Incertezza di Misura

Richiami di Fondamenti della Misurazione

Misurare significa caratterizzare una grandezza fisica o un suo parametro, in termini quantitativi. A tale scopo è necessario eseguire un procedimento sperimentale avente come fine la suddetta caratterizzazione, il quale è definito **misurazione**. Invece l'oggetto della misurazione (il parametro da caratterizzare quantitativamente) è detto **misurando**. Il risultato della misurazione, infine, è denominato **misura**. Per poter associare la misura al misurando è necessario utilizzare un'ulteriore grandezza, omogenea con il misurando, che viene assunta come grandezza di riferimento: l'**unità di misura**. In tal modo, la misura può essere espressa come il rapporto tra il valore del misurando e l'unità di misura. Un'unità di misura, per essere tale, deve essere universalmente riconosciuta o, meno rigorosamente, riconosciuta almeno nell'ambito in cui ha senso la misura.
Il procedimento di misurazione tramite rapporto con un'unità di misura non è sempre possibile (non tutte le grandezze avranno requisiti di fattibilità di somme, rapporti e prodotti per una costante). In generale, le grandezze fisiche possono essere classificate in tre gruppi:

1) **Grandezze misurabili**: sono grandezze per le quali si possono definire e realizzare fisicamente le operazioni di somma e rapporto. Per queste grandezze, la misurazione si può eseguire applicando direttamente la definizione di misura. Infatti, per tali grandezze la misura si ottiene eseguendo il rapporto tra il valore del misurando e l'unità di misura corrispondente. La lunghezza, ad esempio è una grandezza misurabile. Infatti è possibile sommare la lunghezza di due segmenti e definirne il rapporto. Quindi la misura della lunghezza di un segmento si ottiene direttamente eseguendo il rapporto della lunghezza con l'unità di misura corrispondente (il metro).

2) **Grandezze classificabili**: sono grandezze per le quali non hanno senso le operazioni di somma e rapporto ma per le quali si possono definire solo le operazioni di confronto (uguaglianza e disuguaglianza). Anche a queste grandezze può essere associato convenzionalmente un numero al quale, per estensione si attribuisce il nome di misura. L'associazione di un valore numerico a tali grandezze avviene costruendo scale convenzionali. In pratica, utilizzando le operazioni di confronto, è possibile creare un insieme ordinato contenente un certo numero di queste grandezze fisiche indicate con i simboli G_1, G_2,....,G_n. Una volta realizzata la scala di valori ordinati secondo le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza, si può associare a ciascuna grandezza, in modo convenzionale, un numero progressivo P_1, P_2,…,P_n. La grandezza da misurare viene confrontata (usando sempre le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza) con i valori della scala, in modo da determinare il valore P_i cui è più prossima che si assume come misura della grandezza. Un classico esempio è costituito dalla durezza dei minerali. La scala Mohs definisce una scala di 10 minerali ordinati per durezza crescente. Per quantificare la durezza di un minerale, si confronta la

Talco	1	Scalfito dall'unghia
Gesso	2	
Calcite	3	Scalfito da una moneta di rame
Fluorite	4	Scalfito da una lama di coltello o da un pezzo di vetro
Apatite	5	
Feldspato	6	Scalfisce una lama di coltello o un pezzo di vetro
Quarzo	7	
Topazio	8	
Corindone	9	
Diamante	10	Scalfisce qualunque materiale

Tabella 1 - Scala di Mohs

durezza del suddetto minerale con le durezze dei minerali della scala. L'operazione di classificazione, in tal caso, consiste nel verificare sperimentalmente se il minerale riesce a scalfirne un altro (e quindi è più duro) o se ne rimane scalfito (e quindi è meno duro).

3) **Grandezze misurabili solo per via indiretta**: sono grandezze fisiche che si estrinsecano solo quando sono sottoposte a particolari stimoli. La misurazione di tali grandezze può essere ottenuta solo in maniera indiretta, ovvero, tramite la misurazione di altre grandezze relazionate a quella d'interesse tramite una determinata legge fisica. La resistenza elettrica è una grandezza misurabile solo per via indiretta. Infatti, la grandezza resistenza elettrica si manifesta solo se il resistore è attraversato da una corrente o se è sottoposto ad una differenza di potenziale. La misurazione di una resistenza può essere eseguita, allora, facendo ricorso alla legge di Ohm, misurando separatamente sia la corrente I che attraversa il resistore che la tensione V applicata ai suoi capi. Poi, dalla legge di Ohm si ottiene, per via indiretta, la misura della resistenza R.

Bisogna precisare, comunque, che talvolta si ricorre a misurazioni indirette anche per misurare grandezze che in principio si potrebbero misurare in maniera diretta. Per esempio la misurazione della distanza tra due oggetti può essere ottenuta misurando il tempo impiegato da un corpo che, spostandosi con velocità costante, percorrere la distanza tra i due oggetti.

Fattori di influenza nella misurazione

In teoria il rapporto ottenuto dal confronto tra misurando e unità di misura potrebbe essere espresso con un numero infinito di cifre. Per come è stato definita, però, una misurazione è un procedimento sperimentale, ovvero un processo nel quale intervengono diversi fattori variabili che fanno sì che ripetendo la misurazione più volte si ottengano risultati diversi. Questi fattori invalidano la misura ottenuta, ovvero al risultato di misura ottenuto è indispensabile associare una certo grado di indeterminazione che stabilisce il grado di precisione con cui è possibile conoscere il misurando. Tale grado di indeterminazione è definito **incertezza di misura**. Le cause di incertezza sono svariate e coinvolgono tutte le parti che intervengono nel processo della misurazione. Ad esempio, una causa di incertezza è costituita dallo strumento di misura adoperato che può essere più o meno preciso o dall'operatore che esegue la misura. Un altro fattore che determina l'incertezza della misurazione è legata al modello del misurando adottato. Si tratta di incertezza intrinseca del misurando, riscontrabile ad esempio quando si vuol misurare una lunghezza di una superficie che si ipotizza perfettamente liscia ed invece, nella realtà, ha una certa rugosità: la lunghezza misurata sarà affetta da errore. In pratica, modelli più semplici semplificheranno il procedimento di misura, ma comporteranno una maggiore incertezza.
A tale scopo viene definita l'**incertezza desiderata**, come la massima incertezza che si è disposti a tollerare sul valore del misurando. L'incertezza estesa determina il limite superiore al grado di indeterminazione del valore del misurando e quindi, in pratica, stabilisce il metodo di misura da adottare e, di conseguenza, i costi della misurazione. Tale concetto, comunque, sarà ripreso in maniera più esaustiva dopo aver esposto i metodi per stimare l'incertezza associata ad una misurazione.
I fattori che influenzano la misurazione si distinguono in **effetti sistematici** ed **effetti aleatori**. I primi, al ripetere delle misurazioni, intervengono sempre con lo stesso segno. Ne è un esempio una misurazione di lunghezza eseguita con un metro "reale", di lunghezza, ad esempio, minore del metro campione; misurando più volte la stessa lunghezza, si otterrà una misura errata di una determinata quantità sempre per difetto. Proprio perché si presentano sempre con lo stesso segno, gli effetti sistematici, se valutati, possono essere compensati, correggendo opportunamente il risultato della misurazione. Gli effetti aleatori, invece, agiscono come un contributo casuale di errore, di segno qualunque, in dipendenza da tanti fattori non prevedibili. Pertanto essi non possono essere stimati a priori, ma, al massimo, si può stimare un intervallo all'interno del quale ricade il misurando a causa dell'intervento di tali effetti. In questo capitolo saranno esposti i metodi per

stimare correttamente l'incertezza associata alla misurazione di una grandezza; a tale scopo, nel seguito, si considererà che sono stati compensati tutti gli effetti sistematici e gli unici effetti da prendere in considerazione nel processo sono aleatori.

La misurazione come esperimento aleatorio

Per le cause di incertezza esposte nel precedente paragrafo, il risultato di un processo di misurazione può essere visto come una variabile aleatoria. Ad esempio, se si effettuano misurazioni ripetute su di una stessa grandezza, si verifica sperimentalmente che le misurazioni non producono sempre gli stessi risultati. Le misure ottenute, diverse tra loro a causa di fattori di influenza variabili e non prevedibili, sono però comprese all'interno di una fascia di valori come mostra la Figura 1.

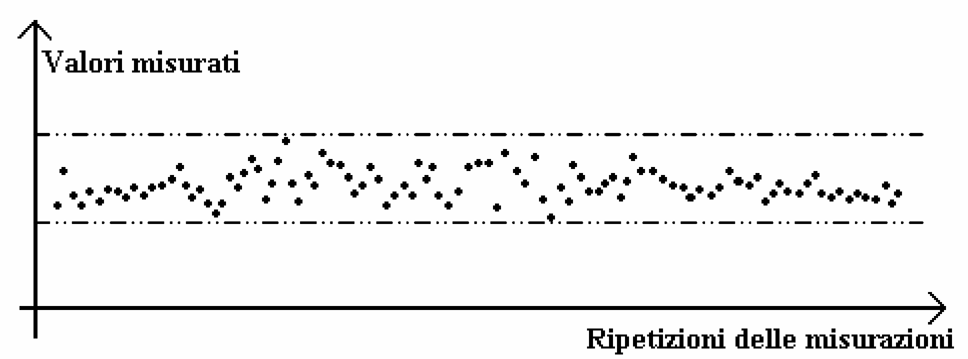

Figura 1

Maggiore è il numero di misurazioni eseguite, maggiore è il grado di fiducia che si può porre nell'ipotesi che il valore del misurando (ossia la misura) sia contenuto all'interno di questa fascia di valori.
Per stimare il valore di un misurando è necessario, quindi, ripetere un certo numero di volte la procedura di misurazione e occorre realizzare un'analisi statistica sull'insieme dei risultati ottenuti. A tal fine vengono di seguito introdotti alcuni concetti dell'analisi statistica.

Frequenza statistica e probabilità di un evento

Definito evento (E) il singolo risultato di un esperimento aleatorio, si definisce **frequenza statistica** dell'evento in esame, il rapporto tra il numero di volte n_i che si è verificato quel dato evento e il numero totale *N* degli esperimenti:

$$0 \leq \frac{n_i}{N} \leq 1$$

Al crescere del numero degli esperimenti eseguiti, la frequenza statistica di un evento *E* approssima sempre meglio la probabilità di occorrenza *P(E)* dell'evento stesso:

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(E)}{N} \qquad (1)$$

Si noti che, essendo, nella pratica, il numero delle prove effettuabili sempre limitato, si potrà avere solo una stima della probabilità di occorrenza di un evento.

Funzione di distribuzione e di densità di probabilità

Per studiare il processo di misurazione come un esperimento aleatorio, è necessario considerare i risultati di N determinazioni sperimentali di una stessa grandezza come una variabile aleatoria X

$X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$. La **funzione di distribuzione cumulativa** $P(x_i)$ di una variabile aleatoria X esprime quale è la probabilità che X assuma valori inferiori a x_i.
La **funzione di densità di probabilità** $f_X(x)$ si definisce come la derivata della funzione cumulativa:

$$f_X(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial x} \qquad (2)$$

Tale funzione esprime la probabilità che ha la variabile aleatoria X di essere compresa tra il valore x e il valore $x+dx$. Conoscendo la funzione di distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria, è, allora, possibile valutare la probabilità che il valore di tale variabile rientri in un determinato intervallo di valori.
Come stabilito dal teorema del limite centrale, la distribuzione di probabilità di un fenomeno aleatorio complesso (come una misurazione) in cui confluiscono molteplici contributi (e quindi si compongono diverse funzioni densità di probabilità), tende a essere una distribuzione gaussiana, la cui funzione di densità di probabilità (pdf) è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (3)$$

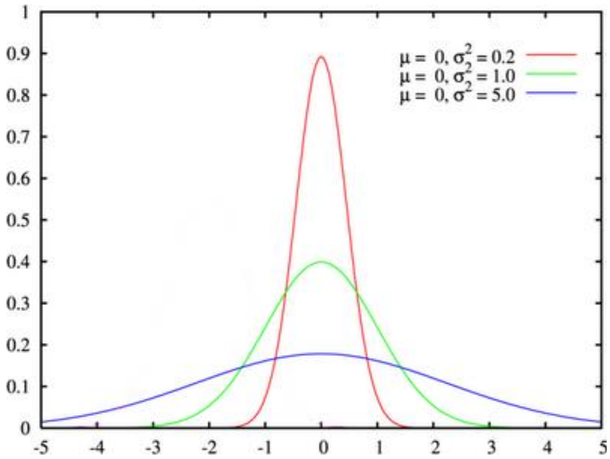

Figura 2

dove μ è la media statistica e σ è la deviazione standard, la quale, come si nota dalla Figura 2, fornisce il grado di dispersione della variabile aleatoria intorno al valore medio.
Come già accennato, la pdf di una variabile aleatoria esprime una probabilità; se si volesse esprimere la pdf della variabile aleatoria rappresentata dal risultato di una misurazione sarebbero necessarie infinite misure. Nella pratica, si dispone solo di un numero finito di misure, ovvero è possibile ottenere le frequenze statistiche della variabile aleatoria; se, però, il numero di misurazioni ripetute è sufficientemente elevato, come dimostra la (1), si può ritenere che le frequenze statistiche approssimino le probabilità. In particolare, delle N misure della variabile aleatoria X si esegue un **istogramma delle occorrenze**. Innanzitutto, il range x_{max}-x_{min} di tutti i risultati di misura ottenuti viene suddiviso in M intervalli (per meno di 50 misurazioni in genere si adottano 5 intervalli) di ampiezza Δx data da:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M} \qquad (4)$$

Si otterrano, quindi, M intervalli: $[x_{min} \div x_{min} + \Delta x[$, $[x_{min} + \Delta x \div x_{min} + 2\Delta x[, \ldots, [x_{max} - \Delta x \div x_{max}]$.
A questo punti si conta quante delle N misure ricadono in ognuno degli intervalli; il valore $n(i)$ del numero di misure che ricade nell'i-simo intervallo è la frequenza di occorrenza dell'intervallo i. Rapportando la frequenza di occorrenza al numero totale N delle misure si ottiene la frequenza relativa e, come mostrato in Figura 3, l'istogramma relativo delle occorrenze. Come anticipato, al crescere del numero di misure N, l'istogramma relativo approssima sempre meglio la funzione densità di probabilità del risultato della misurazione. In tal caso, si osserva che la distribuzione

ottenuta è simmetrica rispetto ad un valore centrale x_0, intorno al quale si addensa il maggior numero di risultati; inoltre, più ci si allontana dal valore centrale, più si riduce la probabilità di ottenere risultati di misura, come risulta dall'area del rettangolo corrispondente.

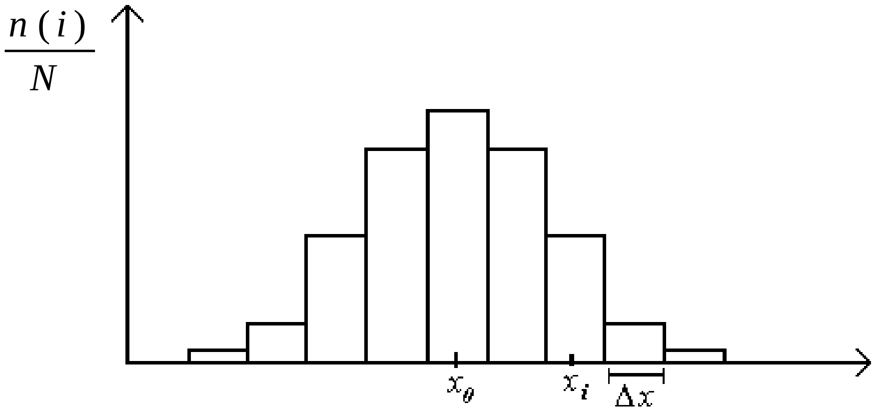

Figura 3

Parametri sintetici di una variabile aleatoria

Il parametro fondamentale per caratterizzare una variabile aleatoria**media statistica** μ, definita come:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)dx \tag{5}$$

Dove $f_x(x)$ è la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria X.
Nel caso della variabile aleatoria costituita dal risultato di una misurazione, non si dispone della pdf, ma si ottiene un campione costituito da N misure. In tal caso, discretizzando la (5), e considerando che ognuno dei valori x_i ottenuti dalla misurazione ha frequenza relativa $1/N$, si ha:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{6}$$

Il valore così trovato è la **media campionaria** (o sperimentale) che, naturalmente, non è la media statistica, ma, se N è elevato, ne costituisce una buona stima. Tale valore medio, quindi, viene utilizzato come migliore stima del misurando il quale, per un numero infinito di misure, sarebbe pari a μ.
Se, però, i risultati ottenuti x_i sono molto diversi tra di loro, non è corretto ritenere che il loro valore medio rappresenti la migliore stima del misurando. L'informazione relativa alla dispersione di una variabile è rappresentata dalla **varianza**, definita come:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx \tag{7}$$

Che, nel caso della variabile aleatoria si conosce solo un numero di valori finito N, diventa:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{8}$$

detta **varianza campionaria** (o sperimentale), che, al crescere di N, costituisce sempre più una buona stima di σ^2. Nell'ambito delle misurazioni non è comodo ragionare con la varianza poiché questa ha un'unità di misura che è il quadrato dell'unità di misura del misurando. Per tale motivo, più frequentemente si utilizza la deviazione standard o **scarto quadratico medio**, definito come la radice quadrata positiva della varianza:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{9}$$

Valutazione dell'incertezza di categoria A e B

Il metodo per stimare l'incertezza associata ad una misurazione è sancito dalla normativa UNI CEI ENV 13005 "Guida all'espressione dell'incertezza di misura". In tale norma viene stabilito che l'incertezza deve essere valutata componendo due termini che si ottengono dai due seguenti approcci:

Valutazione dell'incertezza di categoria A : è il termine che si ottiene attraverso l'analisi statistica dei risultati provenienti da misurazioni ripetute. Il risultato di misura sarà costituito dalla media sperimentale delle *N* misure. Per tale motivo, l'incertezza proveniente da queste misure è legata al fatto che, poiché *N* è finito, è possibile ottenere solo una stima della media statistica (che rappresenta il valore atteso del misurando) e che tale stima migliora all'aumentare di *N*. Dunque come termine di incertezza si utilizza il rapporto tra lo scarto quadratico medio e la radica quadrata del numero di prove effettuate:

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{10}$$

Il termine u_A è detto **incertezza tipo** di categoria A. Un approccio di questo tipo è definibile, per quanto detto, un approccio *a posteriori* in quanto la valutazione di tali parametri è possibile solo dopo il rilevamento dei risultati delle misurazioni ripetute nelle stesse condizioni sperimentali.

- **Valutazione dell'incertezza di categoria B:** è il termine ottenuto tramite informazioni disponibili sulla misura senza effettuare prove ripetute. Esempi di tali informazioni sono: dati acquisiti in misurazioni precedenti, esperienza dell'operatore, informazioni sulla strumentazione utilizzata. Questo è, quindi, un approccio *a priori*.

Esempio:Interpretazione delle specifiche strumentali del manuale di uno strumento di misura

In tale sezione viene preso in esame un esempio di valutazione di tipo B dell'incertezza attraverso l'esame delle specifiche dello strumento fornite dal costruttore. Si supponga, ad esempio, di aver eseguito delle misurazioni ripetute di una tensione continua ottenendo, come media sperimentale, il valore di 8.5V.

Ogni strumento dispone di un manuale d'uso in cui sono presenti le caratteristiche peculiari dello strumento stesso tra le quali le cosiddette tabelle di Accuracy Specifications ovvero delle tabelle riportanti l'incertezza associata allo strumento. La Figura 4 ne mostra un esempio.

In essa si notano i seguenti campi:

- <u>Function</u> : in questo caso, lo strumento è un multimetro, per cui questo parametro definisce per la misura di quale grandezza è impiegato il multimetro; in questo caso, la riga da considerare sarà DC Voltage.

- <u>Range</u>: definisce il fondo scala dello strumento. Il multimetro in questione adatta automaticamente il fondo scala scegliendo il range più basso che consenta di eseguire la misura senza saturare; in questo caso, dove il valore medio della tensione misurata è di 8.5V, si sceglierà la riga corrispondente al range di 10V.

- Le successive tre colonne indicano il tempo trascorso dall'ultima calibrazione dello strumento (24 ore, 90 giorni o 1 anno; si consideri, ad esempio, la colonna 1 anno. Si ottengono, così, due coefficienti che, in questo caso, sono 0.0035 e 0.0005.

- Si verifica, inoltre, se la temperatura ambiente a cui si esegue la misurazione sia interna o esterna alla fascia 23°C ± 5 °C. Qualora non lo sia, si valutano i rispettivi coefficienti di correzione. In particolare, i coefficienti trovati precedentemente dovranno essere maggiorati di 0.0005 e 0.0001 rispettivamente per ogni grado centigrado esterno alla fascia 23°C ± 5 °C.

Accuracy Specifications ± (% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001
Resistance [4]	100.0000 Ω	1 mA	0.0030 + 0.0030	0.008 + 0.004	0.010 + 0.004	0.0006 + 0.0005
	1.000000 kΩ	1 mA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	10.00000 kΩ	100 μA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	100.0000 kΩ	10 μA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	1.000000 MΩ	5 μA	0.002 + 0.001	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0010 + 0.0002
	10.00000 MΩ	500 nA	0.015 + 0.001	0.020 + 0.001	0.040 + 0.001	0.0030 + 0.0004
	100.0000 MΩ	500 nA // 10 MΩ	0.300 + 0.010	0.800 + 0.010	0.800 + 0.010	0.1500 + 0.0002
DC Current	10.00000 mA	< 0.1 V	0.005 + 0.010	0.030 + 0.020	0.050 + 0.020	0.002 + 0.0020
	100.0000 mA	< 0.6 V	0.01 + 0.004	0.030 + 0.005	0.050 + 0.005	0.002 + 0.0005
	1.000000 A	< 1 V	0.05 + 0.006	0.080 + 0.010	0.100 + 0.010	0.005 + 0.0010
	3.000000 A	< 2 V	0.10 + 0.020	0.120 + 0.020	0.120 + 0.020	0.005 + 0.0020

Figura 4

Come specificato nella parte superiore della tabella, i due coefficienti trovati definiscono due aliquote percentuali:

- ***Percentuale della lettura*** (*% of reading*)**;**
- ***Percentuale del fondo scala*** (*% of range*)**.**

Per questo strumento, allora, l'incertezza si ottiene sommando due contributi. Il primo è il prodotto tra il primo coefficiente, diviso per 100, e il valore letto; come valore letto si assume la media delle misure, quindi, in questo caso, il primo termine è 0.0035*8.5/100. Il secondo termine è costituito dal prodotto tra il secondo coefficiente, diviso per 100, ed il fondo scala: 0.0005*10/100. La somma di questi due contributi costituisce la fascia di incertezza dello strumento fornita dal costruttore. In realtà, per questo particolare strumento, il costruttore non fornisce l'incertezza tipo, ma l'incertezza moltiplicata per 4; in seguito si chiarirà il motivo per cui, nella pratica, l'incertezza associata ad una misurazione viene fornita maggiorata, moltiplicando l'incertezza tipo per un fattore numerico. In questo caso, allora, per comporre i due termini di categoria A e B è necessario risalire all'incertezza tipo di categoria B u_B, ovvero bisogna dividere il valore ottenuto dalle specifiche dello strumento per 4.

Incertezza globale

Le cause di incertezza in un sistema di misura possono essere molteplici e possono essere valutate in modo differente a seconda che si eseguano misure ripetute (valutazione di categoria A) o che ci si affidi a conoscenze acquisite in vario modo (valutazione di categoria B). La norma prescrive di combinare quadraticamente le incertezze tipo delle varie categorie con una relazione del tipo:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_{1B}^2 + u_{2B}^2 + \ldots + u_{nB}^2} \qquad (11)$$

in cui u_A è l'incertezza tipo di categoria A ed i termini u_{iB} sono le incertezze tipo di categoria B. Il termine u dell'espressione (11) fornisce l'**incertezza globale** della misurazione.

L'incertezza estesa

Si supponga di aver eseguito delle misurazioni ripetute ottenendo una valore medio $\bar{x}$ ed un'incertezza globale pari a u. Come affermato in precedenza, il risultato di una misurazione è considerato come una variabile aleatoria con pdf gaussiana; in particolare, tale pdf è centrata intorno al valore medio $\bar{x}$ delle misurazioni ed ha deviazione standard pari all'incertezza globale u (Figura 5). Si può dimostrare, per la distribuzione gaussiana, che la probabilità che la variabile aleatoria assuma un valore compreso nell'intervallo $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ è pari al 68.4% (si ottiene valutando l'area sottesa dalla pdf gaussiana in tale intervallo). Ciò significa che quando viene fornito, come risultato della misurazione, l'intervallo $\bar{x} \pm u$, implicitamente si sta considerando che la probabilità che il valore del misurando ricada in questo intervallo è del 68.4%. La probabilità che il misurando abbia un valore compreso nell'intervallo fornito (in questo caso 68.4%) è detto **livello di confidenza** (o livello di fiducia) in quanto esprime proprio il grado di fiducia che ha l'operatore nel ritenere che il valore del misurando si trovi nell'intervallo determinato dall'incertezza.
Nelle applicazioni pratiche, però, un livello di confidenza del 68% può non bastare, cioè l'utente finale può avere interesse ad ottenere un risultato di misura con un livello di confidenza più elevato. A tale scopo si introduce l'**incertezza estesa** U, ottenuta moltiplicando l'incertezza tipo u per un fattore numerico k detto **fattore di copertura**, che può avere valori compresi tra 1 e 4.

$$U = ku \tag{12}$$

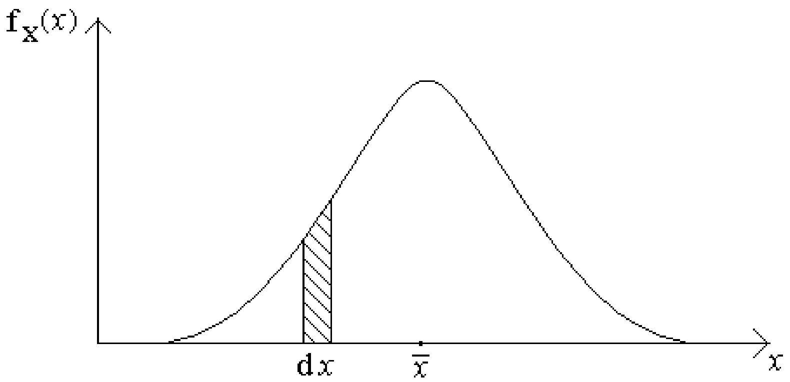

Figura 5

Naturalmente, la (12) indica che l'incertezza viene aumentata, ma ciò porta ad ottenere una fascia di valori con un livello di confidenza molto più alto. Per una distribuzione gaussiana, il livello di confidenza associato ai diversi fattori di copertura sono indicati in tabella:

Fattore di copertura	Livello di confidenza
1	68.4%
2	95.4%
3	99.7%
4	99.994%

Quindi, se si sceglie un fattore di copertura pari a 3, sarà fornito, come risultato della misurazione, la fascia:

$$\bar{x} \pm U = \bar{x} \pm ku = \bar{x} \pm 3u \tag{13}$$

e tale risultato sarà fornito con un livello di confidenza del 99.7%.
L'incertezza può essere espressa in tre modi diversi:

- in *valore assoluto:* in questo caso corrisponde alla semiampiezza di valori in cui si ritiene ricada il valore del misurando ed ha le stesse dimensioni del misurando;
- in *valore relativo*: in tal caso essa esprime il rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore centrale della fascia. Essa è adimensionale e può anche essere espressa in valore percentuale o in parti per milione;
- in valore *relativo ad un valore convenzionale*: in tal caso essa esprime il rapporto tra l'incertezza assoluta e un valore convenzionale che solitamente coincide con il valore di fondo scala dello strumento.

Incertezza desiderata

A questo punto può essere ripreso il concetto di **incertezza desiderata**, la quale, in maniera più rigorosa, è la massima incertezza estesa che si è disposti a tollerare sul valore del misurando. Dunque quando viene stabilita l'incertezza desiderata deve essere specificato il fattore di copertura, cioè il livello di confidenza associato a quella incertezza. Dunque, una volta fissata l'incertezza desiderata, dividendo per il fattore di copertura si ottiene l'incertezza tipo ed in base a questa si determina il metodo di misura da impiegare.

Le cifre significative

Idealmente, il rapporto tra il misurando e l'unità di misura può essere un valore rappresentato con un numero infinito di cifre significative. Anche nel caso di misurazioni ripetute, l'operazione di media può dar luogo ad un risultato con molte cifre significative, in base al modo in cui la calcolatrice presenta il risultato. In realtà, l'incertezza fornisce un'informazione sul numero di cifre con le quali è corretto rappresentare il risultato. Si supponga di aver eseguito delle misurazioni ripetute di resistenza ottenendo come valore medio 10.241254Ω, mentre dalla stima dell'incertezza è stato ottenuto un valore pari a 0.002638 Ω. Per la rappresentazione del risultato, la norma prescrive, innanzitutto, di arrotondare l'incertezza e di rappresentarla con una sola cifra significativa, visto che le altre sarebbero prive di significato. Infatti, nel caso in esame, se l'incertezza è di 0.002 Ω, le altre cifre decimali sono senza significato perché non si possiede l'incertezza per poterle stimare. Arrotondando il valore di incertezza dell'esempio, si ottiene, quindi, 0.003Ω. A questo punto, osservando l'incertezza, si nota che sul risultato di misura si ha un'indeterminazione che è dell'ordine di grandezza dei mΩ. Poiché non si ha il grado di accuratezza per poter stimare le cifre successive al mΩ, queste sono prive di significato ed il risultato di misura deve essere arrotondato al mΩ. In generale, il risultato di misura deve essere arrotondato all'ultima cifra decimale dell'incertezza. Nell'esempio considerato, il modo corretto per esprimere il risultato della misurazione è il seguente: (10.241±0.002)Ω.

Valutazione dell'incertezza nelle misure indirette

Quando viene eseguita una misurazione indiretta, diverse grandezze vengono misurate direttamente ed ognuna di esse viene stimata con una determinata incertezza. Naturalmente, applicando la relazione analitica per ottenere il valore del misurando, tutte queste incertezze influiscono su quella che sarà l'incertezza della grandezza misurata in maniera indiretta.
Indicando con y il misurando, questo può essere espresso come funzione di n grandezze misurabili in maniera diretta: $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Siano $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ i valori ottenuti dalle misurazioni ed $u_1, u_2, \dots u_n$ le incertezze associate alle misurazioni dirette. Per valutare l'incertezza della grandezza y, la norma suggerisce di utilizzare la **legge di propagazione delle incertezze** che, nell'ipotesi che le grandezze misurate direttamente siano statisticamente indipendenti è:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_{x_i}^2} \qquad (14)$$

Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono dette **coefficienti di sensibilità** e devono essere valutate nel punto

$$x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \ldots, x_n = \bar{x}_n$$

Interpretazione geometrica della propagazione delle incertezze

La legge di propagazione delle incertezze proviene da una considerazione di carattere matematico. Si supponga, per semplicità, che la grandezza misurata direttamente sia una sola e che il legame tra il misurando y e il parametro misurato x venga espresso dalla generica funzione f:

$$y=f(x)$$

Il valore del misurando y_0 si ottiene calcolando il valore della funzione in corrispondenza del valore misurato (indicato con il pedice 0) di x:

$$y_0 = f(x)\big|_{x=x_0}$$

Se u_x è l'incertezza della misura di x, in Figura 6 è indicata la fascia all'interno della quale può variare x, pari a $2u_x$. Per valutare l'incertezza su y bisogna individuare la fascia $2u_y$ all'interno della quale varia y in corrispondenza dell'intervallo di variazione di x. Sviluppando in serie di Taylor, nel punto x_0,y_0, la funzione f e considerando, come incrementi, i valori di incertezza si ottiene:

$$u_y = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} u_x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} (u_x)^2 + \ldots.. \qquad (15)$$

Se, come avviene usualmente:

- L' incertezza assoluta ha un valore talmente basso da poter trascurare il contributo dei termini di ordine secondo e superiore
- il valore della derivata prima della f in x_0 non è nullo

allora si può approssimare l'espressione (15) con la sua forma linearizzata:

$$u_y = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} u_x$$

Graficamente ciò viene illustrato dalla Figura 6.

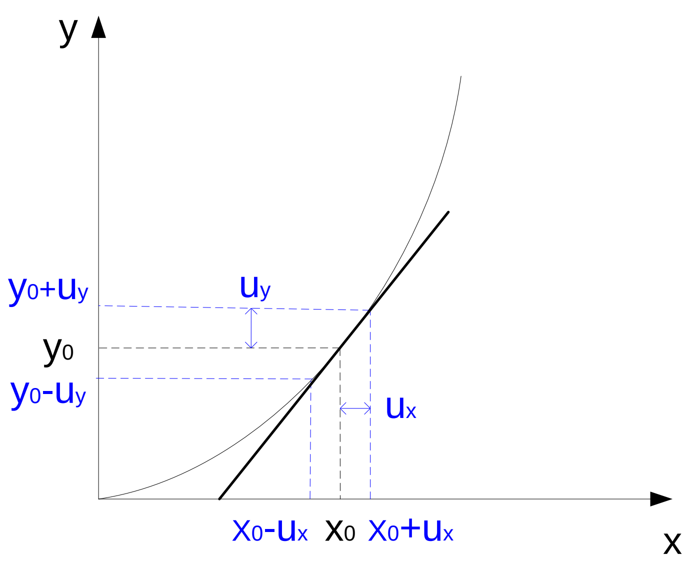

Figura 6

L'approccio deterministico e la tolleranza

Tutte le considerazioni ed i metodi fin qui esposti fanno riferimento ad un **approccio probabilistico** alla stima dell'incertezza, dove, l'incertezza del misurando, nella misura indiretta è ottenuta propagando le varianze.
Esiste anche un altro tipo di approccio, detto **approccio deterministico**, che considera il worst case e mira ad individuare l'intervallo di valori nel quale sicuramente (con probabilità del 100%) si trova il misurando. In questo caso, la semiampiezza della fascia di valori in cui si trova il misurando non è l'incertezza, ma viene indicata come **tolleranza**. Per capire cos'è la tolleranza, si prenda in esame il caso dei resistori, per i quali, spesso, il costruttore fornisce il valore nominale R ed il valore di tolleranza ΔR. Con la tolleranza il costruttore sta fornendo l'informazione che il valore del resistore, al 100% delle probabilità, è compreso tra $R- \Delta R$ e $R+ \Delta R$ e che i valori compresi in questa fascia sono tutti equiprobabili. In pratica, il valore del resistore è una variabile aleatoria, ma, questa volta, con una funzione densità di probabilità uniforme, come quella mostrata in Figura 7.
In una distribuzione uniforme, di semiampiezza Δ, la funzione densità di probabilità è rappresentata da un rettangolo di base 2Δ ed altezza $1/2\Delta$ (dovendo la pdf avere area unitaria). Quindi la variabile aleatoria X ha sempre la stessa probabilità, pari a $1/2\Delta$, di assumere uno qualunque dei valori dell'intervallo.

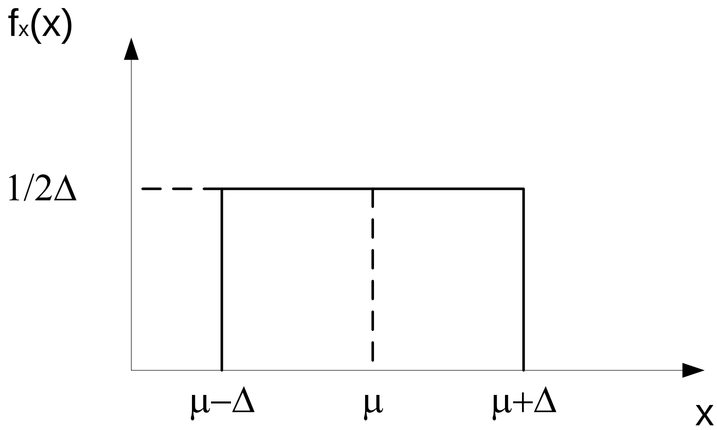

Figura 7

Per passare dalla tolleranza di una grandezza alla sua incertezza, si deve valutare la deviazione standard di una variabile aleatoria a pdf uniforme; applicando la (7) si ottiene:

$$u = \int_{\mu-\Delta}^{\mu+\Delta} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{2\Delta} dx = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \qquad (16)$$

Nel caso di misurazioni indirette, con l'approccio deterministico è possibile ottenere il valore di tolleranza della grandezza y. Se $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ sono i valori ottenuti dalle misurazioni e Δx_1, $\Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ sono le corrispondenti tolleranze, la tolleranza di y è:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i \qquad (17)$$

Si sommano, cioè, i prodotti dei valori assoluti dei coefficienti di sensibilità e delle tolleranze delle relative grandezze di ingresso. L'adozione dei valori assoluti garantisce che, indipendentemente dai segni assunti dalle varie grandezze, i contributi all'incertezza complessiva vadano sempre a sommarsi, in modo da mettersi sempre nella condizione più sfavorevole.
Si noti che in tal caso non ha senso parlare di fattore di copertura.

Compatibilità tra misure

A causa dell'inevitabile incertezza che caratterizza ogni misurazione non si può parlare di relazione di uguaglianza tra misure. Infatti, ripetendo la misurazione di una grandezza, cambiando ad esempio operatore o strumento di misura, si perviene, in generale, a differenti stime del misurando e differenti intervalli di incertezza o tolleranza. La relazione di uguaglianza è sostituita dalla relazione di compatibilità. Due misurazioni sono dette compatibili tra di loro soltanto se l'intersezione tra i due intervalli di valori è un insieme non nullo. In Figura 8 è mostrato un esempio grafico.

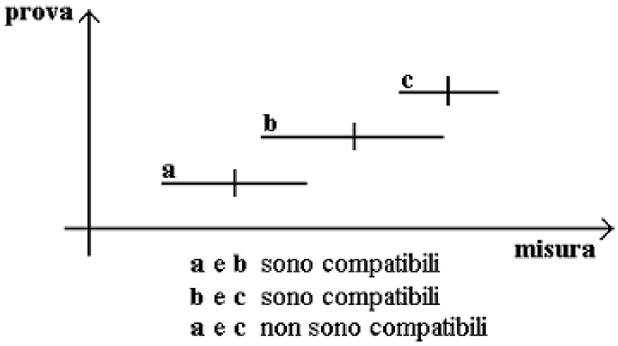

Figura 8