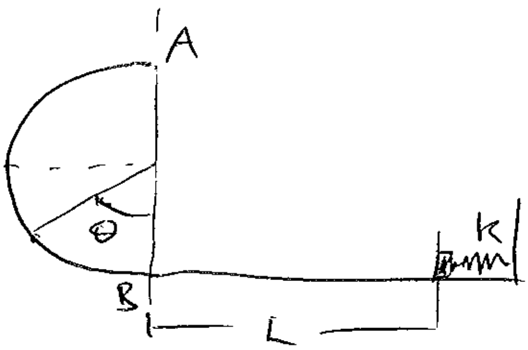
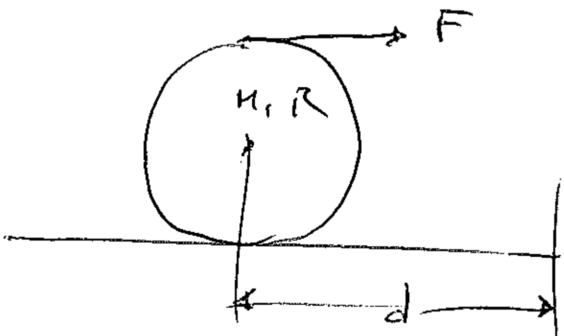
Prova scritta di Fisica Generale I del 4 febbraio 2015
Ingeneria chimica

1. Partendo da fermo un punto materiale di massa M=65Kg salta su una piattaforma da una altezza h=0.8m. Egli è in contatto con la piattaforma nell'intervallo di tempo $0<t<0.8$s esercitando su di esso una forza $F(t) = 9200t-11500t^2$ espressa in N. Determinare (i) la velocità di M quando lascia la piattaforma e (ii) la velocità di M dopo un tempo Δt=1 ms da quando lascia la piattaforma, sapendo che nella fase di risalita agisce una forza di attrito viscoso $\mathbf{f}=-\beta\mathbf{v}$ con β= 0.01Kg/s.

2. Un blocco di massa m=0.5Kg è posizionato su una molla (k=450N/m) compressa inizialmente di δ. Il blocco viene lasciato libero per cui si muove su un piano orizzontale scabro (μd=0.01) fino a raggiungere il punto B, distante L=5m dalla posizione iniziale della massa. B è il punto più basso di una guida circolare di raggio R=1m, su cui m si muove continuando a scivolare al suo interno verso l'alto rimanendo attaccato alla guida. In B la velocità del blocco vale 15 m/s ed è sottoposto lungo tutto il tratto circolare della guida ad una forza media di attrito di intensità 2N. Determinare (i) la compressione iniziale della molla, (ii) fare una previsione sulla velocità del blocco nella sommità della guida, e (iii) determinare il valore della reazione normale **N** nel punto P individuato dagli angoli $\theta_1=\pi/6$ e $\theta_2=3\pi/5$ misurati rispetto alla verticale.



3. Una bobina di filo d massa M=1.2Kg e di raggio R=10cm si srotola sotto l'azione di una forza costante F come mostrato in figura. Nella ipotesi che la bobina sia assimilabile ad un cilindro omogeneo, inizialmente fermo, che si muove di puro rotolamento, e che la massa della bobina resti costante durane il moto, determinare (i) l'accelerazione del centro di massa, (ii) la forza di attrito che si sviluppa nel punto di contatto tra bobina e suolo, (iii) la velocità del centro di massa dopo che esso è traslato di un tratto d=5R, e (iv) la velocità del punto più alto della bobina nello stesso istante misurata rispetto ad un sistema fisso inerziale.

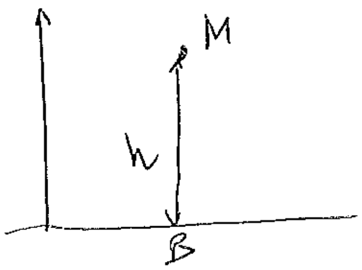


4. Un pendolo conico è costituito da una massa m=0.15Kg che ruota su una orbita circolare orizzontale. Durante il moto l'angolo θ tra il filo di lunghezza l=1m e la verticale rimane costante e pari a $\pi/6$. Dimostrare che il momento angolare **L** della massa m calcolato rispetto al centro dell'orbita resta constante nel tempo e (ii) determinarne il suo modulo L.

PROVA SCRITTA del 2.2.2015 #1

GUIDA ALLE SOLUZIONI:

ESR1) Quando M tocca la piattaforma la sua velocità è data da:



$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = Mgh \Rightarrow \underline{v}_B = -\sqrt{2gh}\,\hat{j}$$

Durante l'interazione con la piattaforma

$$\vec{I} = \int \vec{F}(t)dt = \int_0^{t^*}(9200t - 11500t^2)dt\,\hat{j} =$$

$$= \left[4600\,t^{*2} - \frac{11500}{3}t^{*3}\right]\hat{j}$$

Dal teorema dell'impulso, se $\underline{v}_f = v_f\hat{j}$ è la velocità di M dopo l'interazione con la piattaforma, si può scrivere:

$$\vec{I} = M(\underline{v}_f - \underline{v}_i) = M(v_f + v_B)\hat{j} = \dots$$

(ii) Quando M lascia la piattaforma, in presenza di una forza di attrito viscoso $\underline{f} = -\beta\underline{v}$ l'equ. del moto dà:

$$-mg\hat{j} - \beta\underline{v} = ma\hat{j} \Rightarrow -Mg - \beta v = M\frac{dv}{dt}$$

con $\underline{v}(t=0) = v_f\hat{j}$

Risolvendo si ottiene:

$$\underline{v}(\Delta t) = \left\{\frac{Mg}{\beta} - \left[\frac{Mg}{\beta} - v_f\right]e^{-\frac{\Delta t\,\beta}{M}}\right\}\hat{j} = \dots$$

ESR.2) La velocità in B è data da

$$\frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_B$$

Dal bilancio energetico tra B ed A (punto più alto della guida) e dall'applicazione della legge di Newton lungo l'asse radiale in A si ha

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + 2mgR + f\pi R \\ N + mg = m\frac{v_A^2}{R} \to N = \frac{mv_A^2}{R} - mg \geq 0 \end{cases}$$

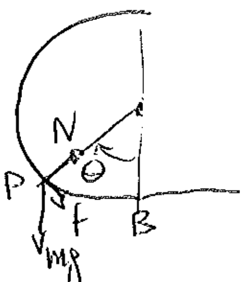
da cui $v_A^2 \geq gR$

Quindi

$$V_A^2 = V_B^2 - 4gR - \frac{2\pi R f}{m} \geq gR$$

$$\hookrightarrow \quad V_B^2 \geq 5gR + \frac{2\pi R f}{m} \qquad (1)$$

Se soddisfatta la (1), m arriva in A, altrimenti si staccherà dalla guida prima. Nell'ipotesi che arrivi in A, la reazione normale N ad un angolo Θ generico misurato come in figura vale:



$$(2) \quad \begin{cases} N - mg\cos\Theta = m\dfrac{V^2}{R} \\ \dfrac{1}{2}m v_B^2 = \dfrac{1}{2}mV^2 + gRm(1-\cos\Theta) + f(R\Theta) \end{cases}$$

Ricavando V^2 dalla (2.1), si ha

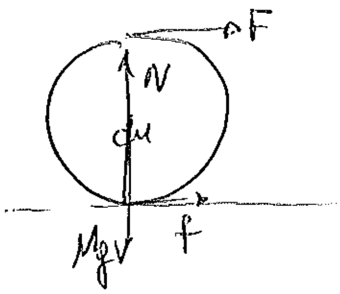
$$V^2 = V_B^2 - 2gR(1-\cos\Theta) - \frac{2f(R\Theta)}{m}$$

$$\hookrightarrow \quad N(\Theta) = \frac{m}{R}\left[V_B^2 - 2gR(1-\cos\Theta) - \frac{2fR\Theta}{m}\right] + mg\cos\Theta$$

calcolabile in $\quad \Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad$ e Θ_2

ES. 3)

L'applicazione delle equ. cardinali al cilindro solo (assumendo rotolamento senza strisciamento)



$$\begin{cases} F + f = MA_{cm} \\ -FR + fR = -I_{cm}\dfrac{A_{cm}}{R} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad 2F = \left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right)A_{cm} \implies \begin{cases} A_{cm} = \dfrac{4F}{3M} \\ f = \dfrac{1}{3}F \end{cases}$$

iii) Se il centro di massa si muove di un tratto $d = 5R$, si ha

$$\Delta S_{cm} = \frac{1}{2}A_{cm}t^{*2} \implies t^* = \left(\frac{2\Delta S_{cm}}{A_{cm}}\right)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{V}_{cm} = \left(A_{cm}t^*\right)\hat{\imath}$$

Se lo spazio d è da intendersi come lunghezza di cui si è svolto il cilindro nella sua rotazione allora #3

$$\Delta\beta = \frac{d}{R} = \frac{5R}{R} = 5\ \text{rad}$$

Ma equivalentemente:

$$\begin{cases} \Delta\beta = \frac{1}{2}\alpha \bar{t}^{*2} \Rightarrow \bar{t}^{*} = \left(\frac{2\Delta\beta}{\alpha}\right)^{1/2} \\ \text{con } \alpha\text{: accelerazione angolare} \end{cases}$$

Quindi $\underline{v}_{cm} = (\alpha \bar{t}^{*}) R\, \hat{i}$

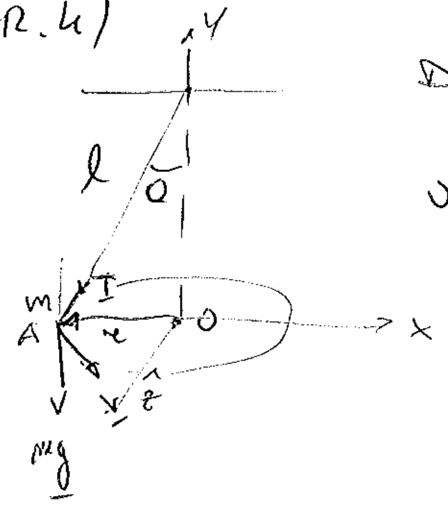
iv) Nell'istante t^* si può dire che la velocità del punto più alto della bobina (e.g. P) vale:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{cm} + \underline{\omega} \wedge \underline{R}$$

con
$$\underline{v}_{cm} = (A_{cm} t^*)\,\hat{i}$$
$$\underline{\omega} = -(\alpha t^*)\,\hat{k}$$
$$\underline{R} = +R\,\hat{j}$$

Da cui:
$$v_P = \underline{v}_{cm} + \underline{\omega} \wedge \underline{R} = (A_{cm} t^*)\hat{i} + (\alpha R t^*)\hat{i} = 2(A_{cm} t^*)\,\hat{i}$$

ESR. 4)



Dall'equazione $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underline{M}_O$ (con O punto fisso)

valutiamo $\underline{M}_O$:

$$\underline{M}_O = \overline{OA} \wedge T + \overline{OA} \wedge \vec{mg} =$$
$$= \left[-T\,\overline{OA}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + mg\,\overline{OA}\right]\hat{k} =$$
$$= \left[mg(l\sin\theta) - T(l\sin\theta)\cos\theta\right]\hat{k}$$

Applicando la legge di Newton lungo la verticale si ha che $T\cos\theta = mg$ e quindi

$$\underline{M}_O = \left[mg(l\sin\theta) - mg(l\sin\theta)\right]\hat{k} = \underline{0} \Rightarrow \underline{L} = \text{cost}$$

#4

ii) Per ulteriori $\underline{L}_O$ si applica la definizione.

$$\underline{L}_O = \vec{OA} \wedge m\vec{V} =$$

$$= (-l\sin\theta)\hat{i} + mV\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -l\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mV \end{vmatrix} =$$

$$= (l\sin\theta\, mV)\hat{j}$$

Lungo l'asse x si può scrivere

$$\frac{mV^2}{\overline{BA}} = T\sin\theta \Rightarrow V^2 = \frac{T(l\sin\theta)\sin\theta}{m}$$

Da cui

$$|\underline{L}_O| = l\sin\theta\, m\left[(l\sin\theta)\frac{\sin\theta}{\cancel{m}}\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[(l\sin\theta)^3 m^2 g\, tg\theta\right]^{1/2}$$