

Università degli Studi di Napoli «Federico II»
Facoltà di Architettura

Upta

Corso di laurea in Urbanistica e Scienze della Pianificazione Territoriale e Ambientale
AA 2014-2015

Corso integrato di Matematica e statistica

Docente: Livia D'Apuzzo.

Statistica Descrittiva Univariata

**Sintesi delle distribuzioni statistiche: indici di
tendenza centrale**

5. Le medie di calcolo (per caratteri quantitativi)

Premessa sulle medie riferita sia a caratteri quantitativi che qualitativi

Per riassumere i risultati di un'indagine statistica relativi a un carattere è opportuno sintetizzare le modalità o i valori a_1, a_2, \dots, a_n rilevati, sostituendo ad essi un'unica modalità o valore a , detto **media** (*sostituendo ad esempio a un insieme di altezze l'altezza media, ad un insieme di colori il colore più frequente*).

Ciò permette di confrontare i risultati di diverse indagini statistiche su uno stesso carattere: il confronto è operato confrontando le medie ottenute nelle differenti indagini.

La media a che si sostituisce a a_1, a_2, \dots, a_n deve soddisfare opportune condizioni; nel caso di un carattere ordinato, la richiesta minima è che a deve cadere tra il minimo e il massimo delle modalità o dei valori coinvolti; nel caso di un carattere quantitativo deve soddisfare ulteriori richieste che sono elencate nel prossimo paragrafo (cfr. “*Sul concetto media di n valori numerici*”)

In statistica si distinguono due tipi di medie:

◆ **medie di calcolo o medie razionali** riferite ai soli **caratteri quantitativi**: una *media di calcolo* a è un numero determinato attraverso un calcolo in cui intervengono tutti i valori a_1, a_2, \dots, a_n , che a deve sintetizzare;

◆ **medie di posizione (moda, mediana, quantili)**: sono individuate solo da alcune modalità (o valori) del carattere e, per la mediana e i quantili, che sono riferiti solo a un carattere ordinabile, dalla posizione che tali modalità occupano nell'ordinamento crescente o decrescente di tutti le modalità rilevate.

In questo fascicolo ci occupiamo delle medie di calcolo per caratteri quantitativi e in particolare della media aritmetica che è la più utilizzata in statistica

Preliminare è il concetto di media di n numeri

1. Medie di calcolo

- **Sul concetto di media di n valori numerici.** L'operazione che trasforma una n-upla (a_1, a_2, \dots, a_n) di valori numerici in un unico valore di sintesi a , è una funzione detta usualmente *funzionale di sintesi* o *operatore di aggregazione*

$$M : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n \rightarrow a = M(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R \quad (1)$$

L'operatore M e il numero $a = M(a_1, a_2, \dots, a_n)$, sono detti “*operatore di media*” e “*valor medio* o *media*”, quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. a è espresso nella stessa unità di misura dei valori a_1, \dots, a_n ;
2. a è compreso tra il minimo ed il massimo dei valori a_1, \dots, a_n :

$$\min\{a_1, \dots, a_n\} \leq a \leq \max\{a_1, \dots, a_n\} \quad (\text{internalità})$$

3. Il funzionale M è *monotono*, verifica cioè la condizione seguente:

$$a_i \leq b_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n \Rightarrow a = M(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq b = M(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (\text{monotonia})$$

4. Il funzionale M è *idempotente*:

$$M(a, a, \dots, a) = a. \quad (\text{idempotenza o consistenza})$$

In poche parole: il valor medio a è un numero espresso nella stessa unità di misura dei valori che sintetizza, è compreso tra il più piccolo e il più grande di tali valori, il suo valore aumenta, per la proprietà di monotonia, se uno dei valori aumenta e diminuisce se uno dei valori diminuisce, e, infine, per la proprietà di idempotenza, se i valori sono tutti uguali il valor medio coincide con ognuno di essi.

Si distinguono due tipi di media: la *media semplice* che opera sui valori numerici così come si presentano e la *media ponderata* che considera ogni valore numerico insieme a un peso che a esso è attribuito; tale peso può avere vari significati: peso di importanza, frequenza (con cui il valore si presenta), probabilità, etc... Se con la (1) conveniamo di indicare un operatore di media semplice, possiamo indicare un operatore di media pesata con

$$M : (a_1, a_2, \dots, a_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \rightarrow a = M(a_1, a_2, \dots, a_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \in R \quad (2)$$

essendo, per ogni $i=1, 2, \dots, n$, p_i il peso attribuito al valore a_i .

- **Scarti dalla media.** Sia a una media dei valori a_1, a_2, \dots, a_n . Le differenze

$$a_1 - a \quad a_2 - a \quad \dots, \quad a_n - a$$

sono dette *scarti dalla media a*.

Una media è tanto più rappresentativa quando più gli scarti (in valore assoluto) sono globalmente piccoli.

- **Sulla determinazione di una media di calcolo.**

Una *media di calcolo* su n valori numerici è determinata da un'operazione (somma, prodotto, somma di quadrati, somma di reciproci...) sui numeri reali: essa è quel numero a che sostituito ad ognuno dei valori numerici a_1, a_2, \dots, a_n non cambia il risultato dell'operazione applicata a quei valori. Si dice allora che a è la media dei valori a_1, a_2, \dots, a_n , rispetto all'operazione considerata. Tra le medie di calcolo: la media aritmetica, la media geometrica, la media armonica e più in generale la media di ordine $p \neq 0$.

2. La media aritmetica

2.1 La media aritmetica semplice o media di ordine 1

(applicabile ai dati grezzi di una distribuzione statistica)

La media aritmetica dei numeri non necessariamente distinti

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

è il valore a che sostituito ad ognuno di essi non ne cambia la somma

$$a + \underset{n \text{ volte}}{a} + \dots + a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Leftrightarrow n \cdot a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

La media aritmetica semplice è allora il numero

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{media aritmetica semplice di } a_1, a_2, \dots, a_n$$

Tale media è usualmente indicata con la stessa lettera che indica i dati, ma soprassegnata

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i,$$

o con la lettera greca μ .

L'operatore di media aritmetica è il funzionale

$$M : (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow \bar{a} = M(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Esempio 1: Valutazione di uno studente

Uno studente universitario ha superato 10 esami: la seguente **tabella unitaria** (di dati grezzi) riporta, **esame per esame**, i voti che lo studente ha avuto (*)

esami	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
voti	24	26	28	26	26	27	28	24	26	25	<i>Ammontare</i> 260

Quale è la valutazione media dello studente?

Per l'esame di laurea è importante conoscere la somma dei voti; la valutazione media dello studente utile per l'esame di laurea è allora data dalla media aritmetica perché sostituita a ogni voto non ne altera la somma.

$$\frac{24 + 26 + 28 + 26 + 26 + 27 + 28 + 24 + 26 + 25}{10} = \frac{260}{10} = 26$$

26 voto medio

Verificare che, sostituendo 26 ad ogni termine della somma

$$24 + 26 + 28 + 26 + 26 + 27 + 28 + 24 + 26 + 25 = 260,$$

otteniamo ancora 260:

$$26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 = 260$$

Esempio 2: determinazione del prezzo unitario medio degli agrumi

Agrumi	$x = \text{prezzo al kilo}$
<i>Arance</i>	2€
<i>mandarini</i>	3€
<i>limoni</i>	5€

Prezzo unitario medio
 $(2+3+5)/3=10/3=3,33333$

(*) -----

la tabella dei voti dello studente rappresenta in statistica una tabella di dati grezza "unità/ valore del carattere" relativa alla distribuzione del carattere "voto" sui dieci esami (unità statistiche).

La media aritmetica dei valori $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ è il rapporto tra l'ammontare del carattere e il totale delle unità. Attribuendo il valore medio a tutte le unità si realizza l'equipartizione del carattere e non si cambia l'ammontare

2.2 La media aritmetica ponderata o pesata

La **somma ponderata** o **pesata** di n numeri a_1, a_2, \dots, a_n è il valore che si ottiene moltiplicando ogni numero a_j per un **peso** p_j (≥ 0), e sommando i valori $p_j a_j$ così ottenuti

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

p_j (≥ 0) = peso assegnato ad a_j secondo un dato criterio

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n = \sum_j p_j a_j$$

somma ponderata o pesata
di a_1, a_2, \dots, a_n

La **media aritmetica ponderata o pesata dei valori** di n numeri a_1, a_2, \dots, a_n è la somma pesata divisa per la somma dei pesi

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_j p_j a_j}{\sum_j p_j} \quad \text{media aritmetica ponderata (*)}$$

Un caso particolare: *somma dei pesi = 1*

$$\sum_j p_j = 1 \Rightarrow \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n = \sum_j p_j a_j$$

la media assume la forma di *somma pesata con somma dei pesi uguale a 1*, è quindi una **combinazione convessa** dei valori a_1, a_2, \dots, a_n

(*)-----

Se i pesi sono uguali la media ponderata coincide con la media aritmetica semplice

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p \Rightarrow \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{p a_1 + p a_2 + \dots + p a_n}{p + p + \dots + p} =$$
$$= \frac{p(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{np} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

MEDIA ARITMETICA PONDERATA COME COMBINAZIONE CONVESSA

Ogni media aritmetica ponderata dei valori distinti a_1, a_2, \dots, a_n , è una **combinazione convessa** degli stessi valori (cioè una media pesata degli stessi valori con pesi la cui somma è 1)

Dimostrazione: Consideriamo la media ponderata dei valori a_1, a_2, \dots, a_n , con pesi p_1, p_2, \dots, p_n :

$$\bar{a} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_j p_j a_j}{\sum_j p_j} .$$

il rapporto che esprime la media \bar{a} è uguale alla somma di n rapporti che si ottengono dividendo ogni addendo della somma al numeratore per il denominatore:

$$\bar{a} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{p_1}{\sum_j p_j} a_1 + \frac{p_2}{\sum_j p_j} a_2 + \dots + \frac{p_n}{\sum_j p_j} a_n$$

Allora

$$\bar{a} = p'_1 a_1 + p'_2 a_2 + \dots + p'_n a_n$$

con

$$p'_i = \frac{p_i}{\sum_j p_j}$$

perciò \bar{a}

è una somma pesata dei valori a_1, a_2, \dots, a_n , con pesi p'_1, p'_2, \dots, p'_n la cui somma è:

$$p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 1$$

L'asserto è così dimostrato

Esempi 3 di applicazione della media aritmetica pesata

Esempio 3.1 - (pesi come gradi di importanza o gradi di difficoltà).

Se un valore numerico ha il significato di valutazione, ad esso può essere attribuito un peso che indicare anche l'importanza (oggettiva o soggettiva) di chi esprime quella valutazione o la difficoltà o importanza del oggetto cui quella valutazione si riferisce. Nel caso qui di seguito illustrato i valori sono voti e i pesi indicano il grado di difficoltà della materia in cui si è ottenuto quel voto.

materia	voto	$p_i = \text{impor. o difficoltà.}$	voto \times peso
matematica	7	3	21
latino	6	2	12
<u>ginnastica</u>	<u>8</u>	<u>1</u>	<u>8</u>
<i>totali</i> \rightarrow	21	6	41

media aritmetica semplice $\frac{7+6+8}{3} = 7$

media aritmetica ponderata $\frac{3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 8}{3+2+1} = \frac{21+12+8}{6} = \frac{41}{6} = 6,8\bar{3}$

La media aritmetica pesata è minore di quella semplice perché al voto più alto (quello in ginnastica) è stato attribuito un peso più piccolo di quello riservato ai voti nelle altre materie.

Possiamo determinare la media aritmetica ponderata come combinazione convessa dei voti, prendendo come pesi quelli che si ottengono dividendo i pesi assegnati per il loro totale 6

materia	voto	$p'_i = p_i / 6 = \text{impor. o difficoltà.}$	voto \times peso
matematica	7	$p'_1 = 3 / 6 = 1 / 2$	$7 / 2$
latino	6	$p'_2 = 2 / 6 = 1 / 3$	$6 / 3 = 2$
<u>ginnastica</u>	<u>8</u>	$p'_3 = 1 / 6$	$8 / 6 = 4 / 3$
<i>totali</i> \rightarrow	21	1	41

media aritmetica ponderata $\frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{7}{2} + \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{21+12+8}{6} = \frac{41}{6} = 6,8\bar{3}$

Esempio 3.2 - (costo medio degli agrumi in base alla quantità acquistata).

Agrumi	$x = \text{costo al kilo}$	Quantità acquistata	Spesa
Arance	2€	200 kg	400 €
mandarini	3€	300 kg	900 €
limoni	5€	100 kg	500 €
		600 kg	1.800 €

Prezzo o costo unitario medio $(2+3+5)/3=10/3=3,33333$ (vedi esempio 2)

Per costo (o prezzo) medio degli agrumi in base alla quantità di agrumi acquistata si intende *il prezzo unitario x (uguale per tutti gli agrumi) che permette di acquistare la stessa quantità di agrumi spendendo la stessa cifra.*

Nel nostro caso avendo acquistato 600 chili e speso 1880 euro, il costo medio x si ottiene ponendo: $600 x = 1800$ e si ottiene $x = 1800/ 600 = 3$ quale costo medio

Allora il **costo medio** è il rapporto tra la spesa complessiva e la quantità complessiva di agrumi acquistata. Si può tuttavia osservare che:

“il costo medio è una media aritmetica ponderata dei prezzi unitari dei singoli tipi di agrumi con pesi le quantità acquistate”

Infatti

$$x = \frac{1800}{600} = \frac{200 \times 2 + 300 \times 3 + 100 \times 5}{200 + 300 + 100}$$

UN PROBLEMA DI DECISIONE: Il prezzo unitario degli agrumi è differente nei paesi A e B

Agrumi	$x = \text{prezzo al kilo nel paese A}$	$y = \text{prezzo al kilo nel paese B}$
Arance	2€	2€
mandarini	3€	4€
limoni	5€	4€

Prezzo unitario medio nel paese A $(2+3+5)/3=10/3=3,33333$

Prezzo unitario medio nel paese B $(2+4+4)/3=10/3=3,33333$

Sapendo che un rivenditore di agrumi che abita al confine tra i due paesi deve acquistare 200 kg di arance, 300 kg di mandarini e 100 kg di limoni, ci chiediamo: dove è più conveniente per il rivenditore acquistare gli agrumi?

Esempio 3.3 - (costo medio annuale per unità di prodotto del gasolio sulla base della quantità acquistate)

Un signore acquista per tre anni gasolio per il riscaldamento della sua casa:

c_1, c_2, c_3 sono i costi unitari del gasolio nel primo secondo e terzo anno

q_1, q_2, q_3 le quantità acquistate rispettivamente nei tre anni.

Allora nel primo anno la spesa sostenuta è $s_1 = q_1 \cdot c_1$, nel secondo anno la spesa sostenuta è

$s_2 = q_2 \cdot c_2$ e nel terzo è $s_3 = q_3 \cdot c_3$ e nei tre anni la quantità acquistata è

$Q = q_1 + q_2 + q_3$ è e la spesa è $S = s_1 + s_2 + s_3 = q_1 \cdot c_1 + q_2 \cdot c_2 + q_3 \cdot c_3$.

	Costi unitari	quantità	somma spesa
1° anno	c_1	$q_1 = s_1 / c_1$	$s_1 = q_1 c_1$
2° anno	c_2	$q_2 = s_2 / c_2$	$s_2 = q_2 c_2$
2° anno	c_3	$q_3 = s_3 / c_3$	$s_3 = q_3 c_3$
		$Q = q_1 + q_2 + q_3$	$S = s_1 + s_2 + s_n$

Il **costo medio annuale** C_m del gasolio sulla base delle quantità acquistate è il costo unitario uguale per ogni anno che permette di acquistare nei tre anni la stessa quantità di gasolio con la stessa somma; esso si ottiene ponendo:

$$S = C_m Q \quad \text{da cui} \quad C_m = \frac{S}{Q} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{q_1 + q_2 + q_3}$$

Applicando le eguaglianze nella terza colonna della tabella otteniamo:

$$C_m = \frac{S}{Q} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3}{q_1 + q_2 + q_3} \quad (B_1)$$

e quindi

il costo medio annuale è la media aritmetica pesata dei costi con pesi le quantità acquistate

Esempio 3.4 - (tempo medio per lo svolgimento di una pratica in base alla quantità di pratiche svolte)

Illustriamo nella seguente tabella il numero di ore necessarie per esplicitare una pratica a seconda della tipologia (A, B, C). il numero di pratiche da espletare ogni giorno (per ogni tipologia) e il tempo speso

pratica	Ore necessarie	Num. pratiche	Tempo speso
A	3	10	30
B	8	20	160
C	14	30	420
	25	60	610

Il tempo medio per lo svolgimento di una pratica in base alla quantità di pratiche svolte è il tempo uguale per ogni tipo di pratica che permette

Esso è dato dal rapporto “totale tempo speso/ totale pratiche “ = 610/60

Risultando:

$$x = \frac{610}{60} = \frac{10 \times 3 + 20 \times 8 + 30 \times 4}{10 + 20 + 30} = 10,1\bar{6}$$

il tempo medio è media ponderata dei tempi spesi per ogni singola pratica con pesi i numeri delle pratiche

3. Calcolo del valore medio di una variabile statistica discreta attraverso la distribuzione di frequenze

In genere per **valor medio** di una variabile discreta oggetto di indagine statistica si intende la media aritmetica dei valori assunti dalla variabile: esso può essere calcolato a partire da una tabella di frequenze come di seguito illustrato.

A. Calcolo del valor medio di una variabile statistica discreta

Per illustrare la regola che permette di determinare la media aritmetica dei valori di una variabile discreta quando è assegnata una distribuzione di frequenze, partiamo dall'esempio 1 in cui sono riportati i voti che una studente ha riportato in 10 esami (unità statistiche)

Esempio 4

esame	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Voto	24	26	28	26	26	27	28	24	26	25

La tabella è una distribuzione unitaria semplice (tabella grezza - nella forma “unità statistica = esame/ valore= voto”) che possiamo riscrivere anche così

<i>esami</i>	$x_i = \text{voto}$
1°	24
2°	26
3°	28
4°	26
5°	26
6°	27
7°	28
8°	24
9°	26
10°	25
10	$\sum_i x_i = 260$

$$\frac{24 + 26 + 28 + 26 + 26 + 27 + 28 + 24 + 26 + 25}{10} = \frac{260}{10} = 26$$

media art. semp. dei voti

Riscriviamo il rapporto che dà la media aritmetica semplice dei voti raggruppando i voti uguali e sostituendo ai gruppi di voti uguali il prodotto “voto × numero di esami in cui è stato ottenuto”.

$$\frac{24 + 26 + 28 + 26 + 26 + 27 + 28 + 24 + 26 + 25}{10} = \frac{260}{10} = 26 \quad \text{media art. semp. dei voti}$$

$$\frac{2 \cdot 24 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 26 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 28}{10} = \frac{260}{10} = 26$$

$$\frac{2 \cdot 24 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 26 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 28}{2 + 1 + 4 + 1 + 2} = \frac{260}{10} = 26 \quad \text{media art. pond. dei voti distinti}$$

Quindi: *la media aritmetica semplice dei voti coincide con una media ponderata dei voti distinti. Chi sono i pesi?*

Per rispondere alla domanda passiamo dalla tabella “ unità/ valore” alla tabella elaborata “*valori= voti / frequenze*” in cui ogni tipo di voto vien scritto una sola volta e accanto viene indicato il numero di volte (frequenza) che è stato rilevato

tabella elaborata “valori= voti / frequenze”

x_i voti <i>distinti</i>	f_i freq, <i>assol.</i> di x_i	$f_i x_i$
24	2	48
25	1	25
26	4	104
27	1	27
28	2	56
	$\sum_i f_i = 10$	$\sum_i f_i x_i = 260$

Ci accorgiamo allora che **i pesi non sono altro che le frequenze assolute assegnate ai voti distinti**. La media è espressa allora dalla seguente formula

$$\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{\sum_i f_i} = \frac{260}{10} = 26$$

\bar{x} = *media aritmetica ponderata dei voti distinti con pesi le frequenze assolute*

Per il calcolo della **media possiamo usare come pesi anche le frequenze relative**

$$f'_i = \frac{f_i}{\sum_i f_i} = \frac{f_i}{n} = \frac{f_i}{10}$$

che sono pesi a somma 1

Infatti, continuando ad operare sul rapporto che dà la media dei voti:

$$\frac{24 + 26 + 28 + 26 + 26 + 27 + 28 + 24 + 26 + 25}{10} = \frac{260}{10} = 26$$

media aritmetica **semplice** dei valori

$$\frac{2 \cdot 24 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 26 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 28}{2 + 1 + 4 + 1 + 2} = \frac{260}{10} = 26$$

media aritmetica **pesata** dei valori distinti con **pesi** le frequenze **assolute**

$$\frac{2}{10} 24 + \frac{1}{10} 25 + \frac{4}{10} 26 + \frac{1}{10} 27 + \frac{2}{10} 28 = 26$$

combinazione **convessa** dei valori distinti con **pesi** le frequenze **relative**

Schema di calcolo dalla tabella valori/ frequenza

x_i	$f_i = fr.ass$	$f'_i = fr.rel$	$f_i x_i$	$f'_i x_i$
24	2	2/10	48	$(2/10)24 = 4,8$
25	1	1/10	25	$(1/10)25 = 2,5$
26	4	4/10	104	$(4/10)26 = 10,4$
27	1	1/10	27	$(1/10)27 = 2,7$
28	2	2/10	56	$(2/10)28 = 5,6$
	$\sum_i f_i = 10$	$\sum_i f'_i = 1$	$\sum_i f_i x_i = 260$ $\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{\sum_i f_i} = 26$	$\bar{x} = \sum_i f'_i x_i = 26$

$$26 = \frac{260}{10} = \frac{\sum_i f_i x_i}{\sum_i f_i} = \sum_i f'_i x_i$$

Regola generale: il valore medio \bar{x} di un carattere quantitativo discreto con un numero finito di valori è la media pesata dei valori distinti con pesi le frequenze assolute o le frequenze relative

x_i	$f_i = fr.ass$	$f'_i = fr.rel$	$f_i x_i$	$f'_i x_i$
x_1	$f_1 = f(x_1)$	$f'_1 = f_1 / N$	$f_1 x_1$	$f'_1 x_1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	$f_i = f(x_i)$	$f'_i = f_i / N$	$f_i x_i$	$f'_i x_i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	$f_n = f(x_n)$	$f'_n = f_n / N$	$f_n x_n$	$f'_n x_i$
	$\sum_i f_i = N$ freq. totale	$\sum_i f'_i = 1$	$\sum_i f_i x_i$ \downarrow $\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{\sum_i f_i} = \frac{\sum_i f_i x_i}{N}$	$\bar{x} = \sum_i f'_i x_i$

Esempio 5

Indagine su un campione di 400 famiglie relativamente al numero di stanze per abitazione

Numero stanze	$n_i = \text{fr. ass.}$	$n'_i = n_i/400 = \text{fr. rel.}$
$x_1 = 2$	50	$50/400 = 1/8$
$x_2 = 3$	130	$130/400 = 13/40$
$x_3 = 4$	100	$100/400 = 1/4$
$x_4 = 5$	80	$80/400 = 1/5$
$x_5 = 6$	40	$40/400 = 1/10$
	400	1

Quale è il numero medio di stanze ?

$$\bar{x} = \frac{50 \cdot 2 + 130 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 40 \cdot 6}{400} = \frac{\sum_i n_i x_i}{\sum_i n_i}$$

$$\bar{x} = \frac{50}{400} \cdot 2 + \frac{130}{400} \cdot 3 + \frac{100}{400} \cdot 4 + \frac{80}{400} \cdot 5 + \frac{40}{400} \cdot 6 = \sum_i n'_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{153}{40} = 3,825$$

B. Stima del valor medio di una variabile statistica continua o discreta con valori raggruppati in classi

Il calcolo esatto della media dei valori di un carattere nel caso del raggruppamento di tali valori in classi è impossibile da ottenere, perché non sono noti i valori effettivamente presi all'interno della classe e le rispettive frequenze.

Si conviene in tal caso di determinare una **stima** approssimata del valor medio, che è ottenuta secondo la seguente regola

Regola. La stima del valor medio si ottiene operando la **media aritmetica ponderata dei valori centrali** delle classi **con pesi le frequenze assolute o relative associate alle classi**

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_i f_i c_i}{\sum_i f_i} = \sum_i f'_i c_i \quad c_i \text{ valore centrale della classe } i\text{-esima}$$

f_i frequenza assoluta associata alla classe i -esima

f'_i frequenza relativa associata alla classe i -esima

Esempio 6

Classe di altezze	Freq. assoluta f_i	Valore centrale della classe c_i	Prodotto $f_i \cdot c_i$
151-155	4	$(151+155)/2=153$	$4 \cdot 153= 612$
156-160	9	$(156+160)/2=158$	$9 \cdot 158= 1422$
161-165	15	$(161+165)/2=163$	$15 \cdot 163= 2445$
166-170	7	$(166+170)/2=168$	$7 \cdot 168= 1176$
171-175	8	$(171+175):2=173$	$8 \cdot 173= 1384$
176-180	3	$(176+180)/2=178$	$3 \cdot 178= 534$
181-185	3	$(181+185)/2=183$	$3 \cdot 183= 549$
186-190	1	$(186+190)/2=188$	$1 \cdot 188= 188$
totale	50		8310 $\bar{x}=8310/50=166,2$

La **stima dell'altezza media** è data da

$$\begin{aligned} \bar{x} &\approx (4 \cdot 153 + 9 \cdot 158 + 15 \cdot 163 + 7 \cdot 168 + 8 \cdot 173 + 3 \cdot 178 + 3 \cdot 183 + 1 \cdot 188) / 50 = \\ &= (612 + 1422 + 2445 + 1176 + 1384 + 534 + 549 + 188) / 50 = \\ &= 8310 / 50 = 166,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nota: le classi sono indicate attraverso limiti formali, ma non è necessario passare ai limiti reali, perché, operando il passaggio ai limiti reali (150.5-155.5, 155.5-160.5, ...) i valori centrali non cambiano.

Esempio 7

La seguente tabella indica la distribuzione della superficie di 862 supermercati in Italia nel 1992 per classi di superficie.

<i>Superficie in mq</i>	<i>N. Supermercati</i>	<i>Valore centrale classe</i>
400 -- 1.000	371	700
1.000 -- 2.000	402	1500
2.000 -- 3.000	64	2500
3.000 -- 5.000	25	4000
862		

Ciò significa che vi sono 371 supermercati che hanno una superficie in mq compresa tra 400 mq e 1.000 (estremo sinistro della classe incluso), 402 tra 1.000 e 2.000 e così via. Per avere una stima della superficie media assumiamo come valore rappresentativo della classe il *valore centrale* della classe:

$$M = \frac{700 \times 371 + 1.500 \times 402 + 2.500 \times 64 + 4.000 \times 25}{862} = 1.302,4 \text{ mq}$$

Nota Se la prima o l'ultima classe o entrambe sono *aperte* e occorre attribuire in maniera soggettiva i limiti relativi a tali classi.

Esempio 8. E' data la seguente distribuzione di 180 famiglie per numero di componenti:

<i>classe valori</i>	0-12	2-14	4-16	6-18	<i>più di 8</i>
<i>frequenza</i>	5	70	90	9	6

Per avere una stima del numero medio di componenti, alla classe "*più di 8*" si può, ad esempio, sostituire, in maniera soggettiva e in base all'eventuale conoscenza del fenomeno, la classe 8-12:

<i>classe valori</i>	0-12	2-14	4-16	6-18	8-12
<i>frequenza</i>	5	70	90	9	6

Si stima quindi il numero medio di componenti operando la media aritmetica ponderata:

4. Proprietà della media aritmetica

La media aritmetica verifica le condizioni 1., 2., 3., 4. richieste per un valore medio e le seguenti altre proprietà

- **Proprietà della media aritmetica rispetto agli scarti (proprietà caratterizzanti)**

S₁. La media aritmetica di n valori a_1, a_2, \dots, a_n è l'unico valore che rende nulla la somma degli scarti

Dim. Sia y un numero reale. Gli scarti di a_1, a_2, \dots, a_n sono le differenze $a_1 - y, a_2 - y, \dots, a_n - y$. **Risulta:**

$$(a_1 - y) + (a_2 - y) + \dots + (a_n - y) = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n - ny = 0 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n = y$$

e ciò prova l'asserzione.

S₂. La media aritmetica di n valori a_1, a_2, \dots, a_n è l'unico valore che rende minima la somma dei quadrati degli scarti (cioè la somma dei quadrati degli scarti dei valori dalla media aritmetica è minore della somma dei quadrati degli scarti da qualsiasi altro numero)

Dim. Consideriamo la funzione che ad ogni numero reale y associa la somma dei quadrati degli scarti di a_1, a_2, \dots, a_n da y :

$$d : y \in \mathbb{R} \rightarrow d(y) = (a_1 - y)^2 + (a_2 - y)^2 + \dots + (a_n - y)^2,$$

e indichiamo con a la media aritmetica dei a_1, a_2, \dots, a_n .

Determiniamo la derivata di d e studiamo il segno della stessa.

$$d'(y) = -2[(a_1 - y) + (a_2 - y) + \dots + (a_n - y)] = -2[a_1 + a_2 + \dots + a_n - ny]$$

$$d'(y) < 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n - ny > 0 \Leftrightarrow y < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \Leftrightarrow y < a,$$

$$d'(y) = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n - ny = 0 \Leftrightarrow y = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \Leftrightarrow y = a,$$

$$d'(y) > 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n - ny < 0 \Leftrightarrow y > (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \Leftrightarrow y > a,$$

Quindi d è decrescente a sinistra di a , è strettamente crescente a destra di a e ciò prova che a è un punto di minimo per d ; $d(a)$ è allora il valore minimo di d .

- **Proprietà di omogeneità**

Se a ognuno dei valori a_1, a_2, \dots, a_n si applica la trasformazione lineare omogenea

$$f: x \rightarrow \alpha x$$

la media aritmetica dei nuovi valori si ottiene dalla media $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ attraverso la stessa trasformazione

Dim. Applichiamo la trasformazione f ad ogni a_i :

$$\boxed{a_i \rightarrow b_i = \alpha a_i}$$

La media aritmetica \bar{b} dei nuovi valori $b_1 = \alpha a_1, b_2 = \alpha a_2, \dots, b_n = \alpha a_n$ è

$$\bar{b} = \frac{\alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots + \alpha a_n}{n} = \alpha \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \alpha \bar{a}$$

quindi la nuova media si ottiene \bar{a} attraverso la trasformazione $\bar{a} \rightarrow \alpha \bar{a}$

Esempi 9 di applicazione dell'omogeneità

Esempio 9.1 Applichiamo ai valori

$$a_1=6, \quad a_2=10, \quad a_3=2, \quad a_4=12,$$

la cui media è $\bar{a} = \frac{6+10+2+12}{4} = 7,5$, la trasformazione $f: x \rightarrow 4x$, moltiplichiamo cioè per 4 tutti i valori; otteniamo così i nuovi valori:

$$y_1=24, \quad y_2=40, \quad y_3=8, \quad y_4=48.$$

Per la proprietà di omogeneità la media dei valori y_1, y_2, y_3, y_4 si ottiene dalla media 7,5 dei vecchi valori moltiplicando questa per 4 ed è quindi $\bar{y} = 4 \cdot 7,5 = 30$.

Infatti:

$$\frac{24 + 40 + 8 + 48}{4} = \frac{4(6 + 10 + 2 + 12)}{4} = 4 \cdot 7,5 = 30$$

Esempio 9.2 Applicazione dell'omogeneità al cambio di scala conseguente a un cambio di unità di misura

Un voto in sessantesimi a quale voto in centesimi corrisponde?

Sia a il voto in sessantesimi; il corrispondente voto in centesimi A è ottenuto dalla uguaglianza di rapporti $\frac{A}{100} = \frac{a}{60}$

$$\text{Poiché: } \frac{A}{100} = \frac{a}{60} \Leftrightarrow A = \frac{100}{60}a \Leftrightarrow A = \frac{5}{3}a$$

Pertanto si passa da un voto in sessantesimi a ad un voto in centesimi A operando la trasformazione $x \rightarrow \frac{5}{3}x$

$$a = 6(\text{sessantesimi}) \rightarrow A = \frac{5}{3}6 = 10(\text{centesimi})$$

L'omogeneità assicura che passando dai voti in sessantesimi a quelli in centesimi (moltiplicando i primi per $\alpha = \frac{5}{3}$), anche la media dei voti è moltiplicata per $\alpha = \frac{5}{3}$, rispettando così il cambio di scala conseguente al cambio di unità di misura.

- **Proprietà di traslatività**

Se a ognuno dei valori a_1, a_2, \dots, a_n si applica la traslazione

$$g: x \rightarrow x+k$$

la media aritmetica $\bar{a} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ subisce la stessa trasformazione

Dim. Applichiamo la trasformazione g a ogni a_i : $\boxed{a_i \rightarrow c_i = a_i+k}$

allora la media aritmetica $\bar{c} = \frac{c_1+c_2+\dots+c_n}{n}$ dei nuovi valori $\boxed{c_i}$ è data da

$$\bar{c} = \frac{a_1+k+a_2+k+\dots+a_n+k}{n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n+nk}{n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} + k = \bar{a} + k ;$$

perciò la media \bar{a} subisce la stessa trasformazione $\bar{a} \rightarrow \bar{c} = \bar{a} + k$

Esempio 10. Assegnati i valori

$$a_1=24 \quad a_2=34 \quad a_3=44 \quad a_4=48 \quad a_5=50$$

la cui media è:

$$\bar{a} = 200/5 = 40$$

a

applichiamo ad ogni valore a_i la traslazione

$$\boxed{x \rightarrow c = x + 300.}$$

Otteniamo i nuovi valori

$$c_1 = a_1 + 300 = 324 \quad c_2 = a_2 + 300 = 334 \quad c_3 = a_3 + 300 = 344$$

$$c_4 = a_4 + 300 = 348 \quad c_5 = a_5 + 300 = 350$$

la cui media è

$$\bar{C} = (324 + 334 + 344 + 348 + 350)/5 = 340 = 40 + 300 = \bar{a} + 300.$$

- **Proprietà di affinità**

Combinando le precedenti proprietà di omogeneità e traslatività si ottiene la seguente altra proprietà della media aritmetica

-Se ad ognuno dei valori a_1, a_2, \dots, a_n si applica la trasformazione affine

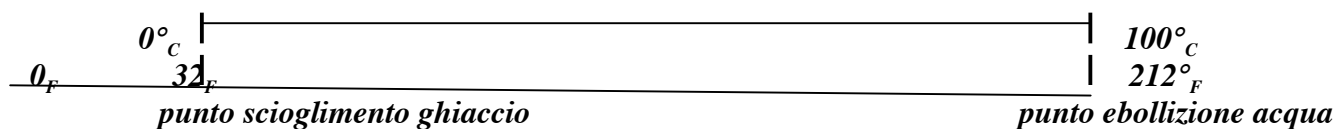
$$h: x \rightarrow \alpha x + k$$

la media aritmetica $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ subisce la stessa trasformazione

Se ad ogni a_i applichiamo la suindicata trasformazione $\boxed{a_i \rightarrow y_i = \alpha a_i + k}$, la media dei nuovi dati è: $\bar{y} = \alpha \bar{a} + k$

Esempio 11 sull'applicazione della proprietà al cambio di scala

Consideriamo le due scale per la misura della temperatura: la scala *Celsius* e la scala *Fahrenheit*



Le formule di passaggio dalla scala *Celsius* alla scala *Fahrenheit* è

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \quad \text{cioè } F = (1,8)C + 32$$

Se le temperature di due corpi A e B sono rispettivamente di $5^{\circ}C$ e $10^{\circ}C$ nella scala Celsius, nella scala Fahrenheit sono 41 e 50, cosa accade per le medie aritmetiche?

	C°	F°
A	5°	41=(1,8)5+32
B	10°	50=(1,8)10+32
Media aritmetica	7,5	45,5==(1,8)7,5+32

- **Proprietà associativa**

Siano dati n valori numerici suddivisi in k gruppi di numerosità n_1, n_2, \dots, n_k rispettivamente:

$$a_{11}, \dots, a_{1n_1}, a_{21}, \dots, a_{2n_2}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{kn_k} (*)$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

e siano:

m_1 la media aritmetica degli n_1 valori a_{11}, \dots, a_{1n_1}

m_2 la media aritmetica degli n_2 valori a_{21}, \dots, a_{2n_2}

.....

m_k la media aritmetica degli n_k valori a_{k1}, \dots, a_{kn_k} .

Allora la media aritmetica m_s degli n valori numerici è la media aritmetica ponderata delle medie dei valori dei k gruppi con pesi le numerosità dei gruppi

$$m_s = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \dots + n_k m_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Dim. per definizione di media aritmetica risulta

$$a_{11} + \dots + a_{1n_1} = n_1 m_1$$

$$a_{21} + \dots + a_{2n_2} = n_2 m_2,$$

$$a_{k1} + \dots + a_{kn_k} = n_k m_k$$

e applicando tali uguaglianze nel calcolo di m_s si ottiene

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{a_{11} + \dots + a_{1n_1} + a_{21} + \dots + a_{2n_2} + \dots + a_{k1} + \dots + a_{kn_k}}{n} \\ &= \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \dots + n_k m_k}{n} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \dots + n_k m_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \end{aligned}$$

La proprietà associativa della media aritmetica afferma:

-Ripartendo un insieme di valori in k sottoinsiemi disgiunti di numerosità n_1, n_2, \dots, n_k , la media dei valori coincide con la media ponderata delle medie dei valori nei sottoinsiemi con pesi pari alle numerosità n_1, n_2, \dots, n_k .

Ne consegue:

-La media aritmetica di un insieme di numeri non cambia se un gruppo di questi viene sostituito con la corrispondente media aritmetica moltiplicata per la numerosità del gruppo.

La proprietà associativa è utile nell'inferenza statistica

Siano S una popolazione ed X, Y, Z campioni costituenti una partizione di S.

Supponiamo che i valori di un carattere quantitativo rilevati sui tre campioni sono :

x_1, \dots, x_{n_1} siano i valori rilevati sul campione X e la loro media arit. sia m_X

y_1, \dots, y_{n_2} siano i valori rilevati sul campione Y e la loro media arit. sia m_Y

z_1, \dots, z_{n_3} siano i valori rilevati sul campione Z e la loro media arit. sia m_Z

Allora, per la proprietà associativa la media aritmetica dei valori relativi a tutta la popolazione S è la media aritmetica ponderata delle medie sui campioni X, Y, Z con pesi le numerosità dei campioni

$$m_S = \frac{n_1 m_X + n_2 m_Y + n_3 m_Z}{n_1 + n_2 + n_3}$$

Esempi 12. sull'applicazione della media aritmetica semplice o ponderata alla determinazione della velocità media date le velocità in singoli tratti

Nel moto uniforme (cioè con velocità costante) spazio percorso , tempo di percorrenza e velocità sono legati dalla seguente relazione

$$S = VT \rightarrow V = S/T$$

La **velocità media** in un moto non uniforme (con S spazio percorso e T tempo di percorrenza) è la velocità costante V_m che dovrebbe avere l'oggetto in moto per percorrere lo stesso spazio S nello stesso tempo T:

$$S = V_m T \quad V_m = \text{velocità media} = S/T$$

12.1 Sia lo spazio S totale diviso in n spazi s_1, s_2, \dots, s_n
 percorsi con velocità costanti v_1, v_2, \dots, v_n
 nei tempi t_1, t_2, \dots, t_n

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

vel.	spazio	tempo
v_1	$s_1 = t_1 v_1$	t_1
v_2	$s_2 = t_2 v_2$	t_2
...
v_n	$s_n = t_n v_n$	t_n
$S = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n$		$T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$

Qual è il legame che intercorre tra la velocità media V_m e le velocità costanti v_1, v_2, \dots, v_n con cui sono percorsi i singoli tratti?

Per rispondere alla domanda partiamo dall'esprimere la velocità media attraverso il rapporto Spazio /Tempo che la definisce

$$V_m = \frac{S}{T} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} \quad (A)$$

Utilizzando le uguaglianze : $s_1 = t_1 v_1$ $s_2 = t_2 v_2$... $s_n = t_n v_n$

otteniamo da (A)

$$V_m = \frac{S}{T} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} \quad (A_1)$$

e quindi possiamo affermare che:

V_m è la **media aritmetica pesata delle velocità nei singoli tratti con pesi i tempi di percorrenza.**

12.2 Supponiamo ora che: *i singoli tratti sono tutti percorsi nello stesso tempo t*

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$$

vel.	spazio	tempo
v_1	$s_1 = t v_1$	t
v_2	$s_2 = t v_2$	t
...
v_n	$s_n = t v_n$	t
	$S = t v_1 + \dots + t v_n$	$T = nt$

allora dalla formula (A₁)

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_n t_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} = \frac{(v_1 + v_2 + \dots + v_n)t}{nt} = \\ &= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} \end{aligned}$$

Quindi:

V_m è la **media aritmetica semplice delle velocità nei singoli tratti**

Nota: se i tempi di percorrenza degli n tratti sono tutti uguali, la velocità media non dipende dal valore comune del tempo di percorrenza t e quindi dal tempo totale, né dalla lunghezza del spazio percorso, ma solo dalle velocità nei singoli tratti.

5 . La media geometrica

5.1 La media geometrica semplice

La media geometrica di n numeri positivi

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$$

è il valore positivo a che sostituito ad ognuno di essi non ne cambia il prodotto:

$a > 0$

$$a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \Leftrightarrow a^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \Leftrightarrow$$

n volte

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

La media geometrica è allora

$$a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \prod_{i=1}^n (a_i)^{\frac{1}{n}} \quad \text{media geometrica}$$

e il funzionale di sintesi è l'operatore di media geometrica

$$M_g : (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow a = M_g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Una diversa definizione di media geometrica

Applicando le proprietà del logaritmo possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\log(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{\log(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)}{n}} = \\ &= e^{\frac{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}{n}} \end{aligned}$$

Quindi la media geometrica è definita anche dalla seguente uguaglianza:

$$a = e^{\frac{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}{n}}$$

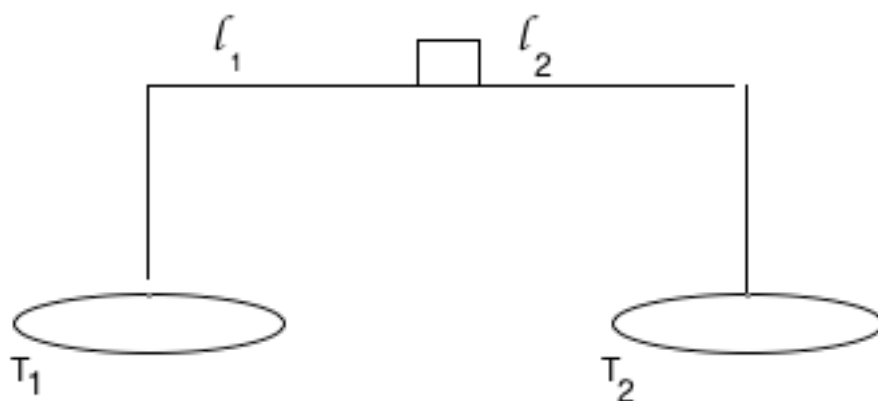
che fornisce un nuovo significato alla media geometrica: *infatti, applicando il logaritmo ai due membri della suindicata uguaglianza si ottiene*

$$\begin{aligned} \log a &= \frac{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}{n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log a + \log a + \dots + \log a &= \log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n \end{aligned}$$

Pertanto la media geometrica a di n numeri positivi a_1, a_2, \dots, a_n , è quel numero positivo che, sostituito ad ognuno degli n valori, non cambia la somma dei loro logaritmi.

Esempi 13 di applicazione della media geometrica

13. 1. Valutazione del peso di una pietra preziosa



Per ottenere il peso ignoto x della pietra si procede a due misurazioni: si pone per la prima prova la pietra sul piatto T_1 sospeso al braccio di lunghezza l_1 e si individua il peso p_1 che posto sul secondo piatto stabilisce l'equilibrio; si procede poi alla seconda prova ponendo la pietra sul piatto T_2 sospeso al braccio di lunghezza l_2 e si individua il peso p_2 che posto sul piatto T_1 stabilisce l'equilibrio.

<i>1^a prova</i>	<i>p_1</i>
<i>2^a prova</i>	<i>p_2</i>

L'equilibrio si stabilisce quando il prodotto del peso posto su un piatto per la lunghezza del braccio a cui è sospeso uguaglia il prodotto del peso posto sull'altro piatto per la lunghezza del braccio corrispondente

$$l_1 x = l_2 p_1$$

$$l_2 x = l_1 p_2$$

$$l_1 l_2 x^2 = l_1 l_2 p_1 p_2$$

$$x = \sqrt{p_1 p_2}$$

Il peso della pietra è allora la media geometrica dei pesi risultanti dalle due pesate

13.2 .Valutazione del tasso annuale di rendimento medio

L = somma da investire

anno	Tasso di rendimento	Capitale alla fine dell'anno
1° anno	r_1	$L_1 = r_1 L$
2° anno	r_2	$L_2 = r_2 L_1 = r_1 r_2 L$
3° anno	r_3	$L_3 = r_3 L_2 = r_1 r_2 r_3 L$

serie di quantità

Qual è il tasso r^* di rendimento costante negli anni che alla fine del terzo anno dà lo stesso capitale?

Poiché

$$L_3 = r_3 L_2 = r_1 r_2 r_3 L$$

e si vuole scegliere r^* in modo che

$$L_3 = r^* r^* r^* L$$

occorre porre $r^* r^* r^* = r_1 r_2 r_3$, cioè

$$(r^*)^3 = r_1 r_2 r_3$$

$$r^* = \sqrt[3]{r_1 r_2 r_3}$$

r^* è detto tasso annuale di rendimento medio

5.2. La media geometrica ponderata

La **media geometrica ponderata** o **pesata** di n numeri positivi a_1, a_2, \dots, a_n è il valore che si ottiene elevando ogni numero a_j per un **peso** p_i (≥ 0 e per almeno un i $p_i > 0$), moltiplicando le potenze $a_i^{p_i}$ ed elevando il tutto al reciproco della somma dei pesi

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = k$$

$$a = \left(a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n} \right)^{\frac{1}{\sum_i p_i}} = \left(a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n} \right)^{\frac{1}{k}} = \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{p_i}{k}}$$

media geometrica ponderata

o anche:

$$a = \sqrt[\sum_i p_i]{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n}} = k \sqrt[k]{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n}}$$

Se $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

allora
$$a = a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n} = \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}$$

5.3 . Proprietà della media geometrica

La media geometrica verifica le condizioni 1., 2., 3., 4. richieste per un valore medio e le seguenti altre proprietà

- **Proprietà di omogeneità positiva**

Se a ognuno dei valori a_1, a_2, \dots, a_n si applica la trasformazione lineare omogenea positiva

$$f: x \rightarrow \alpha x \quad \alpha > 0$$

la media geometrica $a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ subisce la stessa trasformazione

Dim. Applichiamo la trasformazione f ad ogni a_i : $a_i \rightarrow \alpha a_i$

Allora la media geometrica dei nuovi valori è:

$$\sqrt[n]{\alpha a_1 \cdot \alpha a_2 \cdot \dots \cdot \alpha a_n} = \sqrt[n]{\alpha^n a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \alpha \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \alpha a$$

La media a ha allora subito la trasformazione $a \rightarrow \alpha a$

- **Proprietà di reciprocità**

Se a ognuno dei valori a_1, a_2, \dots, a_n si applica la trasformazione

$$t: x \rightarrow 1/x$$

la media geometrica $a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ subisce la stessa trasformazione.

Dim. Applichiamo la trasformazione t ad ogni a_i : $a_i \rightarrow 1/a_i$

La media geometrica dei nuovi valori è

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} = \frac{1}{a}$$

quindi la media a ha subito la trasformazione $a \rightarrow 1/a$.

- **Proprietà relativa ai rapporti**

La media geometrica dei rapporti (y_i/x_i) è il rapporto tra la media geometrica dei valori y_i e quella dei valori x_i .

$$\sqrt[n]{\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_n}{x_n}} = \frac{\sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

- **-Proprietà relativa ai logaritmi**

Il logaritmo della media geometrica è la media aritmetica dei logaritmi

$$\begin{aligned} \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= \log (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = \frac{1}{n} \log (a_1 a_2 \dots a_n) = \\ &= \frac{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}{n} \end{aligned}$$

6. La media armonica

6.1 La media armonica semplice

La media armonica (semplice) di n numeri, nessuno dei quali nullo,

$$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$$

è il valore che sostituito ad ognuno di essi non cambia la somma dei valori reciproci

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} &\Leftrightarrow \frac{n}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow \\ \frac{a}{n} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} &\Leftrightarrow a = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^{-1} \end{aligned}$$

La media armonica di a_1, a_2, \dots, a_n è allora

$$a = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$$

media armonica (semplice)

La media armonica è quindi il reciproco della media aritmetica dei reciproci dei valori a_1, a_2, \dots, a_n .

6.2 La media armonica ponderata

La **media armonica ponderata** o **pesata** di n numeri *pesi* p_1, p_2, \dots, p_n ($p_i \geq 0$ e per almeno un $p_i > 0$) è il valore a di seguito espresso

$$a = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \dots + \frac{p_n}{a_n}} = \frac{k}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \dots + \frac{p_n}{a_n}}$$

essendo $p_1 + p_2 + \dots + p_n = k$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \dots + \frac{p_n}{a_n}}$$

Esempio 14 di applicazione della media armonica al calcolo della velocità media

La velocità media in un moto non uniforme è la velocità costante V_m che dovrebbe avere l'oggetto in moto per percorrere lo stesso spazio S nello stesso tempo T ; essa è espressa, come abbia visto, dalla formula

$$V_m = S/T$$

Nel caso che lo spazio percorso sia somma di n spazi s_1, s_2, \dots, s_n percorsi con velocità costanti v_1, v_2, \dots, v_n , nei tempi t_1, t_2, \dots, t_n

vel. cost	spazio	tempo
v_1	$s_1 = t_1 v_1$	t_1
v_2	$s_2 = t_2 v_2$	t_2
...
v_n	$s_n = t_n v_n$	t_n
$S = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n$		$T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$

Il legame che intercorre tra la velocità media V_m e le velocità costanti v_1, v_2, \dots, v_n con cui sono percorsi i singoli tratti è dato dalla media aritmetica pesata delle velocità nei singoli tratti con pesi i tempi di percorrenza (vedi esempi 9).

$$V_m = \frac{S}{T} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} \quad (A_1)$$

Utilizzando però le uguaglianze:

$$t_1 = s_1 / v_1 \quad t_2 = s_2 / v_2 \quad \dots \quad t_n = s_n / v_n$$

(A₁) si trasforma in

$$V_m = \frac{S}{T} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_n}{v_n}} \quad (A_2)$$

e quindi:

V_m è la media armonica pesata delle velocità nei singoli tratti con pesi le lunghezze dei tratti

Un caso particolare: i tratti percorsi sono di uguale lunghezza.

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = s \quad t_1 = s / v_1 \quad t_2 = s / v_2 \quad \dots \quad t_n = s / v_n$$

vel.	spazio	tempo
v_1	s	$t_1 = s / v_1$
v_2	s	$t_2 = s / v_2$
...
v_n	s	$t_n = s / v_n$
$S = ns$		$T = (s / v_1) + \dots + (s / v_n)$

allora dalla formula (A₂)

$$\begin{aligned}
 V_m &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_n}{v_n}} = \frac{ns}{s \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} \right)} = \\
 &= \frac{n}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} \right)}
 \end{aligned}$$

V_m è allora la *media armonica* delle velocità nei singoli tratti.

Nota: se gli n tratti percorsi a velocità costante sono tutti uguali la velocità media non dipende dalla lunghezza comune ai singoli tratti di percorrenza s né dai tempi di percorrenza, ma solo dalle velocità nei singoli tratti.

Esercizi sul calcolo della velocità

(vedere gli esempi concernenti il calcolo della velocità in cui è utilizzata una media aritmetica o una media armonica)

Esercizio 1. Un autotreno deve percorrere 15 Km. I primi 5 sono in città e vengono coperti ad una velocità di 1 Km/h. I restanti 10 Km sono in periferia e il mezzo transita con una velocità di 10 Km/h. Trova la velocità media costante necessaria affinché lo stesso tragitto venga percorso impiegando lo stesso tempo.

Esercizio 2. Per andare dalla città A alla città B si percorre un tratto di autostrada di 100km. Tizio si sposta con l'auto da A a B ad una velocità di 80 km./ora e al ritorno percorre il tratto di autostrada ad una velocità di 120 km./ora. Quale è la velocità media relativa al percorso A-B-A?

Esercizio 3. Il signor X compie ogni giorno un tragitto che prevede la partenza dalla città A, il passaggio per la città B e poi per la città C e quindi il ritorno alla Città A.

Sapendo che le distanze A_____B, B_____C e C_____A sono uguali e che il signor X percorre:

il tratto A_____B a 120 km/ora

il tratto B_____C a 80 km/ora

il tratto C_____A a 40 km/ora

dire quale è la velocità media tenuta dal signore X.

Esempio 15 di applicazione della media armonica al costo di un prodotto

Determinazione del costo medio annuale per unità di prodotto del gasolio sulla base della quantità q_1, q_2, q_3 , di gasolio acquistata in tre anni da X

$$S = C_m Q \quad \rightarrow \quad C_m = \frac{S}{Q} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{q_1 + q_2 + q_3} \quad (B)$$

	Costi unitari	quantità	spesa
1° anno	c_1	$q_1 = s_1 / c_1$	$s_1 = q_1 c_1$
2° anno	c_2	$q_2 = s_2 / c_2$	$s_2 = q_2 c_2$
2° anno	c_3	$q_3 = s_3 / c_3$	$s_3 = q_3 c_3$
		$Q = q_1 + q_2 + q_3$	$S = s_1 + s_2 + s_n$

Da (B)

$$C_m = \frac{S}{Q} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3}{q_1 + q_2 + q_3} \quad (B_1)$$

media aritmetica pesata dei costi con pesi le quantità acquistate

o ponendo $q_i = \frac{s_i}{c_i}$

$$C_m = \frac{S}{Q} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{\frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} + \frac{s_3}{c_3}} \quad (B_2)$$

media armonica pesata dei costi con pesi i costi

Due casi particolari

$$1^\circ \text{ caso: } q_1 = q_2 = q_3 = q \quad Q = 3q \quad q = Q/3$$

Utilizzando (B₁)

$$C_m = \frac{q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{q(c_1 + c_2 + c_3)}{3q} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3}$$

allora il costo medio è la *media aritmetica* dei costi unitari

$$2^\circ \text{ caso: } s_1 = s_2 = s_3 = s \quad S = 3s$$

Utilizzando (B₂)

$$C_m = \frac{3s}{\frac{s}{c_1} + \frac{s}{c_2} + \frac{s}{c_3}} = \frac{3s}{s \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right)} = \frac{3}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}}$$

allora il costo medio è la *media armonica* dei costi unitari

7. La media quadratica o media di ordine 2

7.1 La media quadratica semplice o media semplice di ordine 2

La media quadratica semplice dei numeri

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

è il valore a che sostituito ad ognuno di essi non cambia la somma dei quadrati

$$a > 0$$

$$a^2 + a^2 + \dots + a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \Leftrightarrow n a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \Leftrightarrow a = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

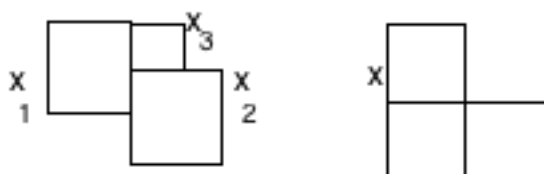
La media quadratica dei numeri a_1, a_2, \dots, a_n è allora

$$a = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$$

media quadratica (semplice)

Esempio 16 di applicazione della media quadratica semplice: Un problema di equivalenza di lotti

Un contadino deve cedere un appezzamento di terreno costituito da tre lotti quadrati di aree diverse per permettere il passaggio di una strada e deve avere in cambio in altro luogo un appezzamento di terreno costituito da 3 lotti uguali: quale lato deve avere ogni nuovo lotto perché il contadino abbia un appezzamento di area uguale a quella dell'appezzamento ceduto?



<i>lotti</i>	<i>lato</i>		<i>lotti</i>	<i>lato</i>
<i>1° lotto</i>	x_1		<i>1° lotto</i>	x
<i>2° lotto</i>	x_2		<i>2° lotto</i>	x
<i>3° lotto</i>	x_3		<i>3° lotto</i>	x

serie di quantità

$$x^2 + x^2 + x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

x è media quadratica dei lati dei precedenti lotti

7.2 La Media quadratica ponderata

Assegnati i pesi p_1, p_2, \dots, p_n con

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = k$$

la media quadratica ponderata è

$$a = \sqrt[2]{\frac{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \dots + p_k a_k^2}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}} = \sqrt[2]{\frac{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \dots + p_k a_k^2}{k}}$$

media quadratica ponderata

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \Rightarrow a = \sqrt[2]{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \dots + p_n a_n^2}$$

Problema: *Assegnati i valori*

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

esiste un valore a che sostituito ad ognuno di essi non ne cambi la somma dei cubi

Quale è questo numero ?

$$a = \dots$$

8. La media di ordine $p \neq 0$

Se p è un numero reale non nullo, si può definire la media di ordine $p \neq 0$ dei valori positivi a_1, a_2, \dots, a_n , che viene indicata con $M_p(a_1, a_2, \dots, a_n)$: essa è il valore a che sostituito ad ognuno degli n valori non cambia la somma delle loro potenze di ordine p .

$$a^p + a^p + \dots + a^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \Leftrightarrow n a^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

allora

$$a = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = M_p(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

media di ordine p

Casi particolari:

$$p = -1 \Rightarrow a = M_{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

media armonica

$$p = 1 \Rightarrow a = M_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

media aritmetica

$$p = 2 \Rightarrow a = M_2(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

media quadratica

Poiché:

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow M_p \rightarrow M_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

media geometrica

La media geometrica è detta anche media di ordine 0

Proprietà della media di ordine p

Ogni media di ordine p verifica le proprietà richieste ad un valore medio e in particolare la seguente

$$\min_i a_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_i a_i$$

Inoltre, considerata la famiglia delle medie di tutti gli ordini, si dimostra che la media di n valori assegnati che non siano tutti nulli o tutti uguali cresce strettamente al crescere dell'ordine

$$p < q \Rightarrow M_p < M_q, \quad (*)$$

e che

$$p \rightarrow -\infty \quad a = M_p \rightarrow \min_i a_i \quad p \rightarrow +\infty \quad a = M_p \rightarrow \max_i a_i$$

Si ha in particolare, in conseguenza di (*), che

$$\textit{media armonica} < \textit{media geometrica} < \textit{media aritmetica} < \textit{media quadratica}$$