Esercizi sugli spazi vettoriali.

1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori. Si provi che il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è dipendente se e solo se uno dei due vettori è nullo, oppure $\exists\ k \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Si provi che il sistema
$$\big[\,(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\,\big]$$
è linearmente dipendente, utilizzando solo la definizione di dipendenza lineare, e i sistemi di equazione lineari.

3. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e si consideri il sistema $\mathcal{S} = [\, f_1, f_2, \ldots, f_t\,]$, dove $0 \leq \deg f_1 < \deg f_2 < \ \ldots\ < \deg f_t$. Si provi che $\mathcal{S}$ è indipendente.

4. Sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   (a) Si provi che $\dim V = 4$.
   (b) Si provi che il sottoinsieme
   $$W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \ \middle|\ a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$$
   è un sottospazio di V.
   (c) Si provi che il sottoinsieme
   $$W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \ \middle|\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$
   è un sottospazio di V.

5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i sistemi
$$\mathcal{S}' = \big[\,(1,2,3),(4,5,6)\,\big]\ ;\ \mathcal{S}'' = \big[\,(1,1,2),(1,1,3)\,\big]\,.$$
Si osservi che $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ sono indipendenti, e si determini, per ognuno dei due sistemi, un completamento a base.

6. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e si consideri il sottoinsieme $U \subseteq V$ costituito dal vettore nullo e dai polinomi di grado dispari e il sottoinsieme $W \subseteq V$ costituito dal vettore nullo e dai polinomi in cui compaiono solo monomi di grado dispari. Si verifichi se ognuno di tali insiemi è un sottospazio.