$ in modo che risulti:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 ...... < \omega_n$$

la pulsazione $\omega_1$ più bassa viene chiamata pulsazione fondament
sistema: questo modo di vibrare è caratterizzato dal fatto ch
masse del sistema si muovono tutte nello stesso verso e pert
corrispondente linea elastica normale non presenta nodi.
Nel secondo modo di vibrare le masse del sistema si dividono
gruppi; le masse di ciascun gruppo si muovono nello stesso vers
due gruppi si muovono in verso opposto.
Questo modo di vibrare presenta un nodo di oscillazione, ci
sezione che non partecipa alla vibrazione e che separa i due
suddetti.
In generale si può affermare che il modo $j$–esimo di vibrare,
sazione $\omega_j$, presenta $(j-1)$ nodi, ciascuno dei quali separa gr
masse che oscillano in versi opposti.
In fig.5.26–1 sono riportate, a titolo esemplificativo, le linee el
normali di un sistema a quattro gradi di libertà.

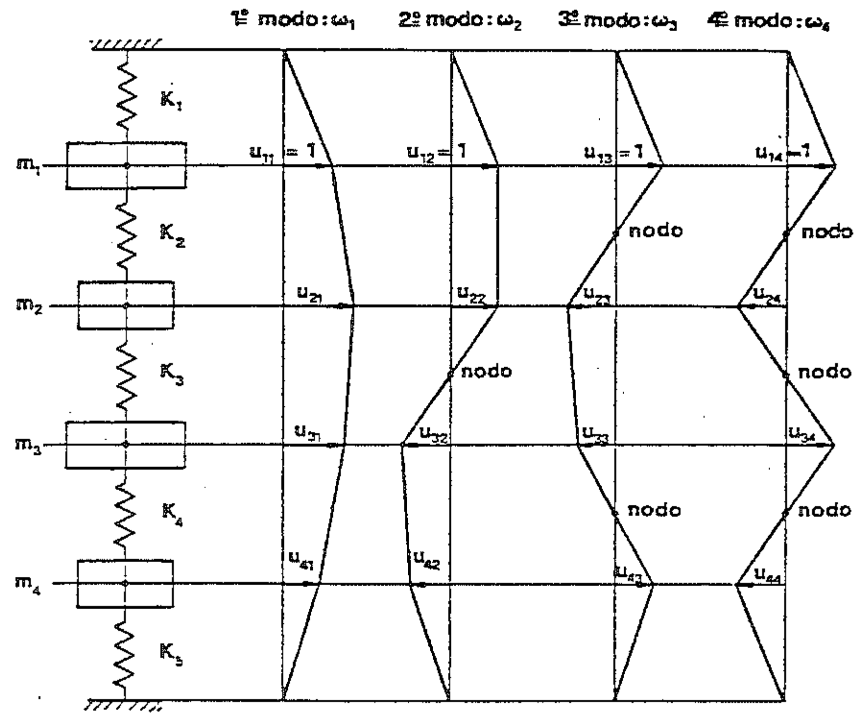


Fig.5.26–1

4°) Se un sistema ad $n$ gradi di libertà è eccitato a vibrare da forze armoniche della stessa pulsazione $\omega$, tutte le masse del sistema oscillano con legge armonica di pulsazione $\omega$.
Al variare di $\omega$ si manifestano $n$ fenomeni di risonanza, ciascuno dei quali caratterizzato dal fatto che $\omega = \omega_j$ $(j = 1, 2, ...., n)$. In prossimità di ciascuna risonanza il sistema oscilla con una linea elastica praticamente simile a quella del modo di vibrare in risonanza con le cause eccitanti.

# CAPITOLO 6

## BILANCIAMENTO DEGLI ORGANI ROTANTI RIGI

### 6.1 Premessa

Nel Cap.3 è stato messo in evidenza che il rotore di una macc essendo progettato e costruito per ruotare intorno ad un asse d'inerzia, ruota di fatto intorno ad un asse che non è né barice principale d'inerzia.

Per questo motivo durante la rotazione si generano una forza ed pia d'inerzia (v. par.3.5), rotanti col rotore, che costituiscono le cause di indesiderate vibrazioni della macchina.

Si ricordi che con la dizione "rotore di una macchina" in genere la parte rotante di macchine a regime assoluto, quali turbine, co assiali o centrifughi, motori elettrici, ecc.

Ma quanto sarà detto a proposito del rotore di una macchina è tutti gli organi o sistemi meccanici rotanti, tra i quali ricordiam gli alberi a gomiti delle macchine alternative, le eliche per la pr navale ed aerea, le ruote degli autoveicoli, ecc.

Si è anche accennato nel Cap.3 che far coincidere l'asse di rota un asse centrale d'inerzia richiederebbe una perfezione tecnica ch giungibile in pratica.

Pur essendo questo concetto chiaro ed indiscutibile, è tuttavia c accennare che tra le più comuni, inevitabili cause di imprecisione c figurano: