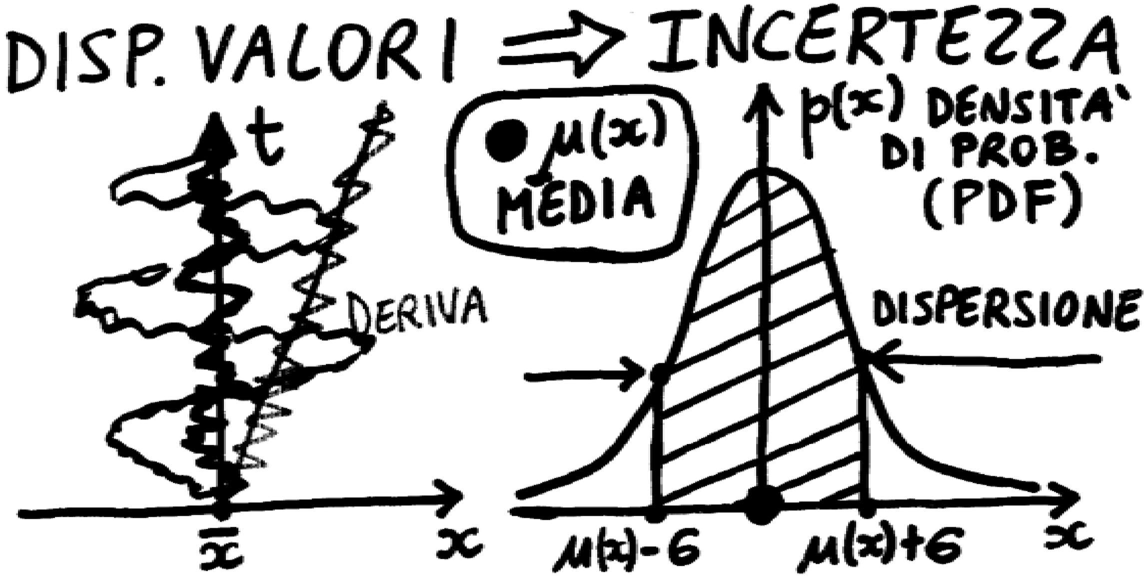
INCERTEZZA

DI

MISURA

Variabilità delle misure

<u>Misure ripetute dello stesso parametro fisico non forniscono lo stesso valore</u>



tendenza centrale ($\overline{x}$ o μ) e dispersione (σ)

L'incertezza di misura è la dispersione dei <u>valori "attribuibili" al misurando</u>

Approccio statistico

Le misure sono sempre affette da “fluttuazioni” o errori (almeno potenziali), mai perfettamente conoscibili, che si traducono in una naturale “indeterminazione” o **INCERTEZZA sul risultato di misura**

Occorre lasciare un approccio deterministico (si vorrebbero <u>conoscere le fluttuazioni</u>)

in favore di un **approccio statistico** grazie al quale **<u>è possibile</u> <u>stimare le fluttuazioni</u>**

Incertezza di misura

La variabilità del risultato di una misura è analizzata grazie ai metodi consolidati della statistica (varianza e deviazione standard)

il risultato di misura dunque non è mai un unico numero "deterministico" ma un **intervallo di valori possibili** entro il quale il misurando può trovarsi con una data probabilità

La **semiampiezza di un particolare intervallo** di valori (l'intervallo a ±1 deviazione standard dal valore centrale) è l'**incertezza di misura**

Teoria degli errori

La **teoria degli errori di misura** prevedeva che un misurando non potesse mai essere perfettamente conosciuto a causa degli inevitabili errori di misura (intrinseci in ogni metodo o strumento utilizzato per la misurazione)

NON CONOSCIBILE

<u>Errore = Valore Misurato – Valore Vero</u>

(concetto astratto)

INDETERMINATO!!!

VALORE NOTO

Tipi di errori

Errori sistematici: si presentano nella stessa entità ogni volta che si ripete la misura (*offset* o polarizzazione)

esempio: ogni volta che un peso di massa m viene posto su una bilancia digitale questa legge "sistematicamente" 100 g in più (*offset*) rispetto al valore m

Errori accidentali: si presentano in maniera diversa e "impredicibile" ogni volta che si ripete la misura (fluttuazione casuale)

esempio: ogni volta che il peso di prima è posto sulla bilancia, il visualizzatore digitale mostra un valore diverso ($m + 100\ \mathrm{g} + \varepsilon_i$), ad esempio a causa del rumore elettronico sulla tensione di lettura inviata al *display*

Problematiche

Errori sistematici ed errori accidentali non sono della stessa natura:

- i primi sono <u>componenti deterministiche</u> (e pertanto conoscibili e anche eliminabili)
- i secondi sono <u>componenti aleatorie</u> (stimabili in senso statistico e talora riducibili ma mai eliminabili del tutto)

Questi due tipi di errori non possono essere combinati/sommati in maniera corretta
(si sommano solo le grandezze omogenee ma anche "logicamente" dello stesso tipo)

<u>es.</u>: lunghezza automobile ; calibro fucile ; profondità piscina

Errori → Incertezza

Date le incongruenze logiche della teoria degli errori, a fine anni '70 il CIPM incaricò un Gruppo di Lavoro di definire procedure unificate per l'espressione dell'incertezza di misura

Una corretta analisi statistica della variabilità di una misura consente di risolvere in maniera soddisfacente il problema di esprimere l'**incertezza standard di misura**
(parametro, valutato secondo procedure convenzionali, che esprime il nostro grado di non conoscenza del misurando)

2 categorie di stima dell'incertezza

A - stimata con metodi statistici (su un insieme, o campione, di misure ripetute)

B - stimata in altro modo (*e.g*. conoscenze a priori o proprietà dello strumento)

Richiami di probabilità

$p \in [\,0 \text{ e } 1\,]$ (evento impossibile e evento certo)

X variabile casuale (VC) con valori $x \in \{\Re\}$

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$ PROBABILITA'

$p(x)$ funzione densità di probabilità (PDF)

La PDF descrive il processo casuale considerato assegnando la probabilità per i possibili valori d'uscita. Per una VC continua la "probabilità puntuale" è nulla mentre può non essere nulla la **probabilità di cadere in un intervallo di valori**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$ normalizzazione della PDF

Richiami di statistica

Per X VC reale (possibili valori della misura) esistono degli stimatori che ci consentono di conoscere, in senso statistico, alcuni parametri caratteristici del processo casuale. In particolare MEDIA e VARIANZA permettono di stimare la tendenza centrale e la dispersione dei valori x associabili a X

MEDIA

$$\mu(x) = \mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}x$$

VARIANZA

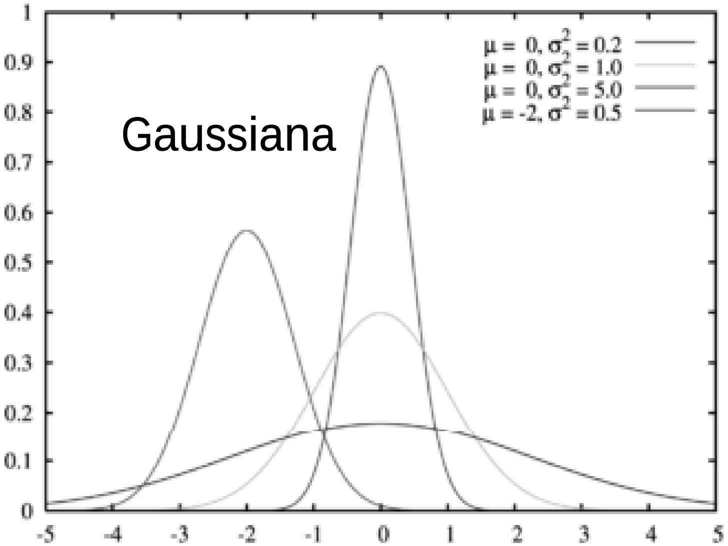
$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 = E\left\{\left[x - \mu_x\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - \mu_x\right]^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

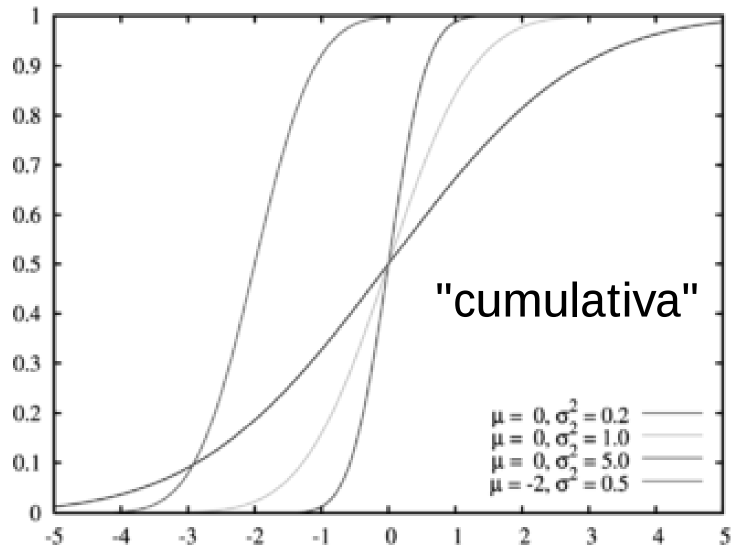
$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$ **DEVIAZIONE STANDARD**

PDF normale o gaussiana

E′ la PDF "più comune" per la descrizione della media di fenomeni casuali quali le misure (per il teorema del limite centrale la media di una VC tende ad avere una PDF gaussiana in una "approssimazione dei grandi numeri "):

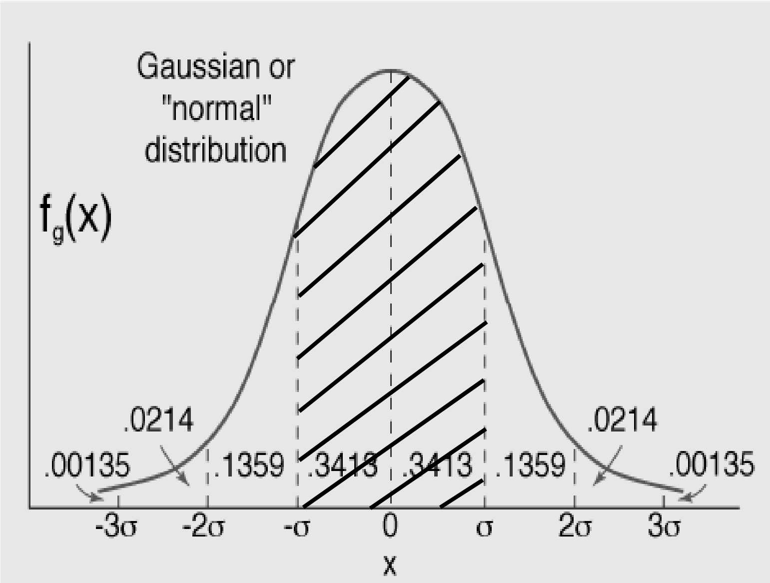
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2} \right\}$$





Probabilità di "cadere" in un intervallo

Integrando la PDF gaussiana tra due valori sull'asse reale si trova la **probabilità** che il risultato (misura) "cada" (sia) nell'intervallo compreso tra i due valori considerati



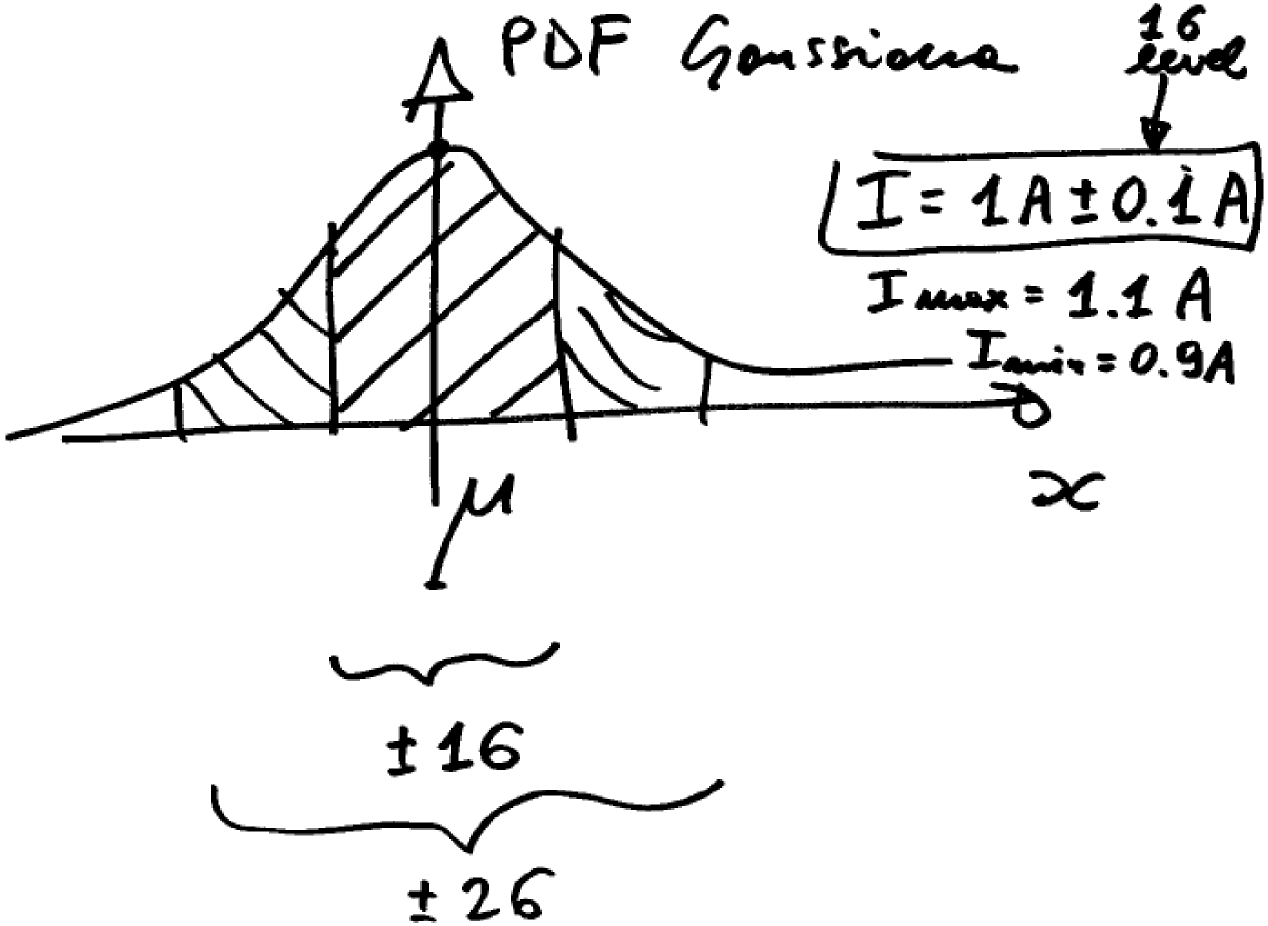
Le AREE sottese dalla curva PDF sono le probabilità di avere valori (misure) in un dato intervallo sull'asse reale

Lontano dalla media μ, rispetto alla larghezza σ, la PDF diviene molto bassa e dunque le aree sottese molto piccole (misure improbabili)

$$\text{Livelli di confidenza} \begin{cases} 1\sigma \quad 68.27\% \cong 68.3\% \ \sim 68\% \\ 2\sigma \quad 95.45\% \cong 95.5\% \ \sim 95\% \\ 3\sigma \quad 99.73\% \cong 99.7\% \end{cases}$$

$$e.g.\ P\ [\ (\mu_x - \sigma_x) \leq x \leq (\mu_x + \sigma_x)\ ] \cong 68.3\%$$

Esempio di PDF gaussiana



misura di corrente (di valore nominale 1 A e incertezza 0.1 A)

Incertezza standard

Per qualsiasi misura si definisce:

incertezza standard o scarto tipo, con simbolo "*u*" dall'inglese *uncertainty*, una stima della deviazione standard σ, radice quadrata della varianza σ^2, prevista per il valore di misura

A seconda del metodo impiegato per la stima di $u(\cdot)$ classificheremo questa incertezza come di categoria A o B

Media campionaria

Variabile X [misurando] nota attraverso n determinazioni [misure] x_k (k=1,2,…,n) ottenute <u>in condizioni di ripetibilità</u>:

STIMA del valor medio della (intera) popolazione, $\mu(x)$, attraverso lo stimatore

MEDIA CAMPIONARIA

$$\overline{x} = \overline{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\mu(x) = \mu_x \overset{\Delta}{=} E[x] \overset{S}{=} \overline{x} = \overline{x}_k$$

$\overset{S}{=}$ uguale nel senso della Stima

Dimostrazione

Dim.

$$\boxed{E\left\{\overline{x}\right\}} = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left\{x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left\{x\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(x) =$$

$$= \frac{1}{n} n\mu(x) = \boxed{\mu(x)}$$

Dispersione della media

Per misure ripetute di una grandezza X la miglior stima del valore di misura x coincide con il valor medio delle misure ripetute:

$$x = \overline{x} = \overline{x}_k \quad \text{VALORE DI MISURA}$$

Per determinare la dispersione (incertezza) sul valore di misura dovremo valutare la dispersione, almeno potenziale, della variabile casuale $\overline{x}$ ("valore di misura"). Dunque cercheremo $\sigma(\overline{x})$ che, come vedremo, risulta funzione di $\sigma(x)$ e del numero n di misure ripetute

Varianza campionaria

STIMA della varianza della (intera) popolazione, $\sigma^2(x)$, attraverso lo stimatore

VARIANZA CAMPIONARIA

$$s^2(x) = s^2(x_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 \overset{\Delta}{=} E\left[(x-\mu)^2\right] \overset{\mathrm{S}}{=} s^2(x) = s^2(x_k)$$

inoltre: $s^2(x) = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\overline{x}^2\right]$

Gradi di libertà della stima

Nella varianza campionaria, il denominatore
$\nu = n$-1 è il numero di gradi di libertà

Vediamo 3 validi motivi per cui è opportuno dividere la somma degli n scarti quadratici, che compare nell'espressione della varianza campionaria, per n-1 e non per n

1) Non ha alcun senso calcolare la varianza per un campione che contenga un solo dato (n=1). In tale caso, dividendo per n-1, otteniamo come $s^2(x)$ una forma indefinita del tipo 0/0

2) Nella formula di $s^2(x)$ calcoliamo di fatto gli scarti quadratici dalla media campionaria, $\bar{x}$ (nota), e non dalla media della popolazione, μ_x: dunque degli n scarti sommati solamente n-1 sono tra loro indipendenti

3) Si dimostra che il valore atteso della varianza campionaria, con l'n-1 al denominatore, è la varianza della popolazione:

$$E\{\ s^2(x)\ \} = \sigma^2(\mathrm{x})$$

Dimostrazione

DIM: $\boxed{E\left\{s^2(x)\right\}} = \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - 2\bar{x}\sum_k x_k + n\bar{x}^2\right\} =$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{2}{n}\sum_k x_k \sum_k x_k + n\left(\frac{1}{n}\sum_k x_k\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{1}{n}\sum_k x_k \sum_k x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{1}{n}\sum_k x_k^2 - \frac{1}{n}\sum_{k\neq j} x_k x_j\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_k E\left\{x_k^2\right\} - \frac{1}{n}\sum_{k\neq j} E\left\{x_k\right\}E\left\{x_j\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)n\left[\mu^2(x)+\sigma^2(x)\right] - \frac{n(n-1)}{n}\mu^2(x)\right] =$$

$$= \mu^2(x)+\sigma^2(x)-\mu^2(x) = \boxed{\sigma^2(x)}$$

$\boxed{E\{x_k x_j\}=E\{x_k\}E\{x_j\}}$ se x_k e x_j sono statisticamente indipendenti

$\boxed{x_k = \mu_x + (x_k - \mu_x)}$

$\boxed{E(x^2) = \mu_x^2 + \sigma_x^2}$

Incertezza di cat. A (1/2)

Per determinare l'incertezza sul valore di misura valutiamo la deviazione standard della variabile casuale $\bar{x}$

$\bar{x}$ è, almeno potenzialmente, una variabile casuale in quanto il suo valore specifico dipende dal particolare campione di dati considerato. Se disponessimo di *m* diversi insiemi di *n* misure ripetute e per ciascuno calcolassimo la $\bar{x}$ corrispondente, otterremo *m* valori di $\bar{x}$ differenti tra loro, la cui varianza è:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_k x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_k \sigma^2(x_k) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{n}$$

La miglior stima di $\sigma^2(\bar{x})$ si ottiene quindi come:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n} \overset{S}{=} \frac{s^2(x)}{n} \quad \text{e} \quad \sigma(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

Incertezza di cat. A (2/2)

Si definisce **incertezza di categoria A** la dispersione del valor medio delle misure ripetute, calcolabile come

$$u_{\mathrm{A}}(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}$$

Nel caso di incertezza solo di categoria A, il risultato di misura è allora $x = \bar{x} \pm s(x)/\sqrt{n}$ con una qualità della misura che migliora (l'incertezza diminuisce) al crescere di n

Incertezza relativa

Parleremo di **incertezza relativa** quando normalizziamo il valore di incertezza tipo al valore di misura

$$u_{\mathrm{r}}(y) = \frac{u(y)}{\overline{y}} \qquad [1] \text{ numero puro!}$$

Incertezze relative anche di grandezze diverse (non omogenee) possono essere confrontate direttamente fra loro.

L'inc. rel. indica, indipendentemente dal valore e tipo del misurando, il grado di conoscenza che abbiamo raggiunto sul valore di misura

Incertezza estesa

Quando si vuole definire un intervallo di valori, attorno al valore di misura $y = \overline{y}$, "all'interno del quale si ritiene che il misurando debba cadere con un certo livello di confidenza (probabilità *P*)", si utilizza l'**incertezza estesa**

$$U(y) = k\, u(y)$$

k fattore di copertura

valori tipici *k* = 1; 2; 3 (68%; 95%; 99.7%)

Cifre significative per l'incertezza

L'incertezza si esprime con una o al più due cifre significative: esiste infatti anche un'incertezza dell'incertezza e di norma non ha senso impiegare più di due cifre significative per $u(x)$

Nei calcoli e passaggi intermedi, tuttavia, conviene conservare anche più di due cifre significative

Alternativa di calcolo per la varianza

La varianza campionaria di n valori x_k si può anche calcolare come somma dei singoli valori, elevati al quadrato, meno n volte la media dei valori, al quadrato, il tutto diviso per n-1:

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\bar{x}^2\right]$$

DIM: $$\sum(x_k - \bar{x})^2 = \sum\left(x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2\right) =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - 2\bar{x}\underbrace{\left(\sum x_k\right)}_{n\bar{x}} + n\bar{x}^2 =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - n\bar{x}^2$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (1/5)

Si dispone di n = 10 misure ripetute V_k di una tensione incognita V.

Calcolare V e $u_A(V)$

k [1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_k [V]	7	9	8	6	7	5	7	8	6	7

Esercizio: calcolo inc. cat. A (2/5)

$$V = \overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{1}{10}\, 70\ \text{V} = 7\ \text{V}$$

1ª

$$u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} =$$

2ª

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(V_k - \overline{V}\right)^2} =$$

3ª

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} V_k^2\right) - n\overline{V}^2\right]}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (3/5)

2ª espressione per $u_A(V)$

Calcoliamo prima gli scarti $\left(V_k - \overline{V}\right)$

$\left(V_k - \overline{V}\right)$[V]	0	2	1	-1	0	-2	0	1	-1	0

per poi ricavare

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \times 9}\left(0+4+1+1+0+4+0+1+1+0\right)\mathrm{V}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\ \mathrm{V}^2} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (4/5)

3ª espressione per $u_A(V)$

si calcola $\sum_{k=1}^{N} V_k^2 = 502\ \mathrm{V}^2$ e $\overline{V} = 7\ \mathrm{V}$

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}\left[502\ \mathrm{V}^2 - 10\times 49\ \mathrm{V}^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\ \mathrm{V}^2} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (5/5)

1ª espressione per $u_A(V) = \dfrac{s(V)}{\sqrt{n}}$

dobbiamo prima conoscere o calcolare la radice della varianza campionaria

$s(V) = 1.1547$ V   e poi dividere per $\sqrt{n}$

$$u_A(V) = \frac{1.1547\ \text{V}}{\sqrt{10}} \cong 0.37\ \text{V}$$

Cifre significative nel risultato di una misura

Con i numeri dell'esercizio precedente:

V = 7.00 V ±0.37 V oppure V = 7.00(37) V

o anche, in modo più approssimato,

V = 7.0 V ±0.4 V

Altro esempio: $\overline{V}$=5289 V e $u(V)$=300 V=3.0×10^2 V

V = 5290 V ±300 V =$529(30)\times10^1$ V

o anche, in modo più approssimato,

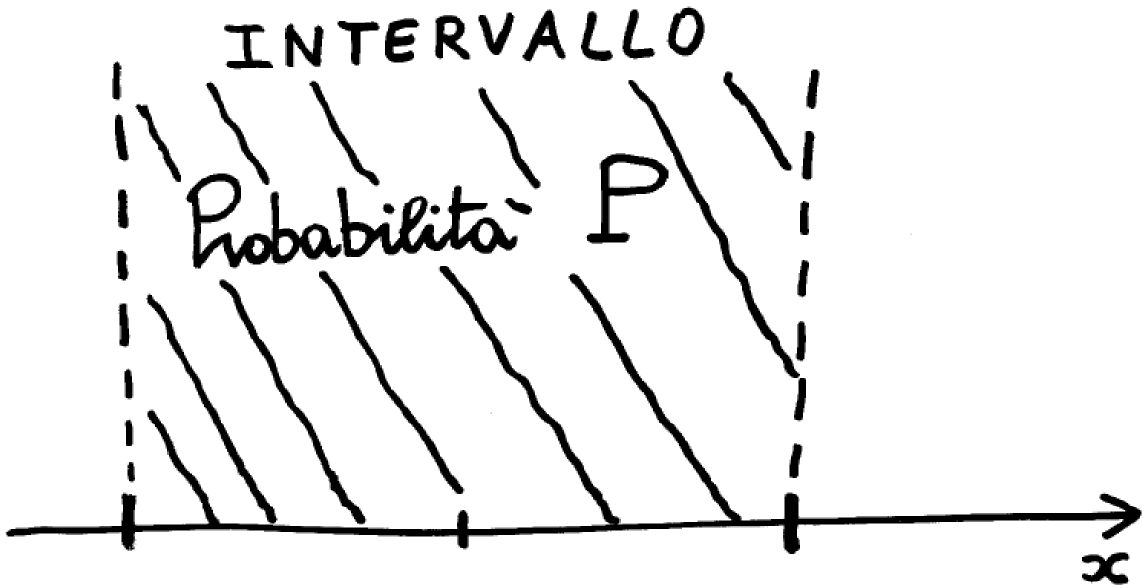
V = (5.3 ±0.3) kV

e se fosse $u(V)$=0.37 V come nel caso precedente:

V = 5289.00 V ±0.37 V oppure V = 5289.00(37) V

Incertezza di categoria B

Si basa sulla definizione "a priori" di un opportuno intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori del misurando (con una data probabilità)



Es. $\boldsymbol{V_{\mathrm{rete}}}$

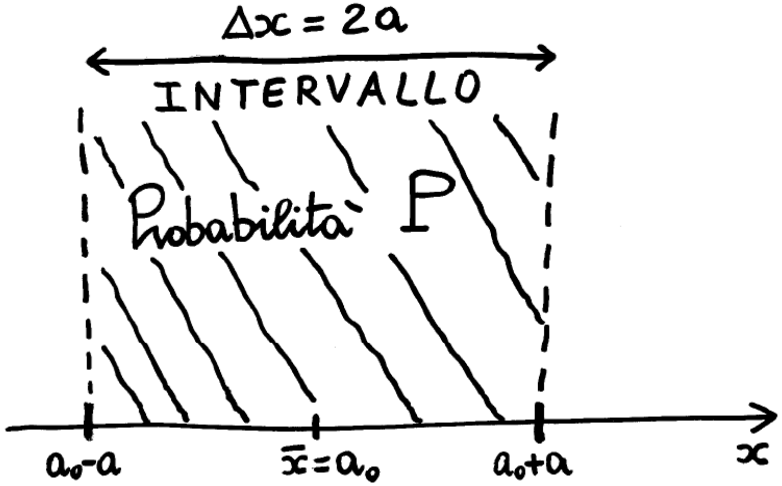
Parametri dell'intervallo

L'intervallo fissato è tipicamente centrato attorno al **valor medio**

$$\bar{x} = a_0 = \frac{(a_0 + a) + (a_0 - a)}{2}$$

e ha una piena larghezza

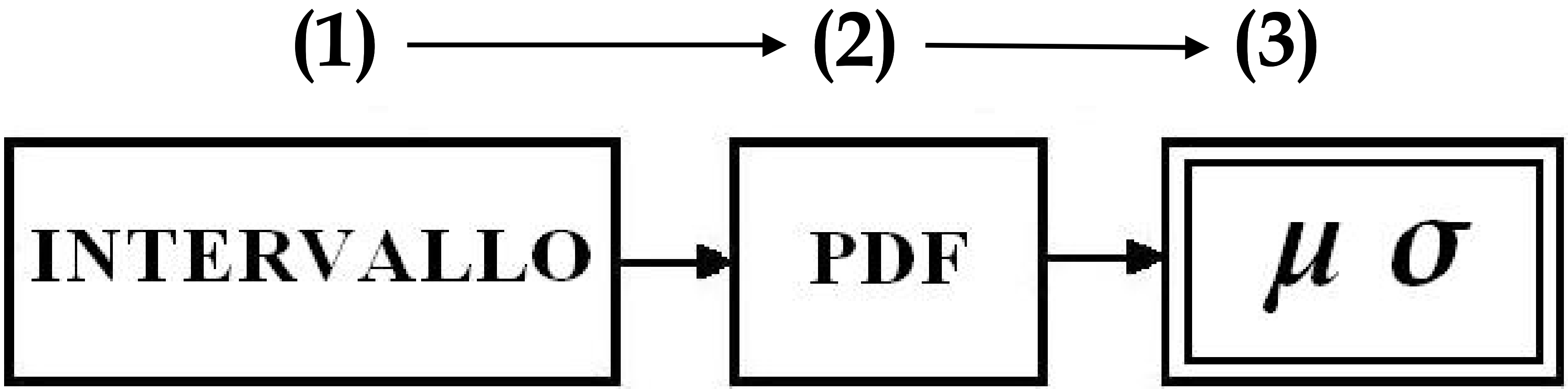
$$\Delta x = (a_0 + a) - (a_0 - a) = 2a$$



Alla **larghezza Δ*x*** sarà legata l'**incertezza della misura**

Stima dell’incertezza di categoria B

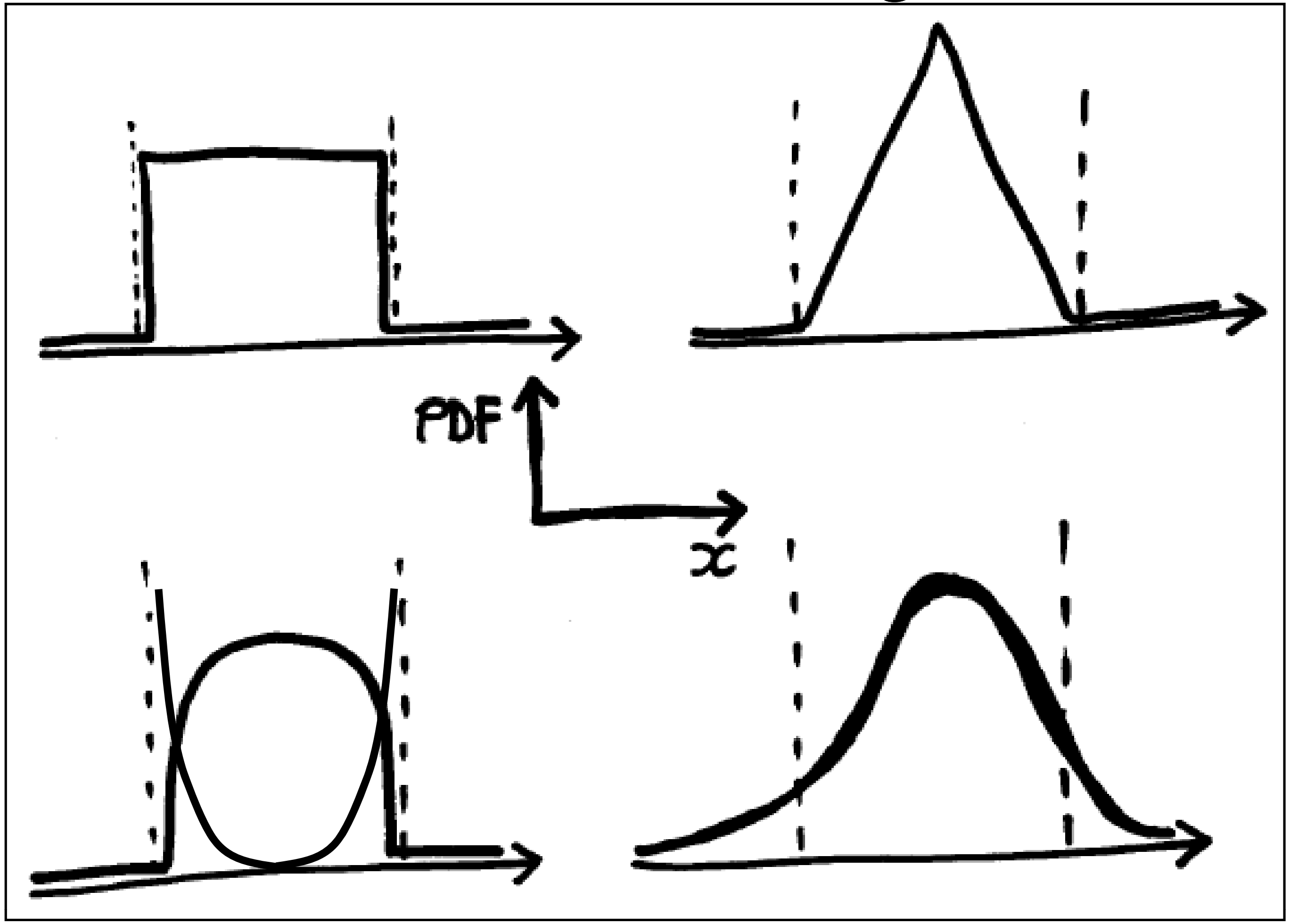
3 PASSI:



1) definito un <u>intervallo</u> di categoria B
2) si associa una densità di probabilità (<u>PDF</u>)
3) di questa si calcolano media, varianza e <u>deviazione standard</u>

Esempi di PDF comuni

uniforme triangolare



a "U" gaussiana

Scelta di intervallo e PDF

Tanto la larghezza dell'intervallo quanto la PDF ad esso associata si scelgono sulla base di:

- precedenti conoscenze o dati di misura
- esperienza sul comportamento del misurando
- specifiche dai costruttori di materiali e strumenti coinvolti nella misura
- dati di calibrazioni
- informazioni da articoli scientifici/tecnici
- incertezza sui parametri di riferimento (presa dai manuali o da altre fonti)

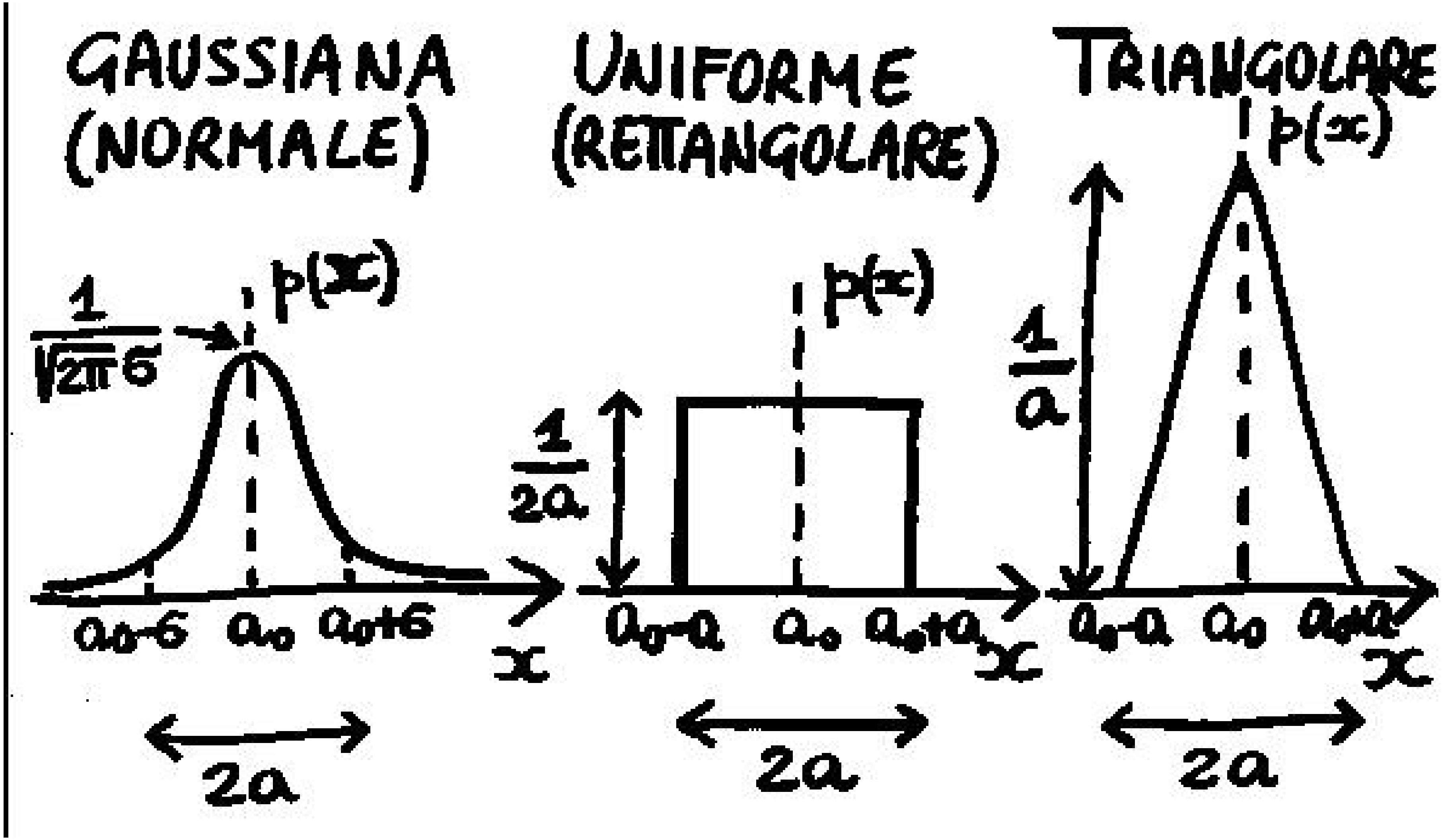
Stima di $u_B(x)$

Quando si dispone di una PDF per la grandezza x, è possibile calcolare $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ che danno, rispettivamente, il valore di misura e la sua incertezza:

$$x = x_{\mathrm{MIS}} = \mu(x)$$

$$u_{\mathrm{B}}(x) = \mathrm{INC}_{\mathrm{B}}(x) = \sigma(x)$$

PDF più comuni



PDF normale

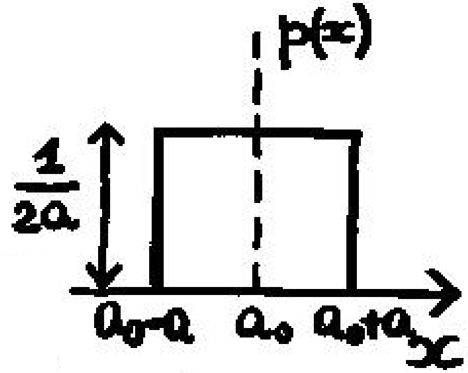
Già si dispone di $\mu(x)$ e $\sigma(x)$, dalla espressione della PDF. Occorre ricordare, o calcolare, che:

1σ *level*: $P[\ \mu\text{-}\sigma \le x \le \mu+\sigma\ ] \approx 68.3\%$

2σ *level*: $P[\ \mu\text{-}2\sigma \le x \le \mu+2\sigma\ ] \approx 95.5\%$

3σ *level*: $P[\mu\ \text{-}3\sigma \le x \le \mu+3\sigma\ ] \approx 99.7\%$

PDF uniforme (1/2)



$$\Delta x = 2a$$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a_0 - a \\ 1/2a & a_0 - a \le x \le a_0 + a \\ 0 & x > a_0 + a \end{cases}$$

E' immediato verificare che:

$$\mu(x) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; p(x)\,\mathrm{d}x = a_0$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

PDF uniforme (2/2)

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0-a}^{a_0+a} x \frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x$$

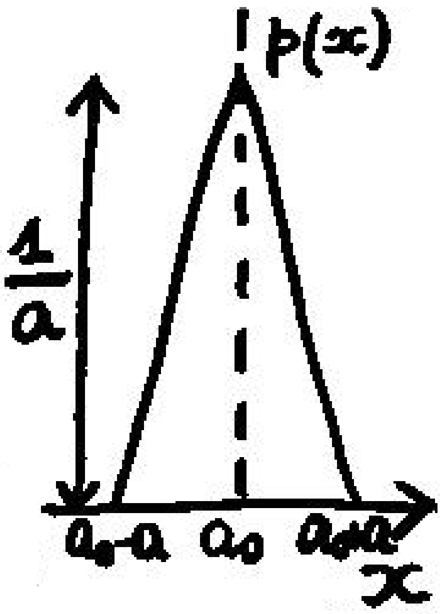
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{2a}\frac{2a_0a + 2a_0a}{2} = a_0$$

$$\sigma^2(x) = E\left[(x-\mu(x))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu(x))^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{a_0-a}^{a_0+a} (x-a_0)^2 \frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{a^2}{3} = \frac{(\Delta x)^2}{12} \qquad \sigma_{\mathrm{UNI}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

PDF triangolare



$$\mu(x) = a_0$$

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{6} = \frac{(\Delta x)^2}{24}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}}$$

A pari larghezza Δx, si ha naturalmente che

$$u_{\mathrm{B,triangolare}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}} < u_{\mathrm{B,uniforme}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

infatti <u>la $\mathrm{PDF}_{\mathrm{Tri}}$ è "meno dispersa" della $\mathrm{PDF}_{\mathrm{Uni}}$</u>

Altri metodi di stima di $u_{\mathrm{B}}(x)$ (1/2)

- Si calcola $u_{\mathrm{B}}(x)$ partendo dalla conoscenza di un **intervallo di confidenza con probabilità *P***:

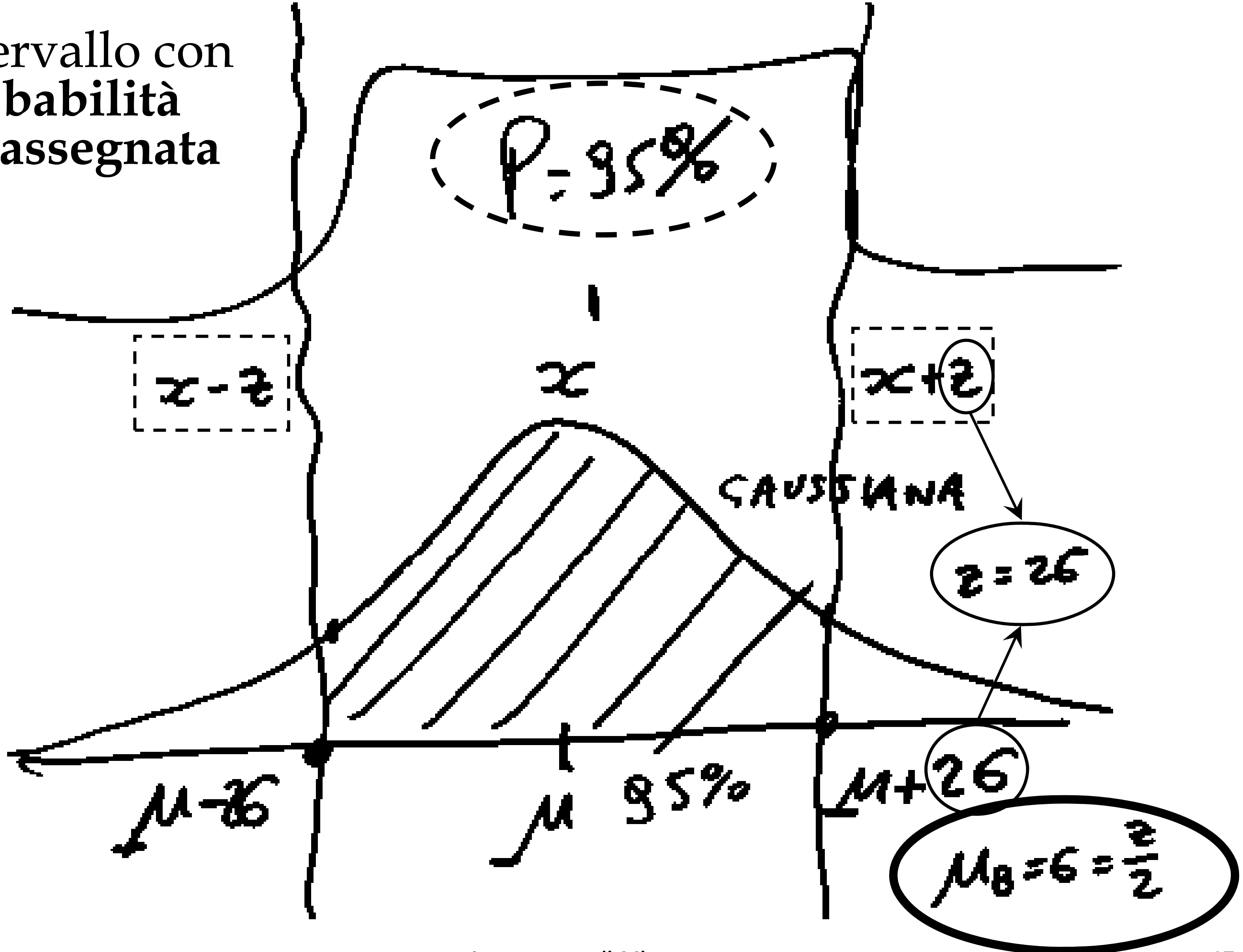
  si usa PDF normale con confidenza *P*, centrata sul valore centrale dell'intervallo, e si stima
  $\boldsymbol{u_{\mathrm{B}}(x) = \sigma(x)=\sigma_x}$ **Es. V_{rete}**

- Si calcola $u_{\mathrm{B}}(x)$ partendo da conoscenza di una **INCERTEZZA ESTESA ($U_{\mathrm{B}} = k\, u_{\mathrm{B}}$)**:

  già si conosce il fattore di copertura *k*
  e quindi si ricava $\boldsymbol{u_{\mathrm{B}}(x)=U_{\mathrm{B}}(x)/k}$ **Es. …**

Altri metodi di stima di $u_B(x)$ (2/2)

- Intervallo con **Probabilità preassegnata**



Misure dirette e indirette

MISURE DIRETTE:

$y = x$ *e.g.*: misura di *V* con un voltmetro

$\boxed{u^2_C = u^2_A + u^2_B \quad \textbf{Incertezza Composta}}$

MISURE INDIRETTE:

$\boxed{\textbf{INC = ???}}$

$y = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$

$P = RI^2$ *misura ottenuta da R e I (no wattmetro)*

$P = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]I^2 = f\,(I, R_0, \alpha, T)$

Misure indirette (definizioni)

Misurando $\boldsymbol{Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)}$ **ricavato "indirettamente"** dalla conoscenza di N altre grandezze (**parametri di ingresso**)

La funzione $\boldsymbol{f(X_i)}$ prende il nome di **relazione funzionale (equazione della misura)**

Y e X_i sono le variabili mentre y e x_i i valori

Naturalmente **da**lla conoscenza dei **valori degli ingressi** è possibile ricavare il **valore dell'uscita**: $\boxed{y=f(x_i)}$

Saranno invece le **incertezze degli ingressi**, **opportunamente "combinate"**, a fornire l'**incertezza dell'uscita**: $\boxed{u_C(y)=\Phi[u(x_i);f(\cdot)]}$

INC composta u_C in misure ind.

Valori della relazione funz. (**equazione della misura**)

$$\boldsymbol{y = f\,(\,x_1, x_2, \ldots, x_N\,)}$$

In un intorno del valore di misura (**punto di lavoro**)

$$\overline{y} = f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_N\right)$$

è possibile sviluppare in serie di Taylor (1° ordine) la relazione funzionale f :

$$\boxed{\left(y - \overline{y}\right) \cong \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\overline{y}} \left(x_1 - \overline{x}_1\right) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_{\overline{y}} \left(x_N - \overline{x}_N\right)}$$

Scarto dell'uscita dal suo valor medio

INC composta u_C in misure ind.

Definiamo **coefficienti di sensibilità**

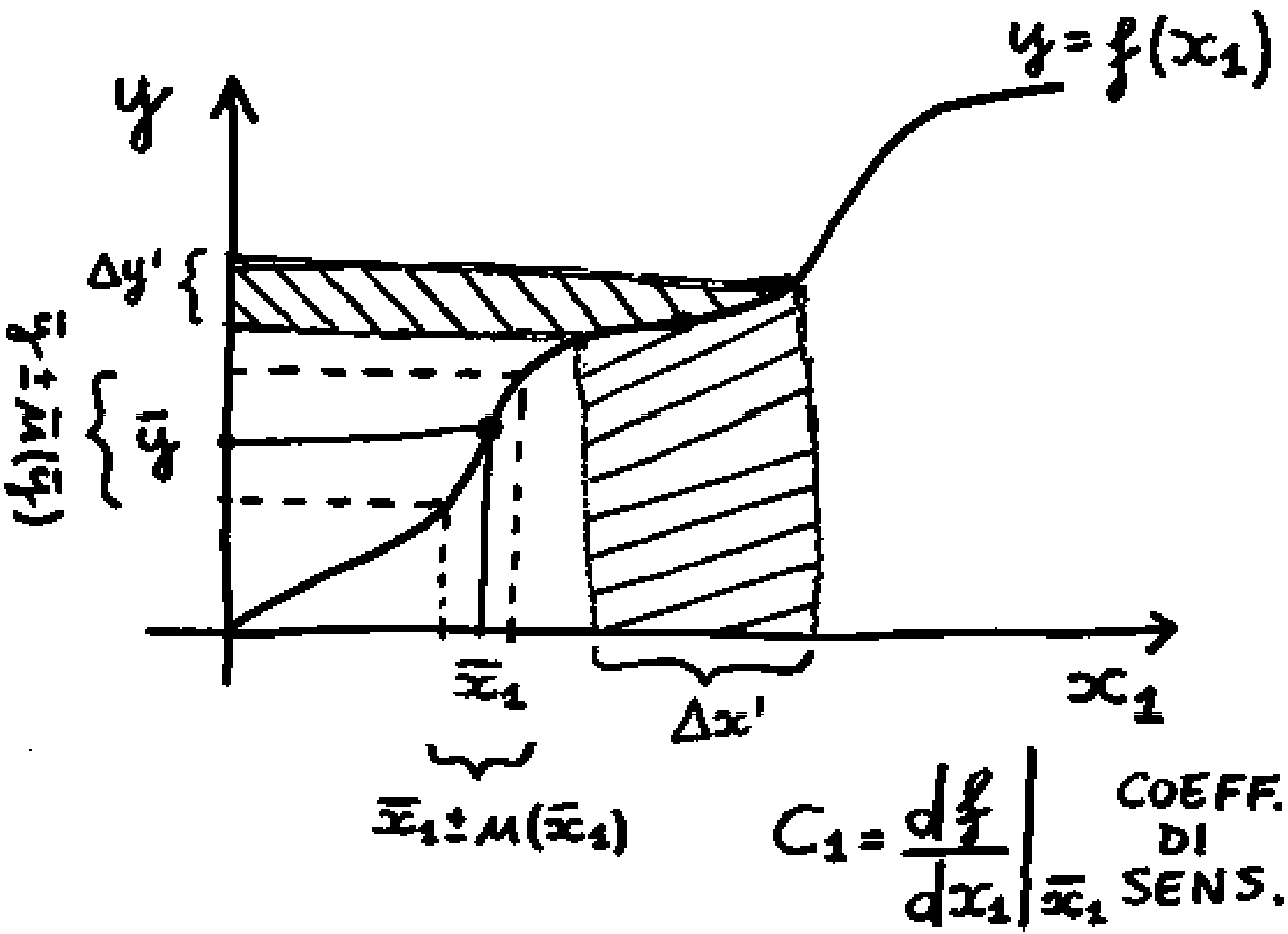
$$\boxed{c_i \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\overline{y}}}$$

coeff. "costante" una volta stabilito il punto di lavoro

le <u>derivate prime parziali della relazione funzionale rispetto alla variabile x_i</u>

c_i indica come varia il misurando Y in corrispondenza di una variazione del parametro X_i di dipendenza

INC composta u_C in misure ind.



INC composta u_C in misure ind.

(*espressione con le covarianze*)

$$\boxed{u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)u(x_i, x_j)}$$

Somma pesata, con pesi c_i^2, delle incertezze (varianze) degli ingressi x_i più la somma dei termini di covarianza, sempre pesati con le derivate prime della relazione funzionale

Risultato della misura

Il **valore di misura** della grandezza Y è:

$$y = \overline{y} = f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_N\right)$$

con una **incertezza composta**:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

In generale ciascuna incertezza $u(x_i)$ è:

$$u_C(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)} = \sqrt{s^2(\overline{x}_i) + u_B^2(x_i)} =$$

$$= \sqrt{\frac{s^2(x_i)}{n} + u_B^2(x_i)}$$

Coefficienti di correlazione

$$\boxed{r_{ij}(x_i, x_j) \stackrel{\Delta}{=} \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad \in [-1,+1]}$$

$$r_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \, \sigma_j}$$

STAT.

$$r_{ij} = 0 \quad \Leftarrow \quad x_i \text{ e } x_j \text{ statisticamente indipendenti}$$

Utilizzando la definizione di r_{ij}, si può scrivere:

(*espressione con i coefficienti di correlazione*)

$$u_{\mathrm{C}}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i \, c_j \, r_{ij} \, u(x_i) u(x_j)}$$

L'INC dell'uscita si ricava dalle INC degli ingressi (con c_i e r_{ij})

Variabili statisticamente indipendenti

Nel caso di variabili d'ingresso statisticamente indipendenti tutti i termini di covarianza e i coefficienti di correlazione sono nulli ($r_{ij} \equiv 0$ tra le variabili x_i e x_j con $x_i \neq x_j$) e pertanto:

$$\boxed{u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}}$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$$

combinazione di varianze

somma pesata

Casi particolari di rel. funzionali (1/2)

Casi particolari di relazioni funzionali per variabili d'ingresso X_i statisticamente indipendenti:

- Misurando come somma o differenza delle x_i:

$$\overline{y} = n_1 \overline{x}_1 \pm \ldots \pm n_i \overline{x}_i \pm \ldots \pm n_N \overline{x}_N$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} n_i^2 u^2(x_i)$$

Se inoltre $n_i = 1$ per ogni i, cioè la relazione funzionale è una somma semplice, si ottiene: $u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)}$

Casi particolari di rel. funzionali (2/2)

- Misurando prodotto o rapporto delle x_i:

$$\overline{y} = \overline{x}_1^{n_1} \times \ldots \times \overline{x}_i^{n_i} \times \ldots \times \overline{x}_N^{n_N} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i^{\,n_i}\right) = n_i x_i^{\,(n_i-1)} = x_i^{\,n_i}\left[n_i \frac{1}{x_i}\right]$$

$$u_{\mathrm{C}}^2(y) = \left(\overline{x}_1^{n_1}\overline{x}_2^{n_2}\ldots\overline{x}_N^{n_N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left[n_i^2 \frac{1}{x_i^2}\right] u^2(x_i) = y^2 \sum_{i=1}^{N} n_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}$$

e dunque $\quad u_{\mathrm{r,C}}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i^2 u_{\mathrm{r}}^2(x_i)}$

Se inoltre $n_i = \pm 1$ per ogni i, cioè se la relazione funzionale è espressa da **prodotti e rapporti** semplici, si ottiene:

$$\boxed{u_{r,C}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_r^2(x_i)}$$

Esercizio: legge dei gas perfetti (1/4)

$$p = n\frac{RT}{V} = f(n,R,T,V)$$ Relazione funzionale

$R = 8.31 \ \mathrm{Pa \cdot m^3/(mol \cdot K)}$ $u(R)$ "=" 0 (≅0!!!)

n = 2 mol $u_r(n) = 10^{-6}$

T = 300 K $u(T)$ = 0.1 K

$V = 1 \ \mathrm{m}^3$ da $V = L^3$ e $L = 1 \ \mathrm{m} \pm 1$
mm

Esercizio: legge dei gas perfetti (2/4)

$$p = \frac{2\,[\mathrm{mol}] \times 8.31\left[\mathrm{Pa\cdot m^3}/_{\mathrm{mol\cdot K}}\right] \times 300\,[\mathrm{K}]}{1\,[\mathrm{m^3}]} = 4986\ \mathrm{Pa} \cong 5\ \mathrm{kPa}$$

$$\boxed{V = L^3}$$

$$u(V) = \sqrt{\left[\frac{\partial V}{\partial L}\right]^2 u^2(L)} = \sqrt{\left[3\,\mathrm{m}^2\right]^2 \times \left[10^{-3}\,\mathrm{m}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{9 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^6} = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

Conoscendo ora tutte le variabili/grandezze d'ingresso (valore e incertezza) possiamo calcolare l'INC della grandezza misurata indirettamente

Esercizio: legge dei gas perfetti (3/4)

$$\boxed{p = n\frac{RT}{V}}$$

$$u(p) = \sqrt{\left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]^2 u^2(n) + \left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]^2 u^2(T) + \left[\frac{\partial p}{\partial V}\right]^2 u^2(V)} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{RT}{V}\right]^2 u^2(n) + \left[\frac{nR}{V}\right]^2 u^2(T) + \left[\frac{nRT}{-V^2}\right]^2 u^2(V)} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(n)}{n^2} + \left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(T)}{T^2} + \left[\frac{nRT}{-V}\right]^2 \frac{u^2(V)}{V^2}}$$

$$u_r(p) = \sqrt{u_r^2(n) + u_r^2(T) + u_r^2(V)}$$

Esercizio: legge dei gas perfetti (4/4)

$$u_r^2(n) = \quad 10^{-12}$$

$$u_r^2(T) = \quad \frac{(0.1\,\mathrm{K})^2}{(300\,\mathrm{K})^2} \cong 1.1\times 10^{-7}$$

$$u_r^2(V) = \quad \frac{\left(3\times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\right)^2}{\left(1\,\mathrm{m}^3\right)^2} \cong 9\times 10^{-6}$$

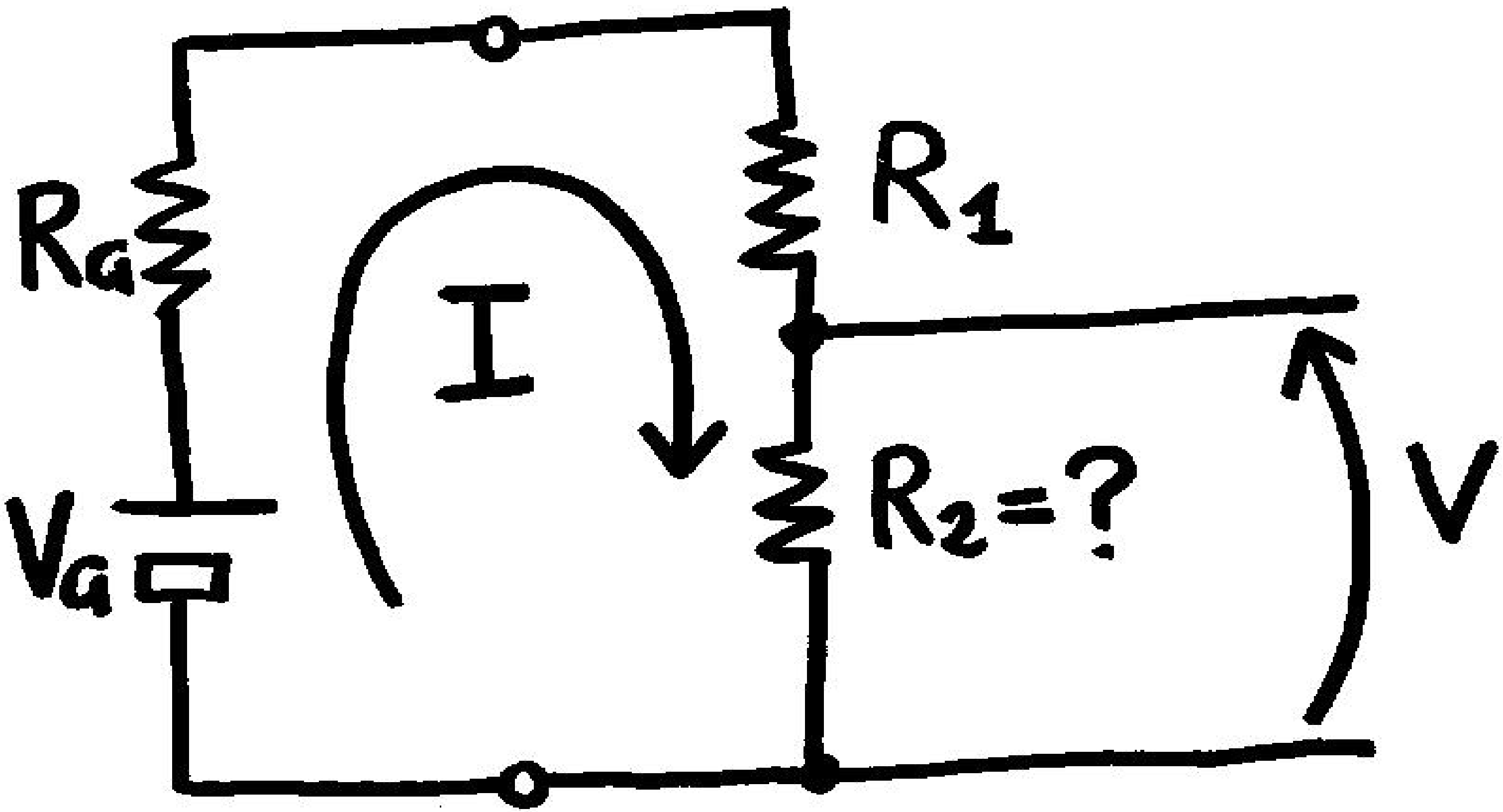
$$u_r(p) = \sqrt{10^{-6}\left(10^{-6} + 0.11 + 9\right)} \cong 3\times 10^{-3} \quad [= u_\mathrm{r}(V)!!!]$$

$$u(p) = \quad u_r(p)\times p = 14.9\ \mathrm{Pa} \cong 15\ \mathrm{Pa}$$

p = 4986±15 Pa = 4986(15) Pa

Esercizio: circuito elettrico (1/11)

Calcolo dell'incertezza composta in una misura indiretta su un circuito elettrico



Esercizio: circuito elettrico (2/11)

- V_G è data pari a +12 V e $U(V_G)$ = 10 mV k = 2
- R_G è nota attraverso 10 letture ripetute $R_{G,k}$, $\overline{R}_G = 50\ \Omega \qquad s\left(R_{G,k}\right) = 12.65\ \Omega$
- $R_1 = 1\ \mathrm{k}\Omega \pm 5\ \Omega$
- V = 7.77 V letta con un voltmetro a 3 ½ cifre, con ± 19.99 V di dinamica, e "ideale" (solo errore di quantizzazione)

Esercizio: circuito elettrico (3/11)

1) Calcolare l'incertezza assoluta e relativa di tutti i parametri coinvolti nella misura

2) Calcolare R_2, la sua incertezza e la sua incertezza relativa ($u(R_2)$ e $u_\mathrm{r}(R_2)$)

3) Quali parametri sono determinanti e quali sono trascurabili per il calcolo di $u(R_2)$?

Esercizio: circuito elettrico (4/11)

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{V}{R_2}$$

descrizione analitica del fenomeno fisico in esame

$$R_2 \cdot V_G = \left(R_G + R_1 + R_2\right) \cdot V$$

$$R_2\left(V_G - V\right) = \left(R_G + R_1\right)V$$

$$R_2 = \frac{V}{\left(V_G - V\right)}\left(R_G + R_1\right) = f\left(V_G, V, R_G, R_1\right)$$

relazione funzionale

Esercizio: circuito elettrico (5/11)

$$u^2(R_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial V_G}\right]^2 u^2(V_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial R_G}\right]^2 u^2(R_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial R_1}\right]^2 u^2(R_1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coeff. di sensibilità dice come *f*, ossia R_2 , varia al variare di un parametri di dipendenza

Esercizio: circuito elettrico (6/11)

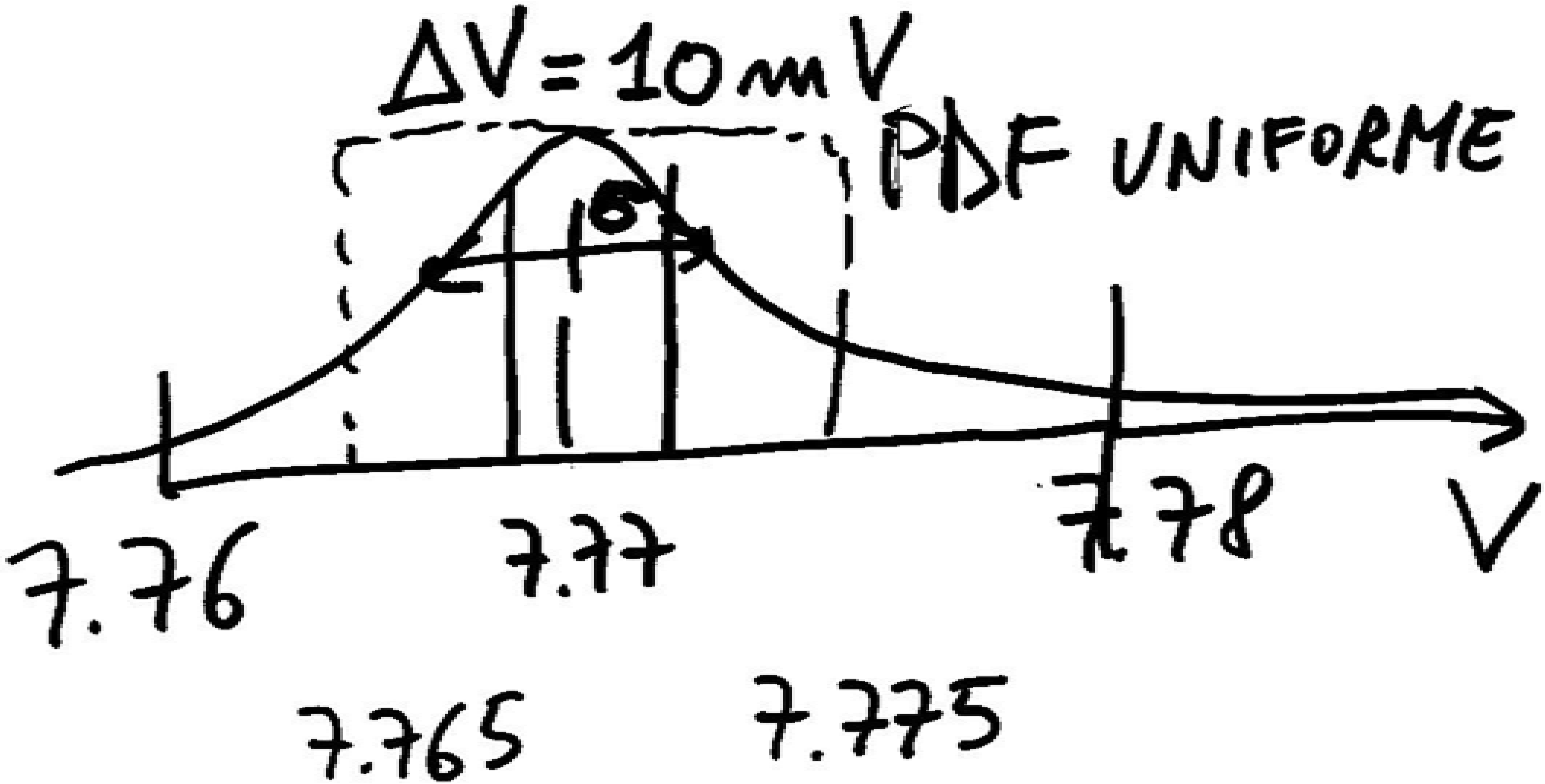
1) $$u(V_G) = U(V_G)/k = 5\times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$$u_\mathrm{r}(V_G) = \frac{u(V_G)}{V_G} = \frac{5\times 10^{-3}\ \mathrm{V}}{12\ \mathrm{V}} = 4.2\times 10^{-4}$$

$$u(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{0.01}{\sqrt{12}} = 2.9\times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$$u_\mathrm{r}(V) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9\times 10^{-3}\ \mathrm{V}}{7.77\ \mathrm{V}} = 3.7\times 10^{-4}$$

Esercizio: circuito elettrico (7/11)



Esercizio: circuito elettrico (8/11)

$$u(R_1) = 5\ \Omega$$

$$u_\mathrm{r}(R_1) = \frac{u(R_1)}{R_1} = \frac{5\ \Omega}{1000\ \Omega} = 5 \times 10^{-3}$$

$$u(R_G) = u(\overline{R}_G) = \frac{s(R_{G,k})}{\sqrt{n}} = \frac{12.65\ \Omega}{\sqrt{10}} = 4\ \Omega$$

$$u_\mathrm{r}(R_G) = \frac{u(R_G)}{R_G} = \frac{4\ \Omega}{50\ \Omega} = 8 \times 10^{-2}$$

Esercizio: circuito elettrico (9/11)

2)

$$R_2 = \overline{R}_2 = \frac{\overline{V}}{\left(\overline{V}_G - \overline{V}\right)}\left(\overline{R}_G + \overline{R}_1\right) = \frac{7.77\ \mathrm{V}}{4.23\ \mathrm{V}} 1050\ \Omega = 1928.7\ \Omega$$

$$u^2(R_2) = \left[-\frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2}\right]^2 u^2(V_G) +$$

$$+\left[\frac{R_G + R_1}{V_G - V} + \frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+\left[\frac{V}{V_G - V}\right]^2 \left\{u^2(R_G) + u^2(R_1)\right\} =$$

Esercizio: circuito elettrico (10/11)

$$= 2.08 \times 10^5 \ \frac{\Omega^2}{V^2} \times 2.50 \times 10^{-5} \ V^2 +$$

$$+ 4.96 \times 10^5 \ \frac{\Omega^2}{V^2} \times 8.41 \times 10^{-6} \ V^2 +$$

$$+ 3.37 \times 41 \, \Omega^2 =$$

$$= \left(5.2 + 4.17 + 138.17\right) \Omega^2 = 147.54 \ \Omega^2$$

$$u\left(R_2\right) = \sqrt{u^2\left(R_2\right)} = 12.15 \ \Omega \cong 12 \ \Omega$$

$$u_\mathrm{r}\left(R_2\right) = \frac{u\left(R_2\right)}{R_2} = 6.2 \times 10^{-3}$$

Esercizio: circuito elettrico (11/11)

3) Le incertezze associate a R_G e R_1 danno il maggior contributo all'incertezza di R_2 (circa in parti uguali)

   Invece l'incertezza $u(V)$ sulla tensione letta dal voltmetro e così pure l'incertezza $u(V_G)$ sulla tensione del generatore contribuiscono in modo quasi trascurabile (circa 1/35 e circa 1/30, rispettivamente, dell'incertezza totale)

Compatibilità tra due misure x_1 e x_2

distanza tra i due risultati $\leq$ "combinazione" delle incertezze associate alle due misure

$$\boxed{d = |x_1 - x_2| \leq k\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2r_{12}\,u(x_1)u(x_2)}}$$