

## Capitolo 2 - TRAVATURE RETICOLARI

### 2.1 Prime definizioni

Un *sistema articolato* è un insieme costituito da un numero finito di aste e di nodi. Si prenderanno in considerazione i sistemi articolati piani, cioè supporremo che tutte le aste ed i nodi appartengano ad uno stesso piano.

Consideriamo un sistema articolato piano assoggettato a determinati vincoli esterni. Se tale sistema nel suo insieme (cioè compresi i vincoli esterni) ha grado di libertà uguale a zero si dirà **NON LABILE**; se invece il grado di libertà è diverso da zero si dirà **LABILE**.

Un'ulteriore classificazione che però prescinde dai vincoli esterni è la seguente: il sistema si dirà **INDEFORMABILE**, quando si comporta come un corpo rigido. Più specificamente, si dirà **STRETTAMENTE INDEFORMABILE** quando è necessaria la presenza di tutte le sue aste ed i suoi nodi per assicurarne l'indeforabilità. Si dirà invece ad **ASTE SOVRABBONDANTI** quando esiste almeno un'asta la cui soppressione non altera l'indeforabilità.

Inoltre, un sistema articolato si dirà **ISOSTATICO** quando le Equazioni Cardinali della Statica (d'ora in poi dette ECS) sono sufficienti a determinare univocamente le reazioni che tutti i vincoli (esterni ed interni) esplicano sul sistema in condizioni di equilibrio. Quando è determinato il calcolo delle reazioni esterne il sistema si dirà **ESTERNAMENTE ISOSTATICO**; analogamente si dirà **INTERNAMENTE ISOSTATICO** quando è determinato il calcolo delle reazioni interne.

Un sistema articolato piano indeformabile viene detto **TRAVATURA RETICOLARE PIANA**.

Le travature reticolari più semplici sono i **TRALICCI TRIANGOLARI** (*figura 1*), così definiti:

Un traliccio triangolare è un insieme finito di triangoli  $T_1, T_2, \dots, T_n$  aventi le seguenti due proprietà:

- 1 - Due triangoli consecutivi hanno in comune solo un lato e sono da parti opposte rispetto ad esso.
- 2 - Due triangoli non consecutivi hanno in comune al più un nodo.

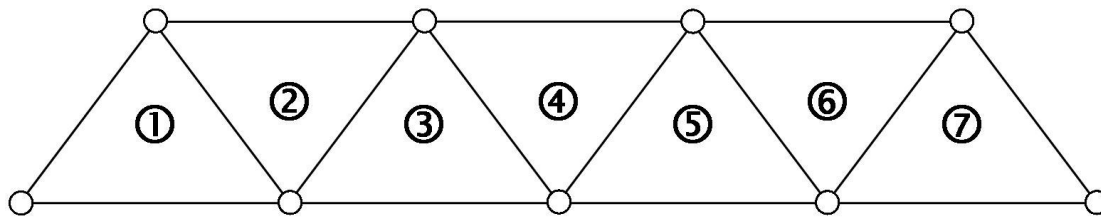


Figura 1 - esempio di traliccio rettangolare costituito da 7 triangoli

## 2.2 Calcolo delle reazioni esterne in una travatura

Di solito i vincoli esterni che assicurano l'equilibrio di una travatura sono appoggi fissi e carrelli. Quando la travatura è fissata all'esterno mediante un appoggio fisso e un carrello, basta applicare le ECS all'equilibrio dell'intera travatura per calcolarne le reazioni vincolari esterne, riducendosi così allo schema della trave appoggiata.

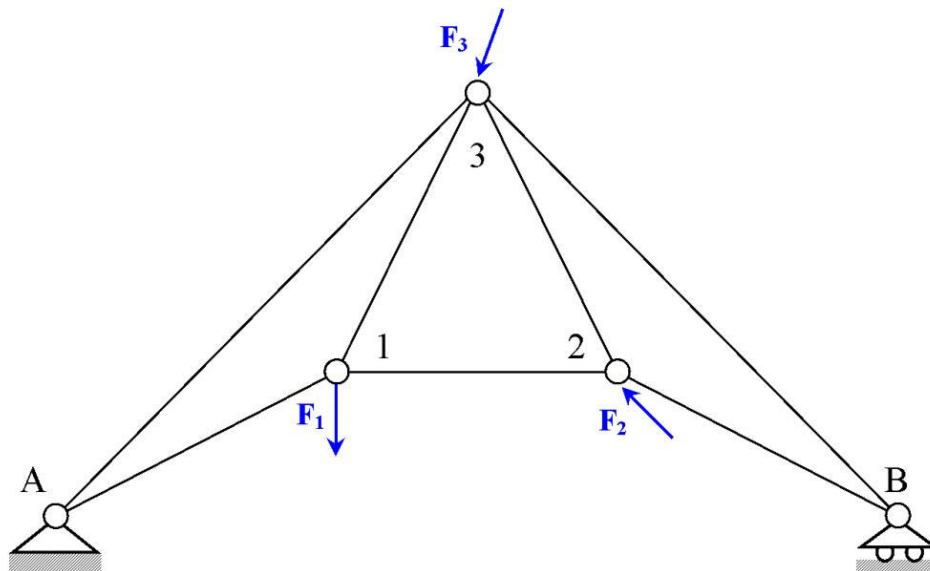


Figura 2 - Capriata semplice

La travatura di *figura 2* è un traliccio triangolare costituita da tre triangoli. Essa è lo schema più semplice di travatura, nota con il nome di **CAPRIATA (SEMPLICE)**. Si tratta di un sistema strettamente indeformabile poiché la soppressione di una qualunque asta ne altera l'indeformabilità. Come si vede, essa è vincolata all'esterno mediante l'appoggio fisso A ed il carrello B; il suo grado di libertà è zero e quindi è non labile. Poiché è in equilibrio valgono le ECS applicate all'intera travatura.

Ricordiamo che le ECS si scrivono

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0 \\ \mathbf{M}_o + \mathbf{M}'_o = 0 \end{cases}$$

dove  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{M}_o$  sono il risultante ed il momento risultante delle forze attive ed  $\mathbf{R}'$  ed  $\mathbf{M}'_o$  sono il risultante ed il momento risultante delle reazioni vincolari.

In questo caso  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{M}_o$  sono il risultante ed il momento risultante delle seguenti forze:

$$\Sigma \equiv \{(1, \mathbf{F}_1), (2, \mathbf{F}_2), (3, \mathbf{F}_3)\}$$

Per sollecitazione vincolare si intende solo quella esterna all'intera travatura, costituita da

$$\Sigma' \equiv \{(A, \mathbf{R}_A), (B, \mathbf{R}_B)\}$$

Pertanto  $\mathbf{R}'$  ed  $\mathbf{M}'_o$  indicano il risultante ed il momento risultante di  $\Sigma'$ .

Da notare che nella sollecitazione vincolare non è inclusa quella interna, perché ci stiamo interessando dell'equilibrio dell'intera struttura sotto l'azione delle reazioni vincolari esterne.

Quindi, nell'esempio considerato le (1) diventano:

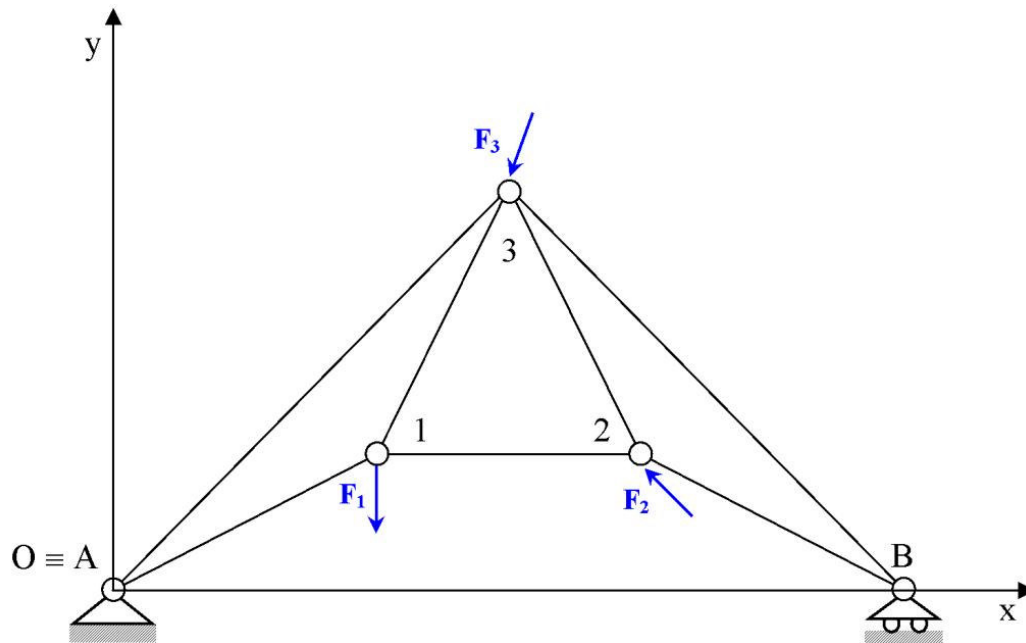
$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0 \\ (1-A) \times \mathbf{F}_1 + (2-A) \times \mathbf{F}_2 + (3-A) \times \mathbf{F}_3 + (B-A) \times \mathbf{R}_B = 0 \end{cases}$$

avendo scelto come polo dei momenti  $O \equiv A$ .

In modo più conciso, possiamo scrivere:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0 \\ \mathbf{M}_A + (B-A) \times \mathbf{R}_B = 0 \end{cases}$$

Per verificare l'esterna isostaticità, introduciamo un riferimento (*figura 3*) con origine in A, con asse x coincidente con la retta AB, asse y perpendicolare ad AB in A e asse z normale ad x ed y in A. Poiché in A c'è un appoggio fisso il vettore  $\mathbf{R}_A$  avrà componenti  $(R_A^x, R_A^y, 0)$ . Poiché in B c'è un carrello  $\mathbf{R}_B$  avrà componenti  $(0, R_B^y, 0)$ .



**Figura 3 - Scelta del istema di riferimento**

Proiettando le (2) sugli assi e ricordando come si calcolano le componenti di un prodotto vettoriale, si ha:

$$\begin{cases} R_x + R_A^x = 0 \\ R_y + R_A^y + R_B^y = 0 \\ M_z + x_B R_B^y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema scalare di tre equazioni in tre incognite. Possiamo pertanto dire che il problema del calcolo delle reazioni esterne è staticamente determinato e cioè la travatura in esame è esternamente isostatica.

Come mostra questo esempio, quando la travatura è vincolata all'esterno mediante un appoggio fisso ed un carrello, basta applicare lo schema della trave appoggiata per concludere che essa è esternamente isostatica. L'effettivo calcolo delle reazioni vincolari esterne va invece svolto caso per caso.

### 2.3 Calcolo delle reazioni interne ad una travatura

Come si è visto, il calcolo delle reazioni esterne  $R_A$  ed  $R_B$  va eseguito mediante le ECS applicate all'intera travatura. Nello studio della travatura in via preliminare occorre sempre risolvere il calcolo delle reazioni esterne secondo le modalità precisate. Ciò è importante anche perché quando si è accertata l'esterna isostaticità è possibile applicare il seguente **CRITERIO DI ISOSTATICITÀ INTERNA**:

*Una travatura che sia strettamente indeformabile ed esternamente isostatica è anche internamente isostatica e quindi isostatica nella sua globalità (globalmente isostatica).*

Con riferimento all'esempio della Capriata, si è visto che essa è esternamente isostatica. Poiché è anche evidente che è strettamente indeformabile, possiamo affermare – in base al criterio ora enunciato – che è internamente isostatica, cioè le reazioni interne si possono ricavare univocamente. Pertanto, solo dopo aver accertato anche l'interna isostaticità per mezzo del criterio citato o per mezzo di altri criteri, si può passare al calcolo effettivo delle reazioni interne. Tale calcolo – se la struttura è

soggetta a sollecitazione puramente nodale – può effettuarsi mediante due metodi: il *Metodo dei Nodi* (grafico) ed il *Metodo di Ritter* (analitico).

### 2.3.1 Osservazioni preliminari per l'applicazione del metodo dei nodi e del metodo di Ritter

Si supporrà sempre che le forze attive applicate alla travatura agiscano solo sui nodi e non sulle aste (in tal caso, l'asta si dice *scarica*). Questo fatto si può enunciare anche dicendo che *la sollecitazione attiva è puramente nodale*.

Conseguentemente, la generica asta della travatura che indicheremo con  $P_h P_k$  è soggetta unicamente alle reazioni che i due nodi estremi  $P_h$  e  $P_k$  esplicano su di essa. Indichiamo con  $\Phi_{hk}$  l'azione che l'asta  $P_h P_k$  esplica su nodo  $P_h$  e con  $\Phi_{kh}$  l'azione che l'asta  $P_h P_k$  esplica sul nodo  $P_k$ :

$$\Phi_{hk} : \text{asta } P_h P_k \rightarrow \text{nodo } P_h$$

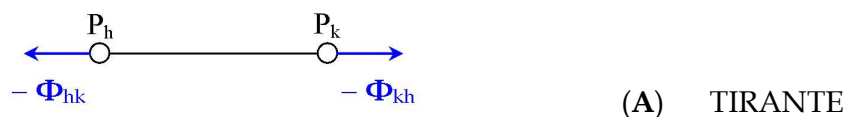
$$\Phi_{kh} : \text{asta } P_h P_k \rightarrow \text{nodo } P_k$$

È allora evidente che  $-\Phi_{hk}$  e  $-\Phi_{kh}$  saranno le azioni che i nodi  $P_h$  e  $P_k$  esplicano sull'asta  $P_h P_k$ , cioè:

$$-\Phi_{hk} : \text{nodo } P_h \rightarrow \text{asta } P_h P_k$$

$$-\Phi_{kh} : \text{nodo } P_k \rightarrow \text{asta } P_h P_k$$

Se l'intera travatura è in equilibrio devono essere in equilibrio tutti i suoi nodi e le sue aste, per cui l'asta  $P_h P_k$  sarà in equilibrio se le uniche due forze agenti su di essa ( $P_h, -\Phi_{hk}$ ) e ( $P_k, -\Phi_{kh}$ ) costituiscono una coppia di braccio nullo. Devono perciò essere disposte come segue:



Se accade (A) l'asta viene detta **TIRANTE**, se accade (B) l'asta viene detta **PUNTONE**.

Pertanto per l'equilibrio di un'asta scarica occorre e basta che le azioni esplicate dai due nodi estremi su di essa abbiano quale retta di applicazione quella dell'asta e costituiscano una coppia di braccio nullo. Se sono rivolte verso l'esterno l'asta è un tirante, se sono rivolte verso l'interno l'asta è un puntone.

E' importante osservare che questa suddivisione può farsi anche ricorrendo ai vettori  $\Phi_{hk}$  e  $\Phi_{kh}$  che rappresentano le azioni che l'asta  $P_h P_k$  esplica rispettivamente sui nodi  $P_h$  e  $P_k$ . In tal caso si avrà:



Dove, come evidenziato nella figura, in (C) l'asta è un tirante, in (D) è un puntone.

Come vedremo in seguito, molto utile per il calcolo delle reazioni interne è il seguente **PRINCIPIO DI SEZIONAMENTO**:

*Sia  $S$  una travatura in equilibrio e si denoti con  $\sigma$  una sezione praticata su  $S$  che la divida in due parti distinte  $S'$  e  $S''$ . Ciascuna delle due parti, ad esempio  $S'$ , dopo il*

*sezionamento continua a stare in equilibrio purché si intenda assoggettata oltre che alle forze esterne ad essa, anche alle forze che la parte S'' esercitava su di essa prima del taglio.*

### **2.3.2 Metodo dei nodi**

È un metodo grafico applicabile quando sono verificate le seguenti due condizioni:

- 1) *La sollecitazione attiva è puramente nodale.*
- 2) *E' possibile ordinare i nodi del sistema in successione crescente in modo che nel primo nodo concorrano al più due aste incognite e tale condizione sia sempre verificata nei nodi successivi.*

Tale metodo si basa sull'osservazione che per l'equilibrio di una travatura occorre e basta che stiano in equilibrio tutti i suoi nodi e tutte le sue aste.

- **Equilibrio del nodo:** Ciò implica che tutte le forze agenti sul nodo abbiano risultante nullo mentre il momento (rispetto al nodo) è sempre nullo poiché tutte le forze concorrono nel nodo stesso; dal punto di vista grafico ciò equivale ad imporre la chiusura del poligono delle forze agenti sul nodo.

- **Equilibrio dell'asta:** Poiché l'asta è scarica, le incognite reazioni che essa esplica sui nodi estremi devono avere la comune direzione dell'asta e costituire una coppia di braccio nullo.

Tale metodo risulterà chiaro dalla discussione del seguente esempio. Consideriamo la Capriata (*figura 4*) che abbiamo già visto nell'esempio del calcolo delle reazioni esterne.



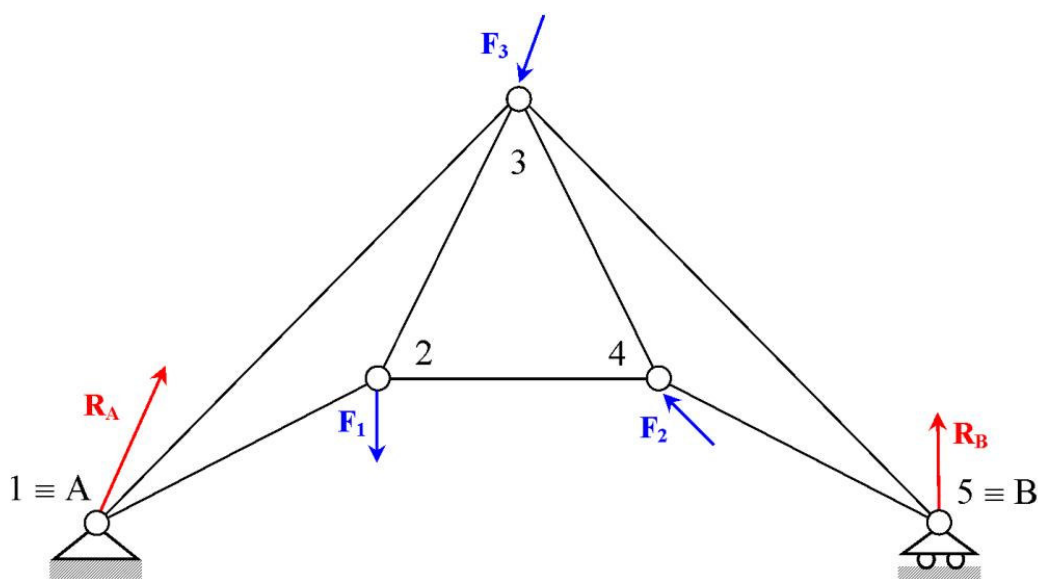


Figura 4 - Capriata semplice

Come si è già detto, in via preliminare occorre aver calcolato le due reazioni esterne. La  $\mathbf{R}_A$  ha direzione qualunque (in figura è ipotizzata una certa direzione), mentre  $\mathbf{R}_B$  è normale alla direzione di scorrimento del carrello. Tutte le forze attive agiscono solo sui nodi e quindi le aste sono scariche (sollecitazione puramente nodale). Pertanto la prima condizione è verificata. Analizziamo come si verifica la seconda condizione.

In figura sono già stati numerati i nodi in successione crescente da 1 a 5. È quasi superfluo osservare che “asta incognita” significa che di quella asta sono incognite le reazioni che essa esplica sui nodi estremi. Poiché inizialmente tutte le aste sono incognite, dobbiamo trovare un primo nodo nel quale concorrano al più due aste. Ciò si verifica in A (1) ed in B (5). Scegliamo, per esempio, il nodo A come nodo di partenza; in esso concorrono due aste incognite e agisce la forza nota  $\mathbf{R}_A$ . Supponiamo di aver risolto, nel modo che ora vedremo, il nodo A. In altre parole, supponiamo di aver calcolato le reazioni che le aste A2 e A3 esplicano su di esso. Se passiamo al nodo 3, vediamo che su di esso agisce la forza nota  $\mathbf{F}_3$  e concorrono le aste A3, 23, 43, B3. Di queste quattro aste solo la A3 è nota (perché calcolata quando abbiamo risolto il nodo A), mentre le rimanenti tre sono incognite. Invece, se passiamo al nodo 2 osserviamo che su di esso agisce la forza nota  $\mathbf{F}_2$  e concorrono le aste A2, 23, 24 di cui solo due (23 e 24) sono incognite. Quindi il nodo successivo al

nodo 1 deve essere necessariamente il nodo 2. Risolvendo il nodo 2, possiamo passare al nodo 3, perché ora ci sono solo due aste incognite, essendo le altre due note. Poi si passa al nodo 4 ed infine a 5.

Vediamo ora in dettaglio, come il metodo dei nodi ci consente di calcolare le reazioni interne.

Partiamo da  $A \equiv 1$ . Sul nodo A agiscono tre forze:  $\mathbf{R}_A$ ,  $\Phi_{A2}$  e  $\Phi_{A3}$  dove  $\mathbf{R}_A$  è nota mentre  $\Phi_{A2}$  e  $\Phi_{A3}$  sono incognite. Però osserviamo che  $\Phi_{A2}$  e  $\Phi_{A3}$  non sono del tutto incognite, in quanto sappiamo che  $\Phi_{A2}$  ha la direzione dell'asta A2 e  $\Phi_{A3}$  ha la direzione dell'asta A3. Inoltre per l'equilibrio del nodo deve risultare:

$$\mathbf{R}_A + \Phi_{A2} + \Phi_{A3} = 0$$

Possiamo quindi calcolare subito queste reazioni.

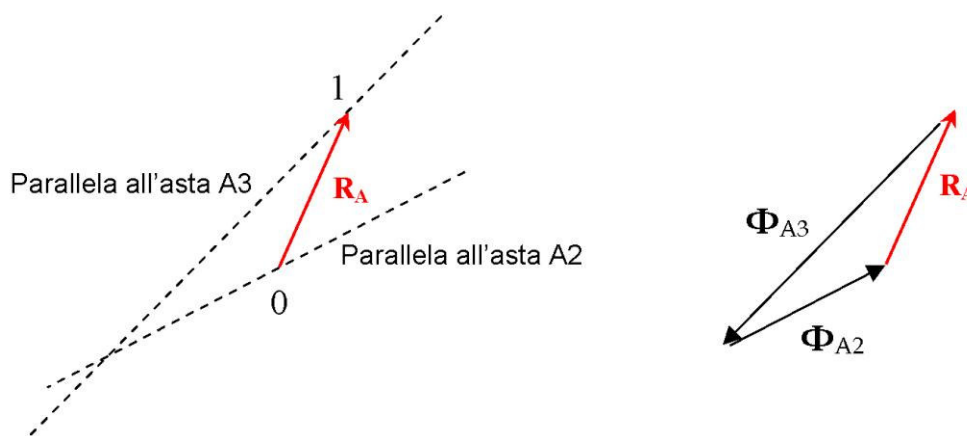


Figura 5

Riportiamo il segmento rappresentativo di  $\mathbf{R}_A$ , che in figura 5 è il vettore 1 - 0. Poi, da uno qualunque dei due estremi (0 oppure 1) si traccia la parallela ad una qualunque delle due aste che concorrono in A. Per esempio, da punto 0 tracciamo la parallela all'asta A2 e dall'altro estremo 1 la parallela all'asta A3. Il poligono costituito da  $\mathbf{R}_A$  e dalle due forze dirette lungo queste aste deve essere chiuso. Quindi le due forze che cerchiamo non possono che essere quelle disegnate in figura, in

quanto la soluzione è unica. Queste due reazioni  $\Phi_{A2}$  e  $\Phi_{A3}$  hanno le direzioni delle aste A2 e A3 rispettivamente, ed insieme a  $R_A$  hanno risultante nullo (poligono delle forze chiuso). Ricordando che  $\Phi_{A2}$  rappresenta l'azione che A2 esplica su A ed osservando che, applicata in A, è rivolta verso l'interno dell'asta, possiamo dire che l'asta A2 è un tirante. Analogamente, poiché  $\Phi_{A3}$ , applicata in A, è rivolta verso l'esterno dell'asta, abbiamo che l'asta A3 è un puntone.

Possiamo ora passare al nodo 2, perché in esso concorrono solo due aste incognite. Inoltre sul nodo 2 agiscono le seguenti forze:

$F_2$  (nota);  $\Phi_{2A} = -\Phi_{A2}$  (nota);  $\Phi_{24}$  incognita ma parallela all'asta 24;  $\Phi_{23}$  incognita ma parallela all'asta 23.

Tali forze devono avere risultante nullo, cioè:

$$F_2 + \Phi_{2A} + \Phi_{24} + \Phi_{23} = 0$$

Andiamo ora a tracciare il poligono di equilibrio del nodo 2 (*figura 6*). Sia 1-0 il segmento rappresentativo di  $F_2$ . Dal punto 1 si riporta l'altra forza nota che è la  $\Phi_{2A} = -\Phi_{A2}$  e si indichi con 2-1 il segmento rappresentativo di essa. Le altre forze da prendere in considerazione sono le reazioni incognite  $\Phi_{23}$  e  $\Phi_{24}$ , delle quali però, come al solito, conosciamo le direzioni che sono parallele a 23 e 24 rispettivamente. Pertanto per i punti 0 e 2 tracciamo le parallele alle due aste incognite nell'ordine che vogliamo. Per esempio, per il punto 0 tracciamo la parallela alla 24 e per il punto 2 la parallela alla 23. Poiché il poligono deve essere chiuso, le reazioni  $\Phi_{23}$  e  $\Phi_{24}$  devono essere necessariamente quelle disegnate in figura. Si osservi anche che la  $\Phi_{23}$  applicata nel nodo 2 è rivolta l'interno e quindi l'asta 23 è un tirante. Anche la  $\Phi_{24}$  è rivolta verso l'interno e pertanto l'asta 24 è anch'essa un tirante.

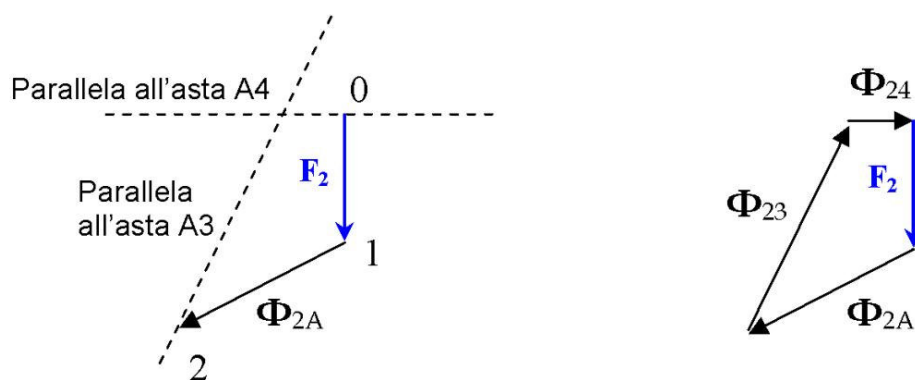


Figura 6

Si può adesso passare indifferentemente al nodo 3 o al nodo 4 poiché in ciascuno di essi concorrono solo due aste incognite.

Osserviamo che quando si arriva al nodo 5 tutte le forze sono già note. Infatti la  $\mathbf{R}_B$  è stata calcolata con le ECS e le reazioni  $\Phi_{53}$  e  $\Phi_{54}$  sono state calcolate quando si sono risolti i nodi 3 e 4. Pertanto quando riportiamo queste reazioni deve accadere che il poligono di equilibrio del nodo 5 deve essere chiuso. Se ciò non accade, vuol dire che è stato commesso un “errore grafico”. Da quanto detto segue che il poligono di equilibrio dell’ultimo nodo dà un metodo di verifica dell’eventuale errore grafico.

Osserviamo infine che, poiché la travatura è internamente isostatica, le reazioni ora calcolate con il metodo dei nodi costituiscono l’unica possibile soluzione del problema.

\* \* \* \* \*

Ci sono casi in cui il metodo dei nodi sembra non potersi applicare. Consideriamo una travatura del genere detta **TRAVE FINK** (figura 7).

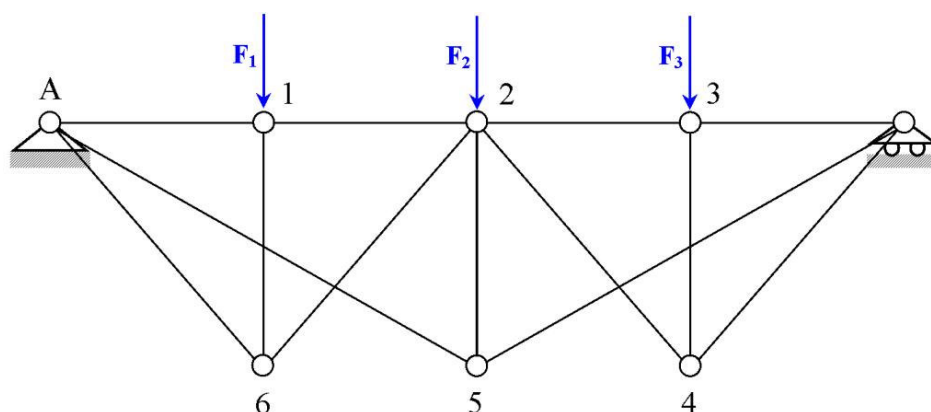


Figura 7 – Trave Fink

In questa travatura non c'è nessun nodo iniziale dove concorrono al più due aste incognite. Però, per il nodo 1 ed analogamente per il nodo 3 si può osservare quanto segue. Sul nodo 1 agisce la forza nota  $F_1$  e le reazioni incognite  $\Phi_{1A}$ ,  $\Phi_{12}$  e  $\Phi_{16}$  che sono parallele rispettivamente alle aste 1A, 12 e 16. Osserviamo anche che le aste 1A e 12 sono parallele. Come al solito, affinché il nodo 1 stia in equilibrio deve risultare:

$$F_1 + \Phi_{1A} + \Phi_{12} + \Phi_{16} = 0$$

Tracciamo il poligono del nodo 1 (figura 8).

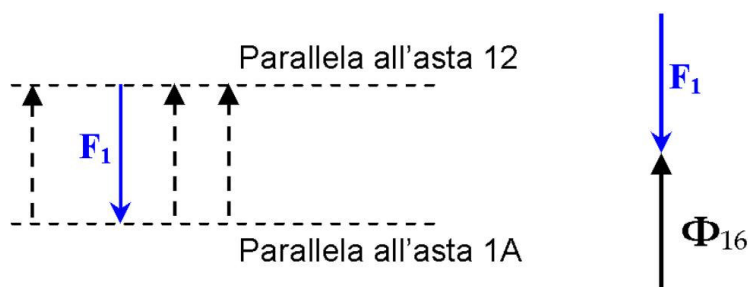


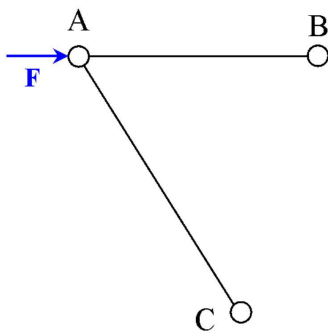
Figura 8

Riportiamo il segmento rappresentativo della forza nota  $F_1$  indicato in figura con 1-0. Dai punti 0 e 1 tracciamo le parallele alle aste 1A e 12. Non abbiamo più nessun altro punto dal quale tracciare la parallela all'asta 16. Però, il parallelismo delle aste 1A e 12 ci permette di affermare che per qualunque punto si traccia la parallela all'asta 16,

il modulo della  $\Phi_{16}$  è individuato, essendo tale modulo la lunghezza del segmento parallelo alla 16 compreso tra 1A e 12. In questo modo, non solo è individuato il modulo della  $\Phi_{16}$ , ma anche il verso che, ovviamente, deve essere opposto al verso della  $F_1$ . Quindi la  $\Phi_{16}$  è univocamente individuata, mentre, si badi bene, le  $\Phi_{1A}$  e  $\Phi_{12}$  restano indeterminate. L'aver determinato la  $\Phi_{16}$  e conseguentemente la  $\Phi_{61} = -\Phi_{16}$ , ci consente di applicare il metodo dei nodi al solito modo, considerando come nodo iniziale il nodo 6 nel quale ora concorrono solo due aste incognite. Dopo aver risolto il nodo 6 si può passare al nodo A, poi al nodo 5 e così via.

### Osservazione

Alcune volte può capitare una situazione come quella in *figura 9*, dove in un certo nodo A concorrono le aste AB e AC ed inoltre su A agisce una forza  $F$  parallela ad AB.



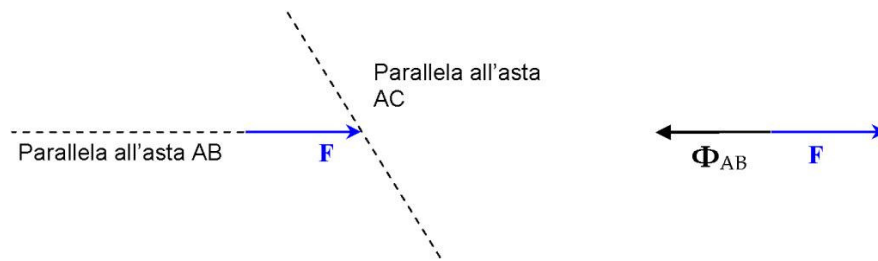
**Figura 9**

Analizziamo il nodo A. Esso sta in equilibrio sotto l'azione della forza  $F$ , della  $\Phi_{AB}$  (parallela ad AB e quindi ad  $F$ ) e della  $\Phi_{AC}$ . Naturalmente per l'equilibrio di A deve risultare:

$$F_1 + \Phi_{AB} + \Phi_{AC} = 0$$

Troviamo il poligono di equilibrio (*figura 10*). Consideriamo il segmento rappresentativo di  $F$ , indicato in figura con 1-0. Dal vertice 0 tracciamo la parallela all'asta AB (che ha la stessa direzione di  $F$ ) e dal vertice 1 tracciamo la parallela

all'asta AC. Evidentemente, l'unico modo per chiudere il poligono delle forze è che  $\Phi_{AB} = -F$  e  $\Phi_{AC} = 0$ .



**Figura 10**

Pertanto, quando c'è una situazione del genere si ha che la reazione dell'asta parallela alla forza è ad essa opposta e l'altra reazione è nulla cioè, in altri termini, la reazione bilancia la forza attiva.

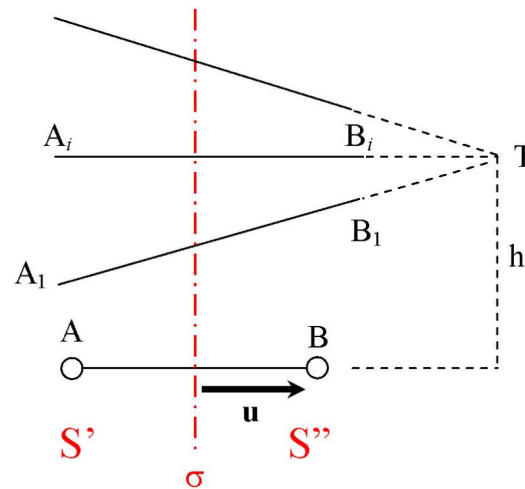
### 2.3.3 Metodo di Ritter

Diamo innanzitutto la seguente definizione:

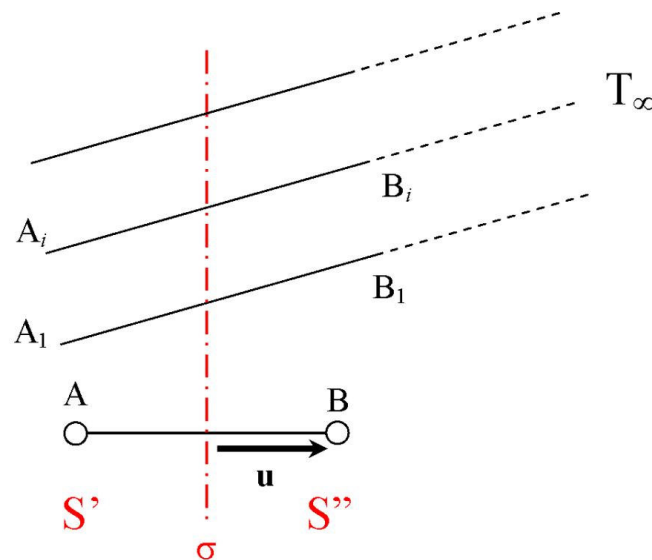
*Si dice sezione di Ritter coniugata ad un'asta AB, una sezione che divide la travatura S in due parti S' ed S'' e che taglia oltre l'asta AB in esame un qualunque altro numero di altre aste che siano tutte concorrenti in uno stesso punto T proprio o improprio non appartenente all'asta AB.*

Cominciamo preliminarmente ad osservare che bisogna analizzare separatamente il caso in cui il punto T è proprio ed il caso in cui T è improprio.

### T PUNTO PROPRIO



### T PUNTO IMPROPRIO



Quando esiste una sezione di Ritter coniugata ad un'asta  $AB$  è possibile calcolare la reazione lungo l'asta  $AB$  mediante le seguenti osservazioni.

Si consideri una qualunque parte di  $S$ ,  $S'$  oppure  $S''$  (di solito si sceglie quella parte soggetta ad un numero minore di forze) e si applichi ad essa il principio di sezionamento; se abbiamo scelto la parte  $S'$  possiamo affermare che essa dopo il taglio sarà ancora in equilibrio purché si intenda soggetta oltre che alle forze esterne ad  $S'$ , anche alle reazioni esplicate su  $S'$  da  $S''$  lungo le aste tagliate.



Denotiamo con  $\Sigma$  l'insieme di tutte le forze note esterne ad  $S'$  e siano  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{M}_o$  il risultante ed il momento risultante di  $\Sigma$ .

Le reazioni lungo le aste tagliate è il sistema di vettori:

$$\Sigma' \equiv \{(P, \Phi_{AB}), (P_i, \Phi_{A_i B_i})\}.$$

Poiché  $S'$  deve stare in equilibrio, per essa devono valere le ECS. Cioè:

$$\text{Equilibrio di } S' \rightarrow \begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0 \\ \mathbf{M}_o + \mathbf{M}'_o = 0 \end{cases}$$

dove con  $\mathbf{R}'$  ed  $\mathbf{M}'_o$  si è indicato il risultante ed il momento risultante di  $\Sigma'$ .

Con il metodo di Ritter è possibile calcolare la reazione incognita  $\Phi_{AB}$ . Per calcolare tale reazione basterà utilizzare la sola equazione dei momenti se il punto T è proprio, la sola equazione dei risultanti se il punto T è improprio.

Cominciamo ad analizzare il caso in cui T è un punto proprio.

### 1° CASO - T PUNTO PROPRIO

Applichiamo l'equazione dei momenti scegliendo quale polo  $O \equiv T$ . Cominciamo ad osservare che T appartiene al piano della travatura, tutte le forze sono parallele a tale piano e pertanto i momenti sono ortogonali al piano.

Proiettiamo la seconda equazione cardinale lungo la retta  $r$  normale al piano della travatura passante per T ed orientata in modo arbitrario. Avremo così l'equazione scalare:

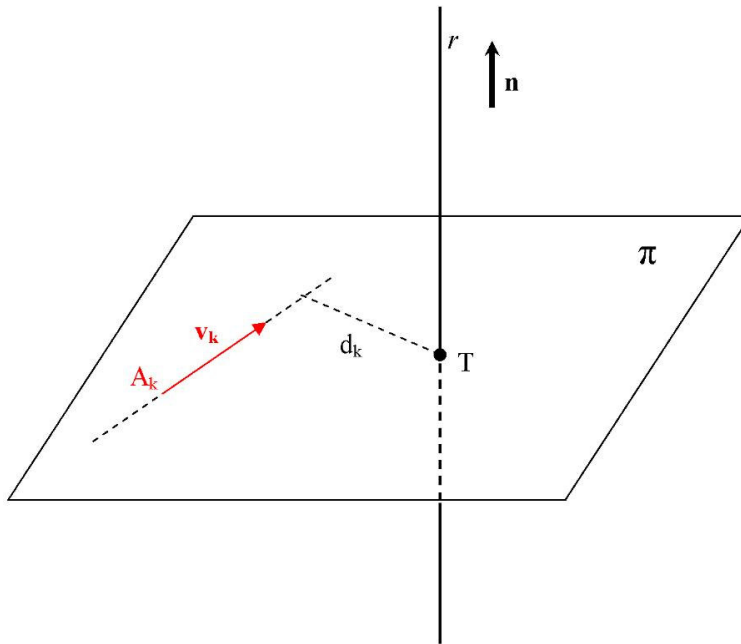
$$(a) \quad M_r + M'_r = 0$$

dove  $M_r$  ed  $M'_r$  sono i momenti assiali rispetto alla retta  $r$  rispettivamente di  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ . Tali momenti assiali possono essere considerati anche come *momenti scalari rispetto al polo T*.

\* \* \* \* \*

Prima di proseguire, definiamo cosa si intende per *momento scalare di un sistema di vettori piani rispetto ad un punto T complanare con essi*.

Dato un sistema di vettori applicati  $\{(A_k, \mathbf{v}_k)\}$  appartenenti al piano  $\pi$ , sia  $T$  un punto di  $\pi$  ed  $r$  la normale a  $\pi$  passante per  $T$  ed orientata in modo arbitrario (per esempio verso l'alto) ed indichiamo con  $\mathbf{n}$  il suo versore (*figura 11*).



**Figura 11**

Il momento polare  $\mathbf{M}_T$  è ovviamente un vettore normale a  $\pi$  e perciò parallelo ad  $\mathbf{n}$ . Pertanto esisterà uno scalare  $M_T$  tale che  $\mathbf{M}_T = M_T \mathbf{n}$ . Se moltiplichiamo questa eguaglianza scalarmente per  $\mathbf{n}$ , otteniamo:

$$M_r = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{n} = M_T n^2 = M_T$$

Pertanto questo scalare  $M_T$  che caratterizza  $\mathbf{M}_T$  risulta essere la componente del momento polare lungo la retta  $r$  normale al piano e passante per  $T$  e quindi coincide con il momento assiale  $M_r$ . Tale componente  $M_T$  si dirà *momento risultante scalare del sistema piano di vettori rispetto al polo  $T$  complanare con essi*.

In altri termini, il momento scalare  $M_T$  rispetto al polo  $T$  non è altro che il momento assiale rispetto alla retta  $r$  normale al piano in  $T$  ed orientata in modo arbitrario. Risulta pertanto ovvio che per calcolare il momento scalare rispetto a  $T$  si può utilizzare la regola di calcolo del momento assiale. In questo caso il generico vettore  $\mathbf{v}_k$  è ortogonale alla retta  $r$  e quindi si ha:

$$M_T^k = \pm d_k v_k$$

dove  $d_k$  è la distanza di  $T$  dalla retta di applicazione di  $\mathbf{v}_k$ . Va scelto inoltre il segno + o il segno – secondo che  $\mathbf{v}_k$  è levogiro o destrogiro rispetto ad  $r$ .

\* \* \* \* \*

Premesso ciò, si ha che l'equazione (a) può essere scritta:

$$M_T + M'_T = 0$$

dove  $M_T$  è il momento scalare rispetto a  $T$  delle forze esterne ad  $S'$  ed  $M'_T$  è il momento scalare rispetto a  $T$  delle incognite reazioni vincolari.

Indichiamo con  $\mathbf{u}$  il versore dell'asta  $AB$  che orienteremo sempre dalla parte  $S'$  presa in esame verso l'altra parte  $S''$ . Poiché  $\Phi_{AB}$  è parallelo ad  $\mathbf{u}$ , esisterà uno scalare  $N_{AB}$  tale che:

$$\Phi_{AB} = N_{AB} \mathbf{u}$$

Il numero reale  $N_{AB}$  si chiama *sforzo relativo all'asta  $AB$*  e caratterizza  $\Phi_{AB}$  perché, come è ovvio dall'eguaglianza scritta sopra, basta calcolare  $N_{AB}$  per conoscere la reazione  $\Phi_{AB}$ .

Quando  $N_{AB} > 0$ , il vettore  $(A, N_{AB} \mathbf{u})$  è rivolto verso l'interno dell'asta e quindi l'asta è un tirante.

Quando  $N_{AB} < 0$ , il vettore  $(A, N_{AB} \mathbf{u})$  è rivolto verso l'esterno dell'asta e quindi l'asta è un puntone.

Passiamo ora a risolvere l'equazione

$$(b) \quad M_T + M'_T = 0$$

In essa  $M_T$  è noto, mentre  $M'_T$  è il momento scalare rispetto a T di  $(P, \Phi_{AB})$  e di  $(P_i, \Phi_{A_i B_i})$  e quindi è incognito.

Poiché le aste diverse da AB concorrono tutte nel punto T, il momento di  $(P_i, \Phi_{A_i B_i})$  rispetto a T è nullo e pertanto  $M'_T$  si riduce al momento scalare rispetto a T della sola  $(P, \Phi_{AB})$ . Indicando con  $\text{mom}_T(\Phi_{AB})$  il momento scalare di  $\Phi_{AB}$  rispetto a T, la (b) diviene:

$$M_T + \text{mom}_T(\Phi_{AB}) = 0$$

Ma

$$\text{mom}_T(\Phi_{AB}) = \text{mom}_T(N_{AB} \mathbf{u}) = N_{AB} \text{mom}_T(\mathbf{u})$$

In definitiva si ha:

$$(c) \quad M_T \pm h N_{AB} = 0$$

dove  $h$  è la distanza di  $\mathbf{u}$  da T e quindi la distanza dell'asta AB dal punto T. Va inoltre scelto il segno + o il segno - secondo che il versore  $\mathbf{u}$  dell'asta AB è levogiro o destrogiro rispetto a T (cioè rispetto alla retta normale al piano in T ed orientata a piacere).

La (c) è una sola equazione scalare nell'unica incognita  $N_{AB}$ . Risolvendola si ricava  $N_{AB}$  e quindi la reazione lungo l'asta AB.

## 2° CASO - T PUNTO IMPROPRIO

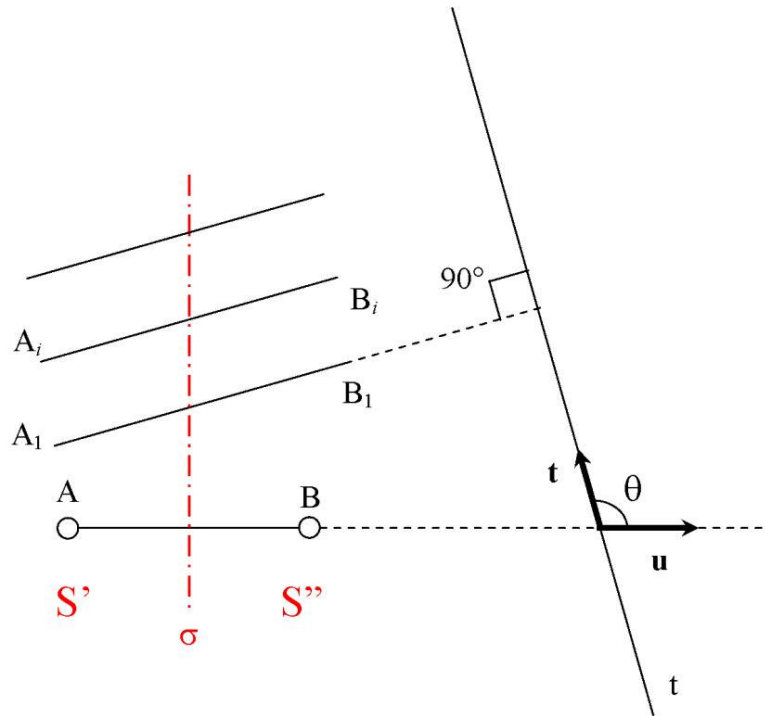


Figura 12

In questo caso va applicata l'equazione dei risultanti che andrà proiettata su una qualunque retta  $t$  perpendicolare alla direzione del punto improprio ed orientata a piacere.

L'equazione dei risultanti, nel nostro caso, si scriverà

$$\mathbf{R} + \Phi_{AB} + \sum_i \Phi_{A_i B_i} = 0$$

Proiettandola su  $t$ , si ha

$$(\mathbf{R})_t + (\Phi_{AB})_t + \left( \sum_i \Phi_{A_i B_i} \right)_t = 0$$

dove l'ultimo addendo è nullo essendo tutte le  $\Phi_{A_i B_i}$  ortogonali a  $\mathbf{t}$ .

D'altra parte  $(\Phi_{AB})_t = N_{AB} (\mathbf{u})_t = N_{AB} \cos\theta$ , avendo indicato con  $\theta$  l'angolo che  $\mathbf{u}$  forma con  $\mathbf{t}$ .

Quindi, in conclusione, si ottiene

$$R_t + N_{AB} \cos\theta = 0$$

che è un'equazione scalare nell'unica incognita  $N_{AB}$ . Risolvendola si calcola  $N_{AB}$  e quindi la reazione vincolare cercata.

Da osservare che il metodo di Ritter consente il calcolo diretto della reazione vincolare su un'asta prefissata senza dover valutare necessariamente tutte le altre reazioni come impone invece il metodo dei nodi.

## 2.4 Applicazioni

Consideriamo la travatura di *figura 13*, che prende il nome di TRAVE MOHNIÈ o DA PONTE, costituita da quadrati di lato  $h$ .

Questa travatura ha come vincoli esterni un appoggio fisso ed un carrello. Pertanto anche ad essa è applicabile lo schema della trave appoggiata che permette di concludere subito che la trave è esternamente isostatica. Inoltre, poiché è anche strettamente indeformabile, possiamo dire che è internamente isostatica e quindi globalmente isostatica.

Per il calcolo delle reazioni esterne si applicano le ECS e per quelle interne si può applicare sia il metodo dei nodi che il metodo di Ritter.

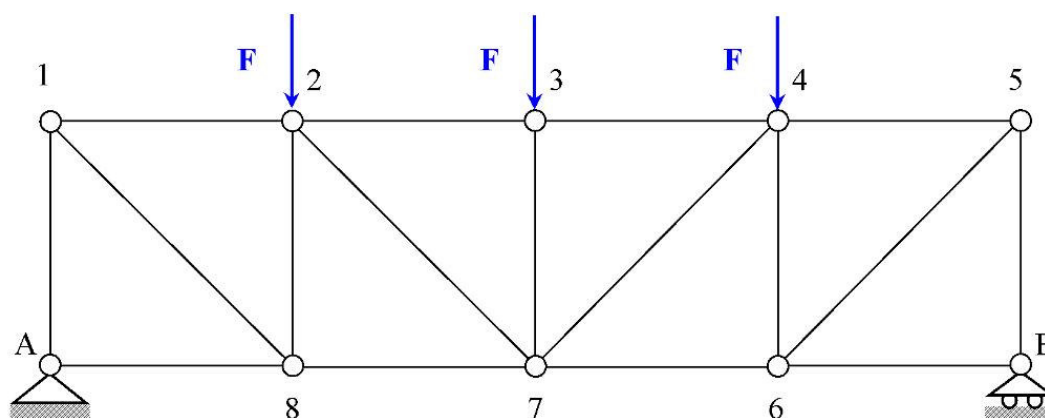


Figura 13 – Trave Mohniè (o da ponte)

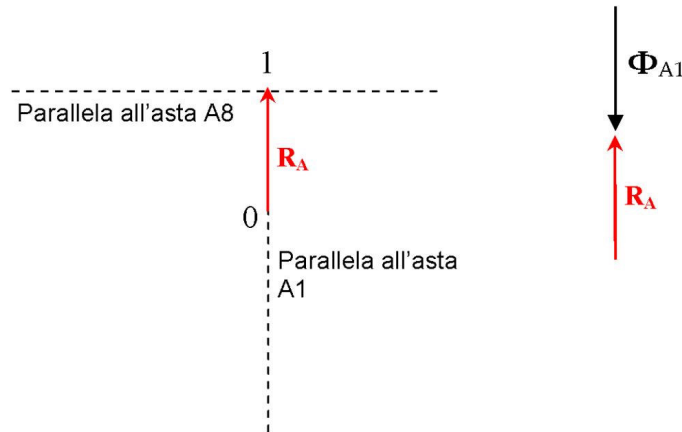
In questo caso la travatura presenta una simmetria rispetto alla retta verticale che passa per i nodi 3 e 7. Questa retta è di simmetria sia per la struttura geometrica che per l'azione delle forze esterne. Basta applicare le ECS all'intera struttura per verificare che la stessa simmetria deve sussistere anche per le incognite reazioni vincolari  $\mathbf{R}_A$  ed  $\mathbf{R}_B$ . Poiché  $\mathbf{R}_B$  deve essere normale alla direzione di scorrimento del carrello, anche  $\mathbf{R}_A$  dovrà risultare normale a tale direzione e, affinché ci sia simmetria, deve essere  $\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_B$ .

La prima equazione cardinale si riduce a:

$$3F + 2R_A = 0 \rightarrow R_A = R_B = -\frac{3}{2}F$$

Applichiamo il metodo dei nodi per calcolare le reazioni interne. Si può partire dal nodo A dove  $\mathbf{R}_A$  è nota,  $\Phi_{A1}$  è parallela all'asta A1 e  $\Phi_{A8}$  è parallela all'asta A8. Il risultante deve essere nullo cioè  $\mathbf{R}_A + \Phi_{A1} + \Phi_{A8} = 0$ .

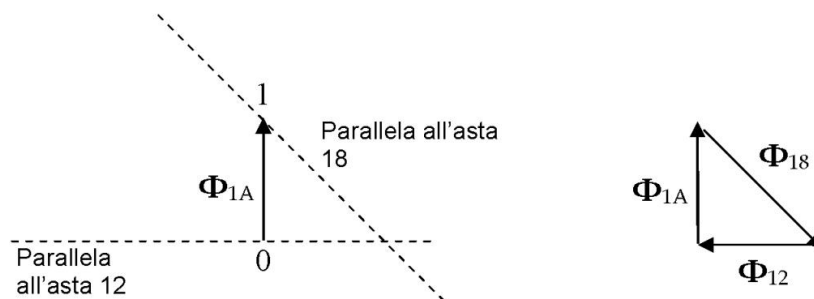
Costruiamo il poligono di equilibrio (figura 14). Riportiamo la forza nota  $\mathbf{R}_A$ , ottenendo i punti 0 e 1. Per il punto 0, ad esempio, tracciamo la parallela all'asta verticale A1 mentre per il punto 1 tracciamo la parallela all'asta A8. Questo poligono sarà chiuso se  $\Phi_{A1} = -\mathbf{R}_A$  e  $\Phi_{A8} = 0$ . Abbiamo così risolto il nodo A.



**Figura 14**

Si può ora passare al nodo 1. Nel nodo 1 agiscono le seguenti forze:  $\Phi_{1A} = -\Phi_{A1} = R_A$  nota,  $\Phi_{12}$  e  $\Phi_{18}$  incognite tranne che per la direzione. Dovrà essere  $\Phi_{1A} + \Phi_{12} + \Phi_{18} = 0$ .

Costruiamo il poligono di equilibrio (*figura 15*).



**Figura 15**

Riportiamo la forza nota  $\Phi_{1A} = R_A$ . Si ottengono così i due punti 0 e 1. Dal punto 0, ad esempio, tracciamo la parallela all'asta 12 e dal punto 1 la parallela all'asta 18. Per la chiusura del poligono le reazioni  $\Phi_{12}$  e  $\Phi_{18}$  devono necessariamente essere come disegnate in *figura 15*; l'asta 18 è un tirante mentre l'asta 12 è un puntone. Avendo risolto il nodo 1, si può passare al nodo 8, poi al nodo 2 e così via.

Vediamo ora di calcolare le reazioni interne con il metodo di Ritter. Calcoliamo per esempio lo sforzo relativo all'asta 87. Per prima cosa si deve trovare una sezione di



Ritter coniugata all'asta in esame. Tale sezione deve dividere la struttura in due parti e deve tagliare oltre l'asta 87, anche altre aste concorrenti in un punto proprio o improprio non appartenente a 87.

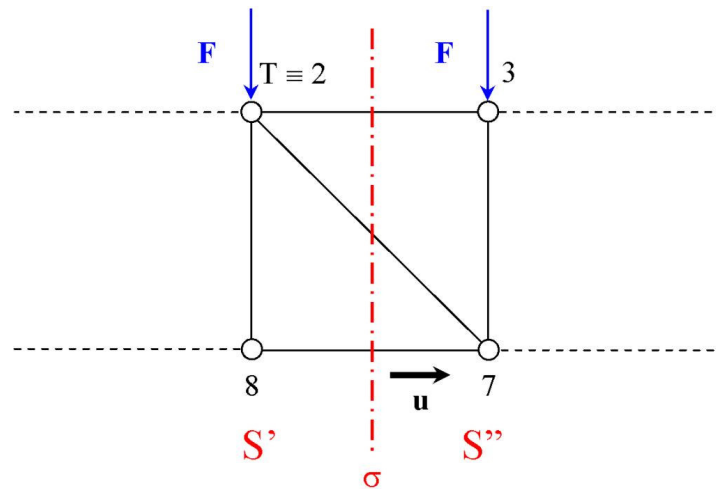


Figura 16

Se consideriamo la sezione  $\sigma$  come in figura 16, essa taglia oltre l'asta 87 anche le aste 27 e 23 che concorrono nel punto  $2 \equiv T$ . Poiché  $T$  è un punto proprio, si deve applicare l'equazione dei momenti. Scegliamo come parte da prendere in considerazione la parte  $S'$  a sinistra del taglio, poiché su  $S'$  agiscono due forze, mentre su  $S''$  ne agiscono tre. L'asta in esame va orientata da  $S'$  verso  $S''$  mediante il versore  $u$ . Calcoliamo il momento scalare di  $\Phi_{87} = N_{87} u$ .

Ricordando la regola di calcolo del momento scalare si vede subito che tale momento rispetto a  $T$  è dato da  $+h N_{87}$ , dove il segno  $+$  è dato dal fatto che il vettore  $u$  è levogiro rispetto a  $T$  (cioè rispetto alla retta ortogonale al piano, passante per  $T$  ed orientata verso l'alto). Quindi l'equazione dei momenti nel nostro caso diviene

$$M_T + hN_{87} = 0$$

$M_T$  è il momento scalare rispetto a  $T \equiv 2$  di  $(2, F)$  e di  $(A, \mathbf{R}_A)$ . Evidentemente il momento del primo vettore rispetto a  $T$  è nullo, mentre il momento del secondo è dato da  $-h R_A$ , essendo il vettore  $\mathbf{R}_A$  destro giro rispetto a  $T$ .

In definitiva si ha:

$$-hR_A + hN_{87} = 0 \rightarrow M_{87} = R_A = \frac{3}{2}F$$

Poiché  $N_{87} > 0$ , l'asta 87 è un tirante.

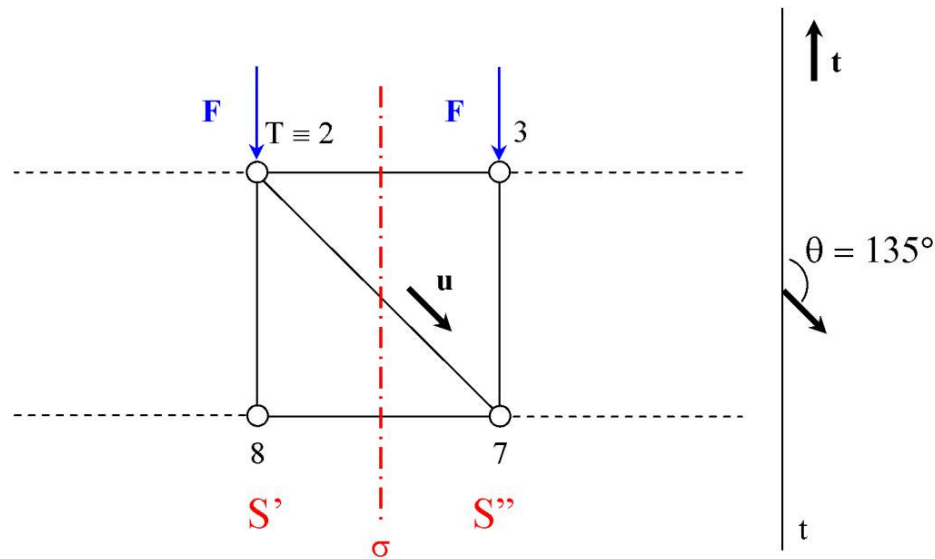


Figura 17

Calcoliamo ora lo sforzo lungo l'asta obliqua 27. Osserviamo che la precedente sezione  $\sigma$  è anche una sezione di Ritter coniugata all'asta 27. Infatti essa taglia oltre l'asta 27, anche le aste 23 e 87 tra loro parallele, ma non parallele a 27. In questo caso si deve utilizzare l'equazione dei risultanti. Anche qui conviene scegliere la parte  $S'$  a sinistra del taglio e pertanto l'asta 27 va orientata da  $S'$  verso  $S''$  mediante il versore  $\mathbf{u}$ .

Consideriamo ora una retta  $t$  normale al punto improprio (*figura 17*). Tale retta è verticale e va orientata per esempio verso l'alto, indicando con  $\mathbf{t}$  il suo versore. Da un punto qualsiasi di essa riportiamo il versore  $\mathbf{u}$  dell'asta 27 che forma con  $\mathbf{t}$  un angolo  $\theta = 135^\circ$ . Proiettando l'equazione dei risultanti su  $t$ , si ottiene:

$$(\mathbf{R}_A)_t + F_t + N_{27} \cos 135^\circ = 0$$

cioè:

$$R_A - F - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{27} = 0 \rightarrow \frac{3}{2} F - F - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{27} = 0 \rightarrow N_{27} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

Essendo  $N_{27} > 0$ , l'asta in esame è un tirante.

\* \* \* \* \*

Consideriamo ora la travatura di *figura 18* che prende il nome di **PILONE RETTANGOLARE**, le cui aste orizzontali e verticali abbiano uguale lunghezza  $h$ .

Questa travatura presenta delle differenze rispetto alle travature precedentemente considerate: è soggetta a due appoggi fissi. Inoltre è una struttura deformabile ma non labile. È deformabile perché, eliminando i vincoli in A ed in B, la struttura non è un corpo rigido potendo l'asta 5A ruotare intorno a 5. Essa però è non labile perché è vincolata all'esterno mediante due appoggi fissi. Per verificarne l'isostaticità, mancando la stretta indeformabilità, non è possibile utilizzare il criterio usato finora. Possiamo però usare il seguente altro criterio di isostaticità:

*Sia S una struttura isostatica, non labile, strettamente indeformabile, vincolata all'esterno mediante un appoggio fisso ed un carrello. Si sottoponga S alle seguenti due operazioni:*

a) *Eliminazione di un'asta.*

b) *Sostituzione del carrello con un appoggio fisso.*

*Si ottiene così una seconda struttura  $S^*$  che può essere labile o non labile. Se  $S^*$  è non labile, essa è isostatica come  $S$*

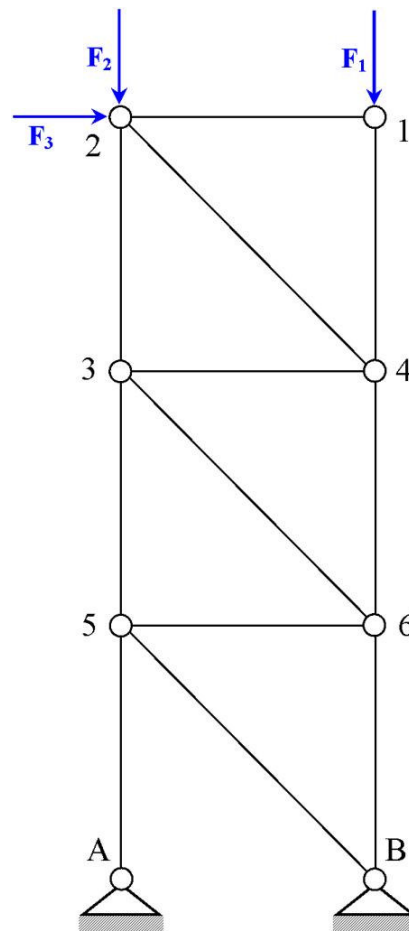


Figura 18

Applicando tale criterio è facile verificare che il pilone rettangolare è isostatico. Basta infatti assumere come  $S^*$  il pilone in esame e come  $S$  lo stesso pilone che però differisca da  $S^*$  per l'aggiunta dell'asta AB e per la sostituzione dell'appoggio fisso in B con un carrello.

Osserviamo anche che, pur avendo due appoggi fissi, la travatura in esame è esternamente isostatica. Per provarlo basta fare questa considerazione. Il nodo A è

soggetto all'incognita reazione vincolare  $\mathbf{R}_A$  e alla reazione  $\Phi_{A5}$  parallela all'asta A5. Per l'equilibrio di A deve essere  $\mathbf{R}_A + \Phi_{A5} = \mathbf{0}$  da cui segue che anche  $\mathbf{R}_A$  è parallela all'asta A5 e pertanto per individuarla basta conoscere solo la componente lungo l'asse y (verticale e passante per A). Quindi nel sistema scalare delle ECS abbiamo tre incognite (la componente lungo y per la  $\mathbf{R}_A$  e le componenti lungo x ed y per la  $\mathbf{R}_B$ ): il sistema è pertanto esternamente isostatico.

Applichiamo il metodo dei nodi. Si potrebbe, ad esempio, partire dal nodo A, ma occorre calcolare le reazioni esterne. Volendo evitare tale calcolo si può partire dal nodo 1. Nel nodo 1 agiscono la forza  $\mathbf{F}_1$ , la  $\Phi_{14}$  e la  $\Phi_{12}$ .

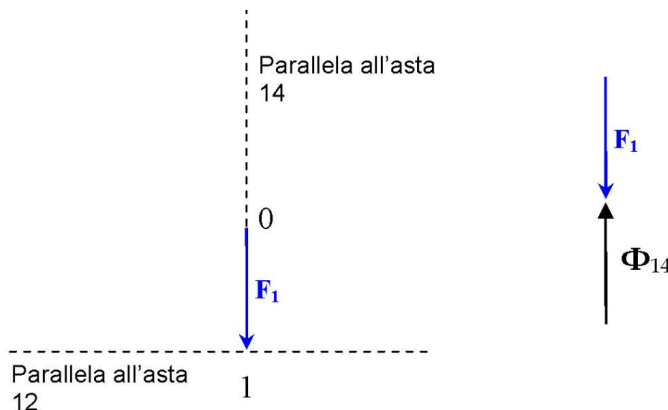
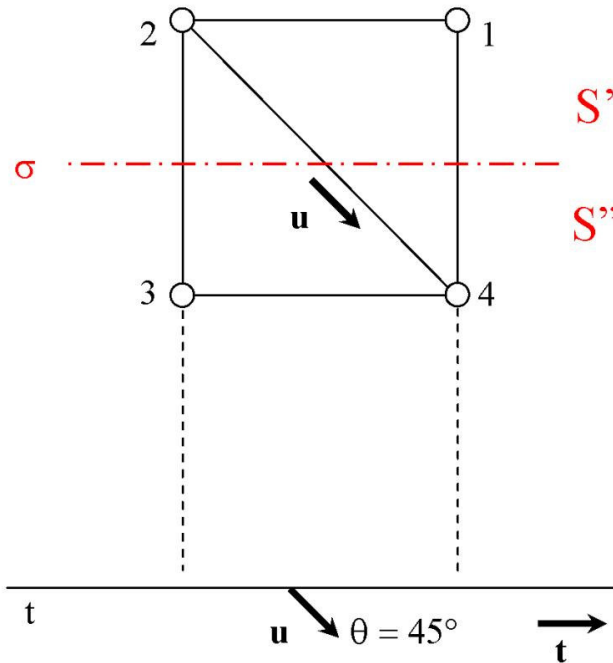


Figura 19

Dal punto 0 tracciamo la parallela all'asta verticale 14 e per il punto 1 la parallela all'asta 12. Con le solite considerazioni, possiamo affermare che  $\Phi_{14} = -F_1$  e  $\Phi_{12} = 0$ .

Si può poi passare al nodo 2, al 4, al 3 e così via...

Con il metodo di Ritter calcoliamo lo sforzo relativo all'asta obliqua 24.



**Figura 20**

La sezione  $\sigma$  in *figura 20* è una sezione di Ritter per l'asta 24 perché taglia anche le aste 23 e 14 parallele. Dobbiamo utilizzare l'equazione dei risultanti dopo aver introdotto la retta  $t$  normale al punto improprio. Conviene scegliere come parte  $S'$  in esame quella al di sopra del taglio, se si vuole evitare di calcolare le reazioni esterne. L'asta 24, come al solito, va orientata da  $S'$  verso  $S''$  mediante il versore  $\mathbf{u}$ . Poiché l'angolo  $\theta = 45^\circ$  si avrà:

$$R_t + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{24} = 0$$

$R_t = F_3$  in quanto  $\mathbf{F}_1$  ed  $\mathbf{F}_2$  hanno componenti nulle lungo  $t$ . Da cui:

$$F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{24} = 0 \rightarrow N_{24} = -\sqrt{2} F_3 < 0$$

e quindi l'asta 24 è un puntone.

Calcoliamo infine lo sforzo relativo all'asta verticale 35.

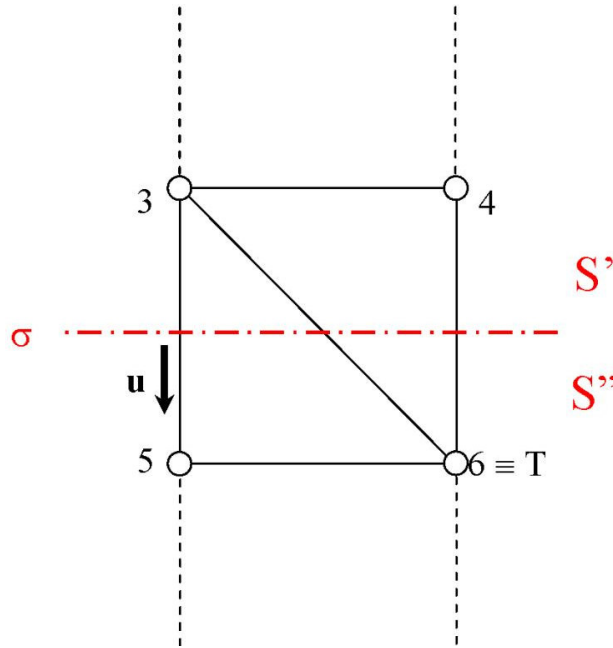


Figura 21

La sezione  $\sigma$  disegnata in *figura 21* è una sezione di Ritter coniugata all'asta 35 perché divide la struttura in due parti  $S'$  ed  $S''$  tagliando, oltre l'asta in esame, le aste 36 e 46 che concorrono nel punto proprio  $T \equiv 6$ . Anche in questo caso, per non calcolare le reazioni esterne, conviene scegliere come parte  $S'$  da considerare quella al di sopra del taglio. Orientiamo l'asta 35 da  $S'$  verso  $S''$  mediante il versore  $\mathbf{u}$ .

Poiché  $T$  è un punto proprio dobbiamo applicare l'equazione (b) dei momenti, dove  $M_T$  è il momento scalare di  $(1, F_1)$ ,  $(2, F_2)$  e  $(2, F_3)$  rispetto a  $T$ , mentre  $M'_T$  è il momento scalare rispetto a  $T$  di  $N_{35} \mathbf{u}$ .

Applicando la solita regola di calcolo, risulta:  $M_T = hF_2 - 2hF_3$ ;  $M'_T = hN_{35}$ . Pertanto l'equazione (b) diviene:

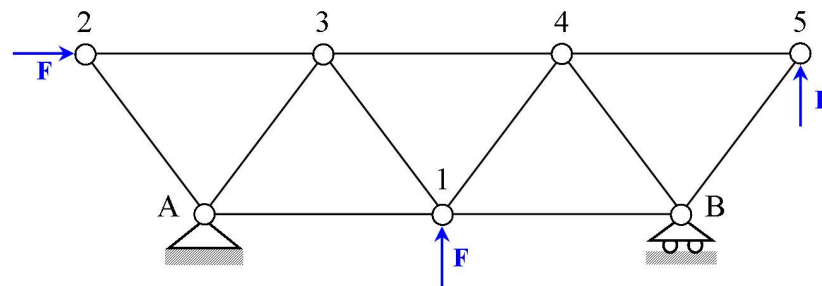
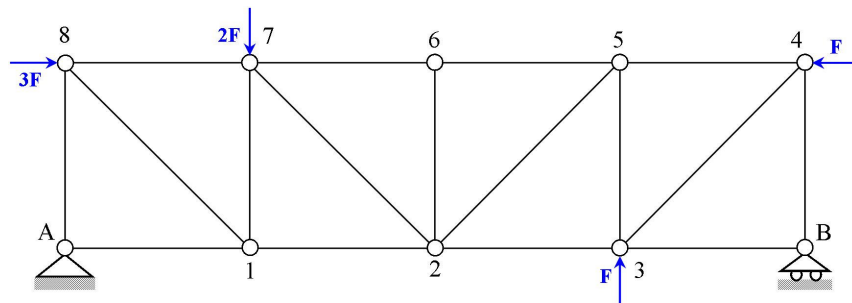
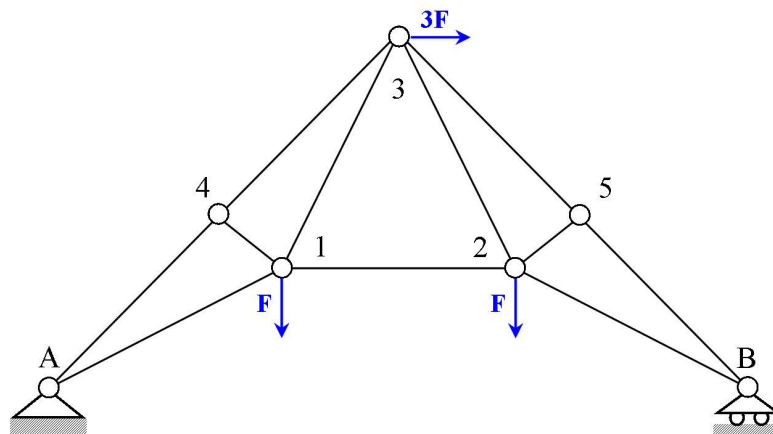
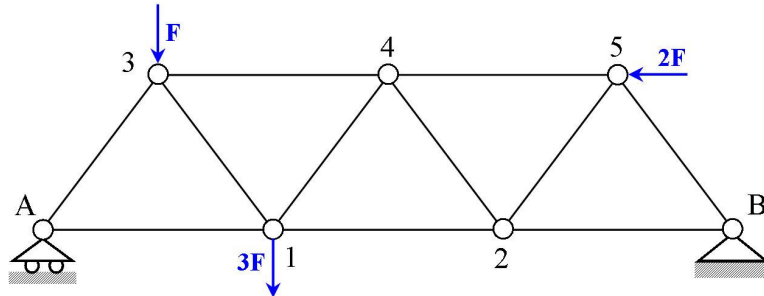
$$hF_2 - 2hF_3 + hN_{35} = 0 \rightarrow N_{35} = 2F_3 - F_2$$

L'asta è un tirante o un puntone secondo che  $F_3$  è maggiore o minore di  $\frac{F_2}{2}$ .

■

## ESERCIZI PROPOSTI

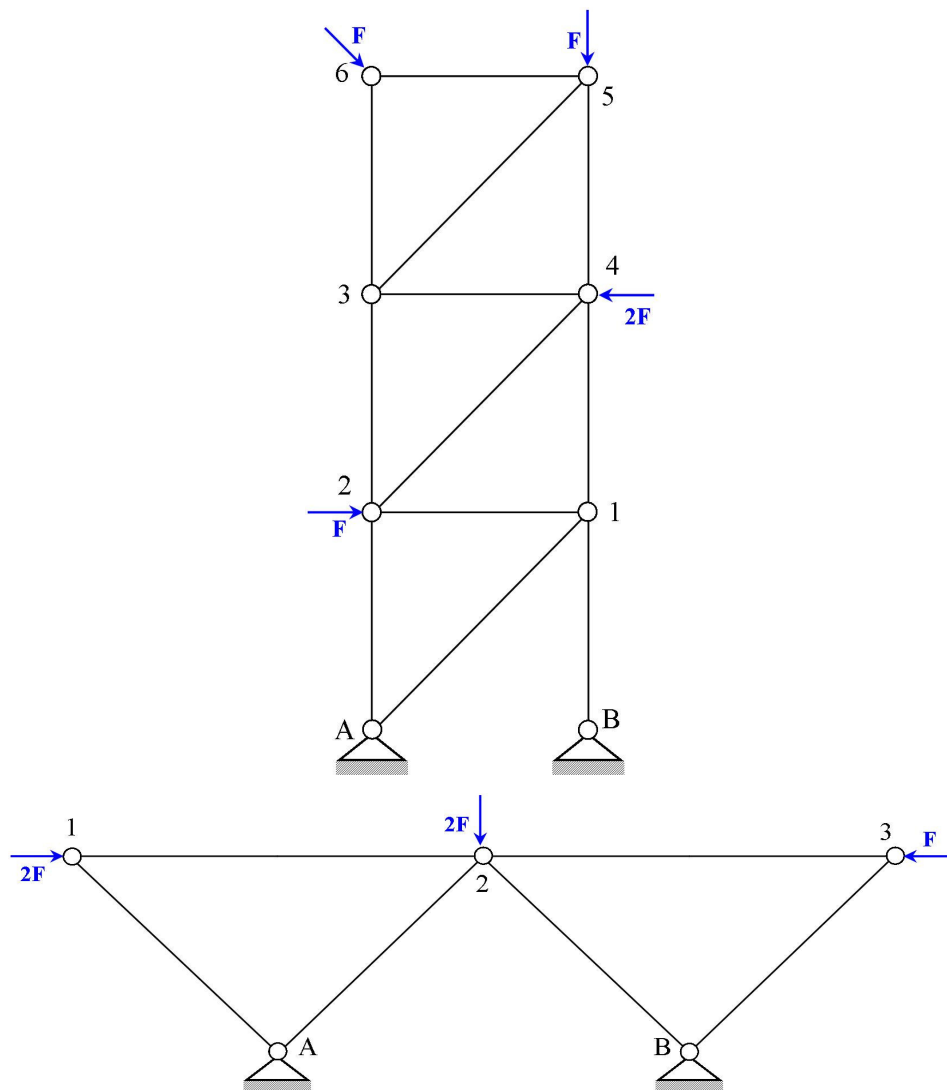
Assegnate le seguenti travature reticolari:



calcolare le reazioni vincolari esterne con le Equazioni Cardinali della Statica e gli sforzi interni con il Metodo dei Nodi ed il Metodo di Ritter.



Assegnate le seguenti travature reticolari:



calcolare gli sforzi interni con il Metodo dei Nodi ed il Metodo di Ritter.