Capitolo 7. Preferenze media-varianza e CAPM

Nella prima parte del Capitolo 6 abbiamo sviluppato un modello della scelta di portafoglio con due periodi senza imporre alcuna restrizione sulla funzione di utilità, tranne che essa sia crescente e concava. Nella seconda parte di quel capitolo abbiamo mostrato che quel modello si trasforma nel CAPM imponendo l'ipotesi che le preferenze degli individui siano descritte da una funzione di utilità quadratica. Come si è già accennato, esiste però un altro caso in cui il modello generale del Capitolo 6 si trasforma nel CAPM, ed è quello in cui la funzione obiettivo degli investitori è lineare nella media e nella varianza della ricchezza futura. Questo capitolo sviluppa compiutamente l'analisi sotto questa ipotesi, sia dal punto di vista algebrico che dal punto di vista grafico, tenendo ferma l'ipotesi che vi siano solo due periodi, e che gli investitori effettuino le proprie scelte di portafoglio nel periodo iniziale.

L'analisi con preferenze media-varianza presentata in questo capitolo può essere vista quindi come un ulteriore "caso speciale" di quella presentata nel Capitolo 6. C'è tuttavia una dimensione importante in cui questo capitolo estende l'analisi del capitolo precedente: si abbandona l'ipotesi che tutti gli investitori abbiano le stesse preferenze e la stessa ricchezza, e quindi vogliano lo stesso portafoglio in equilibrio. Vedremo però che, anche se gli individui differiscono per avversione al rischio e per ricchezza, la relazione tra i rendimenti di equilibrio sarà ancora caratterizzata dalla retta di mercato dei titoli. Ma, cosa più sorprendente, in equilibrio tutti gli investitori detengono solo combinazioni del titolo sicuro e di un *identico* portafoglio di titoli rischiosi, anche se le proporzioni in cui detengono questi due portafogli variano a seconda della loro avversione al rischio – risultato noto come la "separazione in due portafogli" dei titoli presenti sul mercato (*two-fund separation*).

Per facilitare la comprensione del modello, nel primo paragrafo di questo capitolo ci concentreremo sul caso con due titoli rischiosi e uno sicuro, sia a livello analitico che a livello grafico. Nel secondo paragrafo, l'analisi verrà estesa al caso con più titoli rischiosi e uno sicuro. Il terzo paragrafo presenterà infine una concisa trattazione delle verifiche empiriche del CAPM.

1. Il modello con due titoli rischiosi e uno sicuro

Come spiegato nel paragrafo 4 del Capitolo 5, se la funzione di utilità degli investitori è esponenziale negativa e la loro ricchezza finale è una variabile normale, allora l'utilità attesa $E\left[u_j(\tilde{w}_{1j})\right]$ è funzione crescente di un'espressione lineare nella media e nella varianza della ricchezza futura:

$$E(\tilde{w}_{1j}) - \frac{\gamma_j}{2}\,\mathrm{var}(\tilde{w}_{1j}), \qquad (1)$$

dove γ_j indica il grado di avversione al rischio assoluto dell'investitore *j* e $\tilde{w}_{1j}$ la sua ricchezza finale. In altri termini, per massimizzare la propria utilità attesa, l'investitore *j* dovrà scegliere il proprio portafoglio in modo da massimizzare la funzione obiettivo media-varianza descritto dalla

(1). Si noti che, perché la ricchezza futura dell'investitore *j* sia una variabile normale, i rendimenti di tutti i titoli rischiosi devono essere normali, poiché la somma di variabili normali è anch'essa normale.

Supponiamo che queste ipotesi sulle preferenze e sui rendimenti dei titoli siano soddisfatte, e che vi siano *M* investitori, indicizzati con $j = 1, 2, ..., M$, che differiscono tra loro non solo per effetto di un diverso grado di avversione al rischio assoluto γ_j ma anche per una diversa ricchezza iniziale w_{0j}. Per entrambi questi motivi, ciascun investitore potrà voler scegliere un diverso portafoglio e, in tal caso, anche la sua ricchezza finale $\tilde{w}_{1j}$ sarà diversa da quella degli altri. Più avanti utilizzeremo anche la nozione di "tolleranza al rischio" τ_j, che è il reciproco dell'avversione al rischio, cioè $\tau_j \equiv 1/\gamma_j$.

In questo paragrafo, supponiamo che ciascuno di questi *M* investitori possa scegliere all'interno di un menu di tre titoli, di cui due rischiosi ("azioni") e uno sicuro ("debito"), lasciando l'estensione al caso di *N* titoli rischiosi al prossimo paragrafo. Indicizziamo i due titoli rischiosi con i = 1, 2 . La notazione è la stessa del capitolo precedente, salvo che ora ogni individuo *j* ha una ricchezza iniziale potenzialmente diversa w_{0j}, di cui egli destinerà una somma b_j all'acquisto di debito, una somma a_{1j} all'acquisto di azioni del tipo 1 e una somma a_{2j} all'acquisto di azioni del tipo 2. Con passaggi simili a quelli svolti all'inizio del Capitolo 6, la ricchezza finale può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1j} &= (1+r_f)w_{0j} + \tilde{x}_1 a_{1j} + \tilde{x}_2 a_{2j} \\ &= \left[1 + r_f + (\tilde{r}_1 - r_f)\alpha_{1j} + (\tilde{r}_2 - r_f)\alpha_{2j}\right] w_{0j}, \end{aligned} \qquad (2)$$

dove il simbolo $\tilde{x}_i \equiv \tilde{r}_i - r_f$ indica l'extra-rendimento percentuale del titolo *i* e α_{ij} la quota di tale titolo nel portafoglio dell'individuo *j*. Quindi la sua ricchezza finale è pari al valore finale che la ricchezza iniziale w_{0j} avrebbe se fosse interamente investita nel titolo sicuro *più* l'extra-rendimento sulla componente azionaria del portafoglio.

In questo capitolo useremo la definizione della ricchezza finale riportata al secondo rigo dell'equazione (2), cioè considereremo come variabili di controllo dell'investitore le *quote* α_{ij} di ricchezza investite nei due titoli rischiosi, invece che il valore della somma investita in ciascun tipo di azioni, come nei Capitoli 5 e 6. Ovviamente le due formulazioni conducono agli stessi risultati.

1.1. Il problema di scelta individuale

Sostituendo il vincolo (2) nella funzione obiettivo (1), si esprime il problema dell'investitore *j* come il problema di scelta delle quote dei due titoli rischiosi α_{1j} e α_{2j}:

$$\max_{\alpha_{1j},\alpha_{2j}} \left[1+r_f+(\bar{r}_1-r_f)\alpha_{1j}+(\bar{r}_2-r_f)\alpha_{2j}\right]w_{0j}-\frac{\gamma_j}{2}\left[\sigma_1^2\alpha_{1j}^2+\sigma_2^2\alpha_{2j}^2+2\sigma_{12}\alpha_{1j}\alpha_{2j}\right]w_{0j}^2, \tag{3}$$

dove $\bar{r}_i \equiv E(\tilde{r}_i)$ indica il rendimento atteso del titolo i, $\mathrm{var}(\tilde{r}_i) \equiv \sigma_i^2$ la varianza di tale rendimento e $\mathrm{cov}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) \equiv \sigma_{12}$ la covarianza tra i rendimenti dei titoli 1 e 2.

Le due condizioni di primo ordine sono:

$$\bar{r}_1-r_f=\gamma_j\left[\sigma_1^2\alpha_{1j}+\sigma_{12}\alpha_{2j}\right]w_{0j}, \tag{4}$$

e

$$\bar{r}_2-r_f=\gamma_j\left[\sigma_2^2\alpha_{2j}+\sigma_{12}\alpha_{1j}\right]w_{0j}, \tag{5}$$

Dalla (4) possiamo scrivere la domanda in valore del titolo 1 (cioè la quota α_{1j} moltiplicata per la ricchezza iniziale w_{0j}) in funzione dei parametri e della domanda dell'altro titolo:

$$\alpha_{1j}w_{0j}=\frac{\bar{r}_1-r_f}{\gamma_j\sigma_1^2}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\alpha_{2j}w_{0j}. \tag{4′}$$

Quindi, se i rendimenti dei due titoli non sono correlati (cioè $\sigma_{12}=0$), la domanda del titolo 1 dipende solo dal suo extra-rendimento atteso (positivamente) e dal prodotto tra l'avversione al rischio e la sua varianza (negativamente). Se invece i rendimenti dei due titoli sono positivamente correlati ($\sigma_{12}>0$), la domanda del titolo 1 sarà tanto minore quanto maggiore è la quantità del titolo 2 che l'investitore decide di acquistare: i due titoli sono sostituti, perché hanno caratteristiche di rischio affini. Il contrario accade invece se i rendimenti sono negativamente correlati ($\sigma_{12}<0$): in tal caso i due titoli sono complementi, perché ciascuno di essi tende a immunizzare il portafoglio dell'investitore dal rischio indotto dall'altro.

Naturalmente, tutto ciò vale in modo simmetrico per il titolo 2. Basta riscrivere la condizione di primo ordine (5) in modo analogo alla (4′):

$$\alpha_{2j}w_{0j}=\frac{\bar{r}_2-r_f}{\gamma_j\sigma_2^2}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}\alpha_{1j}w_{0j}. \tag{5′}$$

Poiché la (4) e la (5) (o equivalentemente la (4′) e la (5′) sono due equazioni lineari in due incognite, è facile risolverle (per sostituzione, con la regola di Cramer o con l'algebra delle matrici) per espimere la domanda in valore di ciascun titolo in funzione dei parametri del problema, ovvero i due extra-rendimenti attesi, le due varianze e la covarianza, nonché l'avversione al rischio:

$$\alpha_{1j}w_{0j}=\frac{\sigma_2^2(\bar{r}_1-r_f)-\sigma_{12}(\bar{r}_2-r_f)}{\gamma_j\left(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2\right)}, \tag{4″}$$

$$\alpha_{2j} w_{0j} = \frac{\sigma_1^2 (\overline{r}_2 - r_f) - \sigma_{12} (\overline{r}_1 - r_f)}{\gamma_j \left(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 \right)}. \tag{5''}$$

Queste due equazioni mostrano che quando l'obiettivo è funzione lineare della media e della varianza, anche le funzioni di domanda sono funzioni lineari degli extra-rendimenti attesi (e quindi dei prezzi). In particolare, la domanda di ciascun titolo rischioso è crescente nel suo stesso extra-remdimento atteso, e decrescente in quello dell'altro se la covarianza è positiva – cioè se i due titoli sono sostituti. (Invece è crescente anche nell'extra-rendimento atteso dell'altro titolo se la loro covarianza è negativa – cioè se i due titoli sono complementi).

Un'altra caratteristica interessante di queste funzioni di domanda è che tra individui diversi esse differiscono solo per una costante, cioè il termine γ_j. Ciò vuol dire che la domanda di un titolo da parte di ciascun investitore è uguale a quella degli altri tranne per un fattore di scala che dipende dall'avversione al rischio. Ciò vuol dire anche che il rapporto tra la domanda dei due titoli, $\alpha_{1j} / \alpha_{2j}$, è lo stesso per tutti gli investitori, poiché l'avversione al rischio γ_i si elide nel calcolo del rapporto. In altri termini, tutti gli investitori hanno un portafoglio di titoli rischiosi che ha la stessa composizione percentuale, indipendemente dalla loro avversione al rischio e ricchezza. Poiché l'unico altro titolo è quello privo di rischio, ciò dimostra già il risultato della separazione in due portafogli: tutti investono nel titolo sicuro e in un identico portafoglio di titoli rischiosi. Come vedremo, la sola cosa che differisce da persona a persona è l'ammontare investito in questi due portafogli – a seconda della loro avversione al rischio.

1.2. Rendimenti e portafogli di equilibrio

Fin qui la scelta ottima del singolo investitore *j*. Per calcolare gli extra-rendimenti di equilibrio, occorre aggregare le domande individuali e uguagliarle all'offerta totale di ciascun titolo. Ma piuttosto che partire dalle funzioni individuali di domanda (4″) e (5″), conviene tornare alle condizioni di primo ordine (4) e (5), moltiplicarle su entrambi i lati per $\tau_j = 1/\gamma_i$ e sommare ciascuna condizione per tutti gli *M* investitori. Con questi semplici passaggi, dalla (4) si ottiene l'equazione:

$$\sum_{j=1}^{M} \tau_j (\overline{r}_1 - r_f) = \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{M} \alpha_{1j} w_{0j} + \sigma_{12} \sum_{j=1}^{M} \alpha_{2j} w_{0j} \ , \tag{6}$$

dove le due sommatorie sul lato destro sono rispettivamente la domanda totale del titolo 1 e quella del titolo 2. Dividendo entrambi i lati per il numero di investitori *M*, otteniamo:

$$\frac{\sum_{j=1}^{M} \tau_j}{M} (\overline{r}_1 - r_f) = \sigma_1^2 \frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{1j} w_{0j}}{M} + \sigma_{12} \frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{2j} w_{0j}}{M} \ , \tag{7}$$

La frazione sul lato sinistro dell'equazione è la tolleranza media al rischio, che per brevità indicheremo con τ_M. Le due frazioni sul lato destro dell'equazione sono invece le domande medie pro-capite (in valore) dei titoli 1 e 2.

A questo punto, basta imporre le condizioni di equilibrio per i due titoli, cioè l'uguaglianza tra la domanda media *pro-capite* in valore di ciascun titolo *i* e la sua offerta media in valore, che come nel Capitolo 5 indichiamo con $\bar{a}_i \equiv \bar{n}_i p_i$:

$$\frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{1j} w_{0j}}{M} = \bar{a}_1 , \qquad \frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{2j} w_{0j}}{M} = \bar{a}_2 . \tag{8}$$

Inserendo le condizioni di equilibrio (8) nell'equazione (7), otteniamo l'extra-rendimento di equilibrio sul titolo 1:

$$\bar{r}_1^* - r_f = \frac{1}{\tau_M} (\sigma_1^2 \bar{a}_1 + \sigma_{12} \bar{a}_2) . \tag{9}$$

Simmetricamente, per il titolo 2:

$$\bar{r}_2^* - r_f = \frac{1}{\tau_M} (\sigma_2^2 \bar{a}_2 + \sigma_{12} \bar{a}_1) . \tag{10}$$

Il termine nella parentesi sul lato destro di ciascuna di queste due condizioni di equilibrio è proporzionale alla covarianza del rendimento del titolo con il rendimento del portafoglio di mercato. Per vederlo, si noti che nel "portafoglio di mercato" i due titoli hanno un peso percentuale pari al rapporto tra la propria offerta in valore e il valore complessivo del mercato azionario ($\bar{a}_M = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, in termini medi pro capite). Quindi il rendimento del portafoglio di mercato è:

$$\tilde{r}_M = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_M} \tilde{r}_1 + \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_M} \tilde{r}_2$$

e la covarianza tra $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_M$ è:

$$\sigma_{1M} \equiv \mathrm{cov}\left(\tilde{r}_1, \tilde{r}_1 \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_M} + \tilde{r}_2 \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_M} \right) = (\sigma_1^2 \bar{a}_1 + \sigma_{12} \bar{a}_2) \frac{1}{\bar{a}_M} .$$

Ne segue che la condizione di equilibrio (9) può essere riscritta semplicemente come segue:

$$\bar{r}_1^* - r_f = \frac{1}{\tau_M} \sigma_{1M} \, \bar{a}_M \tag{9'}$$

e analogamente per il titolo 2:

$$\bar{r}_2^* - r_f = \frac{1}{\tau_M} \sigma_{2M} \, \bar{a}_M . \tag{10'}$$

Quindi in equilibrio l'extra-rendimento atteso di ciascuno titolo è direttamente proporzionale alla sua covarianza con il portafoglio di mercato e inversamente proporzionale alla tolleranza media al rischio. Il mercato "prezza" il rischio da covarianza di ciascun titolo, non quello dovuto solo alla sua varianza.

Da queste due espressioni è facile ottenere l'extra-rendimento di equilibrio sullo stesso portafoglio di mercato: basta moltiplicare la (9′) per $\bar{a}_1 / \bar{a}_M$ e la (10′) per $\bar{a}_2 / \bar{a}_M$, e poi sommarle membro a membro. Il risultato è:

$$\underbrace{\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_M} \bar{r}_1^* + \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_M} \bar{r}_2^* \right)}_{\bar{r}_M^*} - r_f = \frac{1}{\tau_M} \underbrace{\left(\sigma_1^2 \frac{\bar{a}_1^2}{\bar{a}_M^2} + \sigma_2^2 \frac{\bar{a}_2^2}{\bar{a}_M^2} + 2\sigma_{12} \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_M} \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_M} \right)}_{\sigma_M^2} \bar{a}_M$$

ovvero, in forma più compatta:

$$\bar{r}_M^* - r_f = \frac{\sigma_M^2}{\tau_M} \bar{a}_M \, . \tag{11}$$

Quindi in equilibrio l'extra-rendimento atteso del mercato è direttamente proporzionale alla sua variabilità, e inversamente proporzionale alla tolleranza media al rischio.

Usando la (11), possiamo eliminare $\bar{a}_M / \tau_M$ dalla (9') e dalla (10'), ottenendo una relazione tra l'extra-rendimento atteso di ciascun titolo e quello del mercato che non include alcun parametro relativo alle preferenze:

$$\bar{r}_1^* - r_f = \frac{\sigma_{1M}}{\sigma_M^2} (\bar{r}_M^* - r_f) = \beta_1 (\bar{r}_M^* - r_f) \tag{9''}$$

e

$$\bar{r}_2^* - r_f = \frac{\sigma_{2M}}{\sigma_M^2} (\bar{r}_M^* - r_f) = \beta_2 (\bar{r}_M^* - r_f) \, . \tag{10''}$$

Il secondo passaggio di ciascuna di queste due equazioni mostra che l'extra-rendimento atteso di ciascun titolo è pari al prodotto tra il "beta" di quel titolo e l'extra-rendimento atteso del portafoglio di mercato. Abbiamo quindi ottenuto nuovamente la "retta di mercato dei titoli" (*security market line*) già discussa nel Capitolo 6.

Un'altra caratteristica dell'equilibrio è che tutti gli investitori detengono i due titoli nelle stesse proporzioni in cui questi sono presenti nel portafoglio di mercato. Si ricorderà infatti che, commentando la domanda individuale dei due titoli (4″) e (5″) da parte dell'investitore *j*, si è notato che ogni investitore detiene la stessa quantità relativa dei due titoli, cioè $\alpha_{1j} / \alpha_{2j}$ è uguale ad una stessa costante κ per qualsiasi $j = 1, 2, ..., M$. Poiché ciò è vero per ciascun investitore, è vero anche per il mercato nel suo insieme:

$$\frac{\alpha_{1h}}{\alpha_{2h}} = \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{2i}} = \kappa \text{ per } h \neq i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{M} \alpha_{1j} w_{0j} = \kappa \cdot \sum_{j=1}^{M} \alpha_{2j} w_{0j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{1j} w_{0j}}{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{2j} w_{0j}} = \kappa \,.$$

Ma allora in equilibrio questo rapporto tra le quantità domandate dei due titoli dovrà essere pari al rapporto tra le quantità offerte (sia nell'aggregato che in termini *pro capite*), cioè:

$$\frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{1j} w_{0j}}{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{2j} w_{0j}} = \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_2} = \kappa \,.$$

In altri termini, *in equilibrio* ognuno detiene i due titoli rischiosi nello stesso *rapporto* in cui questi sono presenti nel portafoglio di mercato, anche se individui diversi investiranno un *ammontare* diverso nel portafoglio di mercato, a seconda della propria avversione al rischio. Paragonando il portafoglio rischioso a una torta, la composizione della torta è la stessa per tutti, ma la grandezza della torta che ognuno acquista è diversa: chi è più avverso al rischio vorrà una "torta" più piccola di chi è meno avverso al rischio, e quindi investirà relativamente più risorse nel titolo sicuro.

Ovviamente, ciò che non è investito nella "torta" del portafoglio rischioso sarà investito nel titolo sicuro. Quindi gli individui più avversi al rischio investiranno una frazione minore della propria ricchezza nel portafoglio di mercato e una frazione maggiore nel titolo sicuro. Il contrario accadrà per gli individui meno avversi al rischio. Questo è noto come risultato della "separazione in due portafogli" (*two-fund separation*): in equilibrio, tutti gli investitori hanno combinazioni diverse di due sole attività finanziarie, cioè il titolo sicuro e il portafoglio di mercato. La diversità della combinazione prescelta da ciascun investitore dipende dalla sua avversione al rischio.

1.3. Rappresentazione grafica

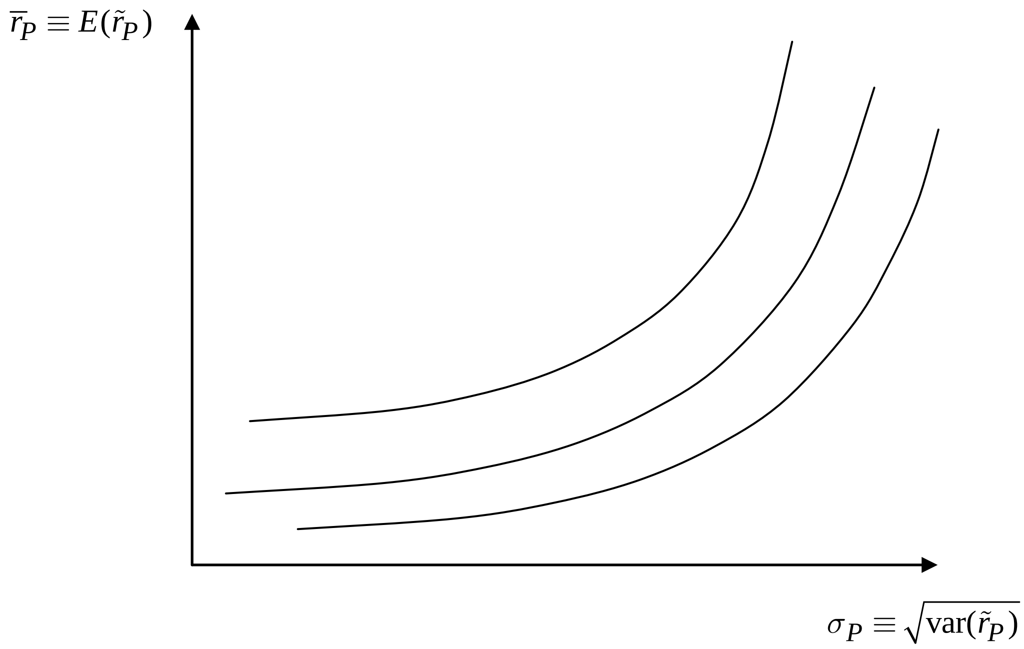
La versione standard del CAPM può essere illustrata graficamente in un diagramma in cui il valore atteso dei rendimenti è misurato sull'asse verticale e il loro scarto quadratico medio è misurata sull'asse orizzontale, come già abbiamo fatto nella Figura 17 del Capitolo 4. In quel capitolo, abbiamo già dimostrato che, se l'utilità è quadratica o i rendimenti sono normali, le curve di indifferenza sono crescenti e convesse quando vengono rappresentate in un diagramma di questo tipo. Lo stesso vale se gli investitori massimizzano una funzione media-varianza (1), che appunto può essere ricavata da una funzione di utilità quadratica o da un'esponenziale negativa in presenza di rendimenti normali.

Per vedere come i risultati del Capitolo 4 sulla forma delle curve di indifferenza possano essere riespresse con riferimento ai tassi di rendimento di portafogli alternativi, definiamo il tasso di rendimento di un generico portafoglio P scelto dall'individuo j con $\tilde{r}_P$, cioè $\tilde{w}_j = w_0(1+\tilde{r}_P)$, e supponiamo che il livello dell'utilità attesa (1) sia costante, ovvero:

$$\mathrm{E}[w_{0j}(1+\tilde{r}_P)] - \frac{\gamma_j}{2}\mathrm{var}[w_{0j}(1+\tilde{r}_P)] \equiv w_{0j}[1+\overline{r}_P] - \frac{\gamma_j}{2} w_{0j}^2 \sigma_P^2 = \text{costante}\,. \qquad (12)$$

Le curve di indifferenza corrispondenti a diversi valori della costante nell'equazione (12) avranno allora la forma mostrata dalla Figura 1, che è una versione adattata della Figura 17 del Capitolo 4, dove la media e lo scarto quadratico medio si riferiscono ai tassi di rendimento (invece che al livello) della ricchezza:

Figura 1. Curve di indifferenza basate sul criterio media-varianza



La pendenza e la curvatura delle curve di indifferenza dell'investitore sono ottenute differenziando implicitamente la (12) rispetto al rendimento atteso $\overline{r}_P$ e al suo scarto quadratico medio σ_P:

$$\frac{d\overline{r}_P}{d\sigma_p} = \gamma_j \sigma_p w_{0j}\,, \qquad \frac{d^2\overline{r}_P}{d\sigma_P^2} = \gamma_j w_{0j}\,.$$

La mappa delle curve di indifferenza nella Figura 1 ci dice come l'investitore *vorrà* scegliere tra tutti i portafogli possibili: a parità di scarto quadratico medio, egli preferirà un rendimento atteso più elevato; e, al crescere dello scarto quadratico medio, sarà sempre meno propenso ad accettare ulteriori aumenti di rischio in cambio di aumenti costanti del rendimento atteso. E ovviamente, curve di livello più elevato corrispondono ad un livello di utilità maggiore.

Resta però da capire che aspetto abbia l'insieme dei portafogli tra cui egli *potrà* scegliere, cioè l'insieme delle sue opportunità di investimento, se proviamo a rappresentarlo nello stesso grafico.

Cominciamo con il caso in cui l'individuo limiti la sua scelta solo ai due titoli rischiosi 1 e 2, e non investa nel titolo sicuro ($b_j = 0$). Il valore finale del suo portafoglio in questo caso sarà:

$$\tilde{w}_1 = w_{0j}(1+\tilde{r}_p) \equiv w_{0j}\left[1+(\alpha_1\tilde{r}_1+\alpha_2\tilde{r}_2)\right]$$

Per sottolineare che in questo caso le quote investite nei due titoli rischiosi sommano a 1, indichiamo con α indica la quota del titolo 1 (cioè ridefiniamo $\alpha_1 = \alpha$), e con $1-\alpha$ la quota del titolo 2 (cioè ridefiniamo $\alpha_2 = 1-\alpha$). Si noti che α può essere minore di 0 se si può vendere il titolo 1 allo scoperto, e può essere maggiore di 1 se si può vendere il titolo 2 allo scoperto.

Quindi il rendimento atteso del portafoglio *P* è:

$$\overline{r}_P = \alpha\overline{r}_1 + (1-\alpha)\overline{r}_2 = \overline{r}_2 + \alpha(\overline{r}_1 - \overline{r}_2)\,. \tag{13}$$

Se indichiamo la varianza dei rendimenti dei titoli 1 e 2 con σ_1^2 e σ_2^2, lo scarto quadratico medio del rendimento del portafoglio *P* è:

$$\sigma_P = \sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12}}\;, \tag{14}$$

dove la covarianza può essere anche scritta come il prodotto del coefficiente di correlazione e delle due deviazioni standard: $\sigma_{12} \equiv \rho\sigma_1\sigma_2$.

Le due equazioni (13) e (14) mostrano che sia il rendimento atteso $\overline{r}_P$ che lo scarto quadratico medio σ_P variano al variare di α. Quindi esiste una relazione tra $\overline{r}_P$ e σ_P. La forma di questa relazione dipende da tutti i parametri dei due rendimenti, e in particolare dalla loro correlazione ρ. Consideriamo innanzitutto i due casi estremi di rendimenti con correlazione positiva perfetta ($\rho = 1$) e correlazione negativa perfetta ($\rho = -1$), e poi il caso generale in cui la correlazione può assumere qualsiasi valore compreso questi due casi estremi.

1.3.1. Correlazione positiva perfetta

Se $\rho = 1$, lo scarto quadratico medio (14) diventa l'espressione di un quadrato perfetto:

$$\sigma_P = \sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2} = \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2 = \sigma_2 + \alpha(\sigma_1 - \sigma_2)\,.$$

Usando quest'espressione, possiamo definire la quota α del titolo 1 in funzione dello scarto quadratico medio σ_P:

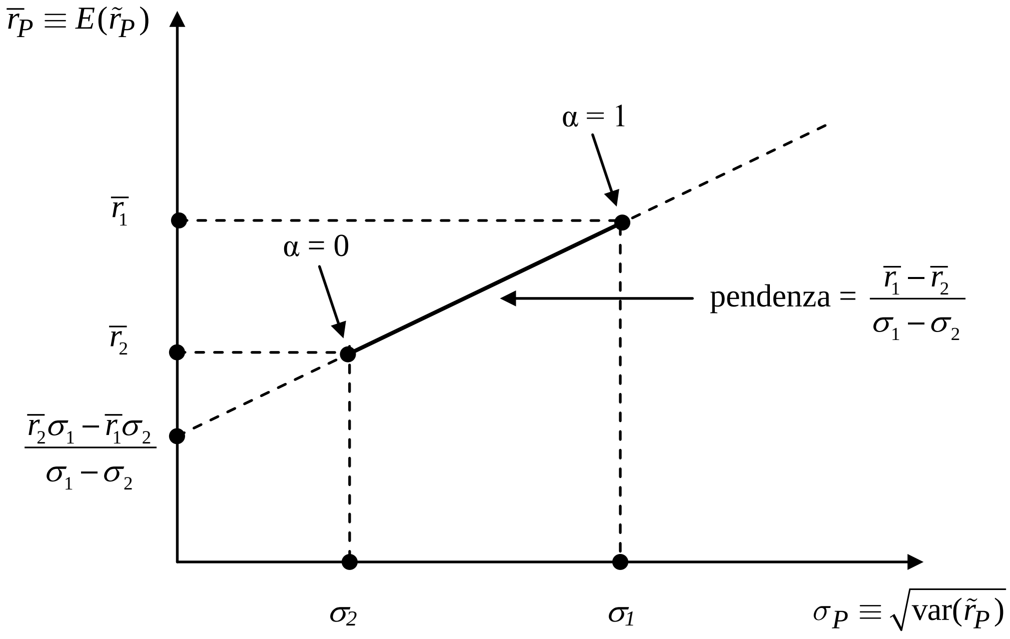
$$\alpha = \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\,,$$

e sostituirla nell'equazione (13), ottenendo una relazione lineare tra il rendimento atteso $\overline{r}_P$ e lo scarto quadratico medio σ_P:

$$\bar{r}_P = \bar{r}_2 + \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \frac{\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_P .$$

Questa relazione è illustrata nella Figura 2, dove si suppone che il titolo 1 abbia maggior rendimento atteso e maggior rischio rispetto al titolo 2. La figura mostra che in questo caso il portafoglio a varianza minima non contiene il titolo più rischioso ($\alpha = 0$), *se* non sono consentite vendite allo scoperto. Invece, se le vendite allo scoperto sono consentite, si può costruire un portafoglio con un rendimento sicuro $(\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$ vendendo allo scoperto il titolo 1 (scegliendo $\alpha = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$) e investendo più del 100% della ricchezza iniziale nel titolo 2.

Figura 2. Due titoli rischiosi con correlazione positiva perfetta

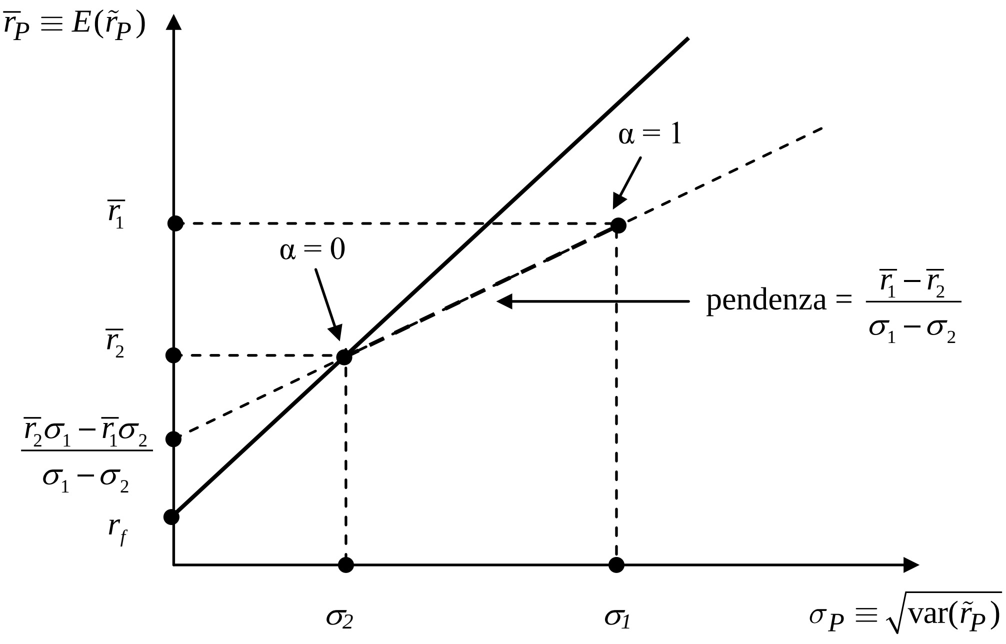


Se l'investitore dispone solo di questi due titoli rischiosi perfettamente correlati, il suo portafoglio ottimo corrisponde alla tangenza tra la semiretta nella Figura 2 (l'insieme dei portafogli possibili) e la curva di indifferenza più elevata. Questo punto di tangenza sarà tanto più a sinistra quanto più inclinate sono le curve di indifferenza, cioè quanto più avverso al rischio è l'investitore. Al limite, un investitore molto avverso al rischio potrebbe voler detenere una quantità nulla o negativa del titolo 1. Viceversa, quanto meno avverso al rischio è l'investitore, tanto maggiore il suo investimento nel titolo più rischioso: al limite, egli potrebbe voler detenere una quantità nulla o negativa del titolo 2, e investire il 100% o più del 100% della sua ricchezza nel titolo 1.

Se invece l'investitore ha a disposizione anche un titolo sicuro, allora occorre considerare varie possibilità. Supponiamo innanzitutto che il tasso di interesse r_f sia inferiore a $(\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$, che è l'intercetta verticale della semiretta nella Figura 2. Questa situazione è illustrata nella Figura 3. Allora, se non è possibile vendere il titolo 1 allo scoperto, la frontiera dei portafogli efficienti (quelli con massimo rendimento atteso per dato rischio) è data dalla linea continua nella Figura 3. Per valori dello scarto quadratico medio σ_P tra zero e σ_2 i portafogli efficienti comprendono soltanto quantità positive del titolo sicuro (debito) e del titolo 2. Per valori di σ_P maggiori di σ_2 essi comprendono quantità negative del titolo sicuro: l'investitore si indebita al tasso r_f e investe più del 100% della sua ricchezza nel titolo 2. Il titolo 1 invece è dominato.

Se invece è possibile vendere il titolo 1 allo scoperto, nel caso che stiamo considerando vi sarebbe la possibilità di arbitraggio: converrebbe indebitarsi al tasso r_f e investire nel portafoglio privo di rischio formato dai titoli 1 e 2, con un rendimento certo $(\bar{r}_2\sigma_1+\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)$ superiore al tasso di interesse r_f. Alla fine, i tassi di rendimento atteso si aggiusteranno finché $r_f=(\bar{r}_2\sigma_1-\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1-\sigma_2)$, e le due semirette coincideranno.

Figura 3. Due titoli rischiosi con correlazione positiva perfetta e un titolo sicuro, in assenza di vendite allo scoperto



Si lascia al lettore come un esercizio lo studio del caso opposto a quello della Figura 3, cioè quello in cui r_f è superiore a $(\bar{r}_2\sigma_1-\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1-\sigma_2)$.

1.3.2. Correlazione negativa perfetta

Se $\rho=-1$, lo scarto quadratico medio (14) è l'espressione di un diverso quadrato perfetto:

$$\sigma_P=\sqrt{\alpha^2\sigma_1^2+(1-\alpha)^2\sigma_2^2-2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2}=\pm\left[\alpha\sigma_1-(1-\alpha)\sigma_2\right]=\pm\left[-\sigma_2+\alpha(\sigma_1+\sigma_2)\right],$$

cosicché

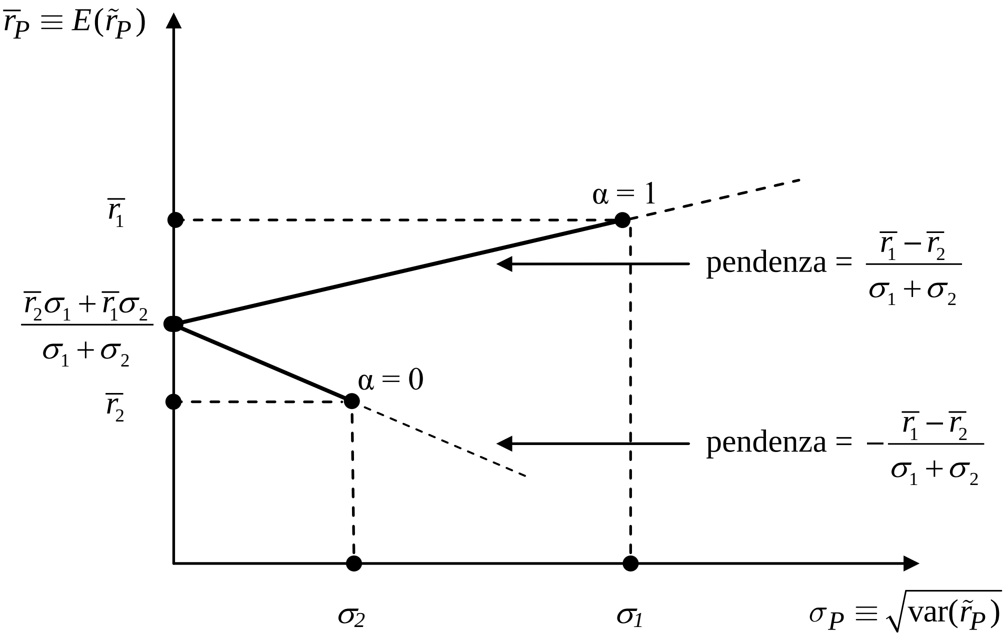
$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \pm \frac{\sigma_P}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Usando questa nuova espressione per eliminare α dall'equazione (13), si ottiene la seguente relazione tra il rendimento atteso $\bar{r}_P$ e lo scarto quadratico medio σ_P:

$$\bar{r}_P = \bar{r}_2 + \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \pm \frac{\sigma_P}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \frac{\bar{r}_2 \sigma_1 + \bar{r}_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_P.$$

Questa relazione mostra che in questo caso è possibile raggiungere un portafoglio a varianza zero e con rendimento atteso $(\bar{r}_2 \sigma_1 + \bar{r}_1 \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$, poiché i due titoli si immunizzano a vicenda se si sceglie $\alpha = \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)$.

Figura 4. Due titoli rischiosi con correlazione negativa perfetta



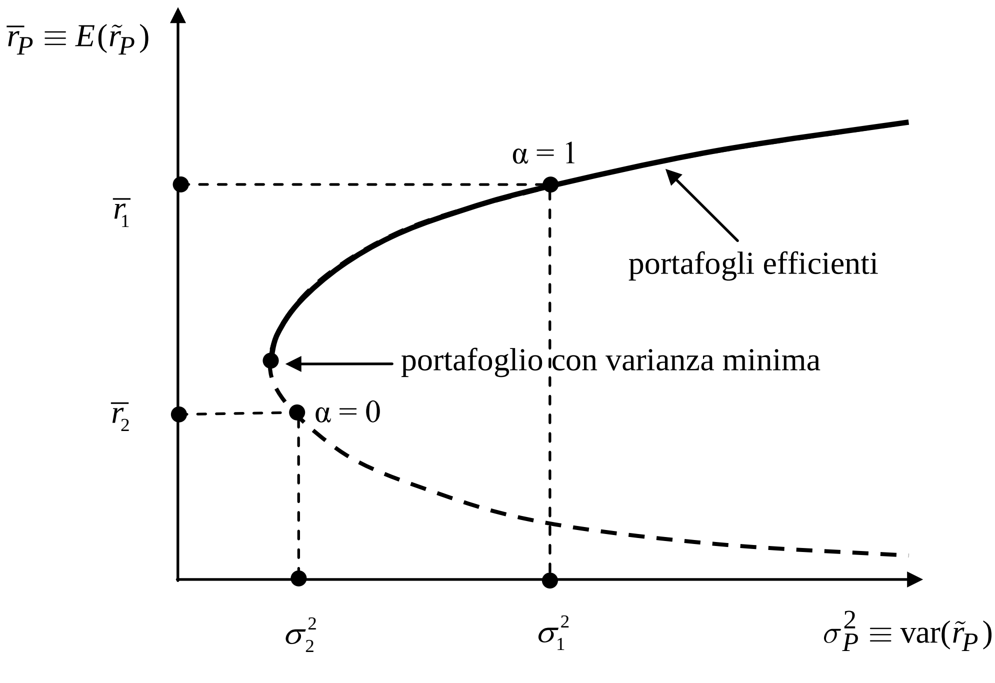
Se l'investitore non dispone di un titolo sicuro oltre a questi due titoli rischiosi, il suo portafoglio ottimo corrisponderebbe alla tangenza tra la semiretta inclinata positivamente e la curva di indifferenza più elevata. Tutti i portafogli sulla semiretta con inclinazione negativa sono dominati secondo il criterio media-varianza, poiché per ciascuno di essi esiste lungo la semiretta inclinata positivamente un portafoglio con la stessa rischiosità e un maggior rendimento atteso. Quindi la semiretta inclinata positivamente è la frontiera efficiente dell'insieme dei portafogli rischiosi.

Se si può investire anche nel titolo sicuro, dando o prendendo a prestito al tasso r_f, nasce la possibilità di arbitraggio in tutti i casi in cui il tasso di interesse r_f differisce dal tasso di rendimento certo $(\bar{r}_2\sigma_1+\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)$ del portafoglio a varianza minima. Se $r_f<(\bar{r}_2\sigma_1+\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)$, converrà indebitarsi al tasso r_f e investire la somma così ottenuta in questo particolare portafoglio formato dai due titoli rischiosi. Se invece $r_f>(\bar{r}_2\sigma_1+\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)$, converrà vendere questo portafoglio allo scoperto e prestare al tasso r_f la somma così ottenuta. Ma prima o poi quest'opportunità di arbitraggio scomparirà: il tasso di interesse e/o i rendimenti attesi dei titoli si aggiusteranno in modo da rendere $r_f=(\bar{r}_2\sigma_1+\bar{r}_1\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)$. Quindi, una volta esaurite le opportunità di arbitraggio, anche in presenza di un titolo sicuro la frontiera efficiente è data dalla semiretta crescente nella Figura 4.

1.3.3. Correlazione compresa tra –1 e 1

Per valori di ρ compresi tra −1 e 1, la frontiera dei portafogli che possono essere acquistati diventa una curva concava nella sua parte crescente e convessa in quella decrescente, cosicché i punti alla sua destra formano un insieme convesso, come mostrato nella Figura 5.

Figura 5. Due titoli rischiosi con correlazione intermedia nel piano media-varianza



Questa curva è una parabola nel piano varianza-media. Per dimostrarlo, trasformiamo l'equazione (13) in un'espressione che definisce la quota del titolo 1 in funzione del rendimento atteso $\bar{r}_P$:

$$\alpha=\frac{\bar{r}_P-\bar{r}_2}{\bar{r}_1-\bar{r}_2}, \qquad (13')$$

e usiamola per eliminare α dall'espressione della varianza:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$= \left(\frac{1}{\overline{r}_1 - \overline{r}_2}\right)^2 \left[\left(\overline{r}_P - \overline{r}_2\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\overline{r}_1 - \overline{r}_P\right)^2 \sigma_2^2 + 2\left(\overline{r}_P - \overline{r}_2\right)\left(\overline{r}_1 - \overline{r}_P\right)\rho\sigma_1\sigma_2 \right] \qquad (15)$$

Sviluppando i quadrati e i prodotti e raccogliendo i termini comuni, vediamo che questa è un'espressione lineare-quadratica in $\overline{r}_P$, che definisce una parabola nel piano media-varianza:

$$\sigma_P^2 = a + b\cdot\overline{r}_P + c\cdot\overline{r}_P^2$$

$$= \frac{\overline{r}_2^2\sigma_1^2 + \overline{r}_1^2\sigma_2^2 - 2\overline{r}_1\overline{r}_2\sigma_{12}}{\left(\overline{r}_1 - \overline{r}_2\right)^2} - \frac{2[\overline{r}_2\sigma_1^2 + \overline{r}_1\sigma_2^2 - (\overline{r}_1 + \overline{r}_2)\sigma_{12}]}{\left(\overline{r}_1 - \overline{r}_2\right)^2}\cdot\overline{r}_P + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}{\left(\overline{r}_1 - \overline{r}_2\right)^2}\cdot\overline{r}_P^2$$

Sia la costante a che il coefficiente c del termine quadratico sono positivi (poiché lo sarebbero perfino nel caso limite $\rho = 1$), mentre il coefficiente b del termine lineare è negativo per qualsiasi valore di ρ se $\overline{r}_1/\overline{r}_2 < \sigma_1/\sigma_2$ (ovvero se l'incremento percentuale di rendimento atteso offerto dal titolo 1 rispetto al titolo 2 è minore del corrispondente incremento di rischio).

Questa relazione è appunto quella rappresentata nella Figura 5 (sotto l'ipotesi che $b < 0$). Essa indica tutti i portafogli che possono essere formati con i due titoli rischiosi. Tuttavia, i portafogli nella parte inferiore (tratteggiata) della curva non sono efficienti in base al criterio media-varianza: ciascuno di essi è dominato da un portafoglio con pari varianza ma rendimento atteso maggiore nella parte superiore della parabola.

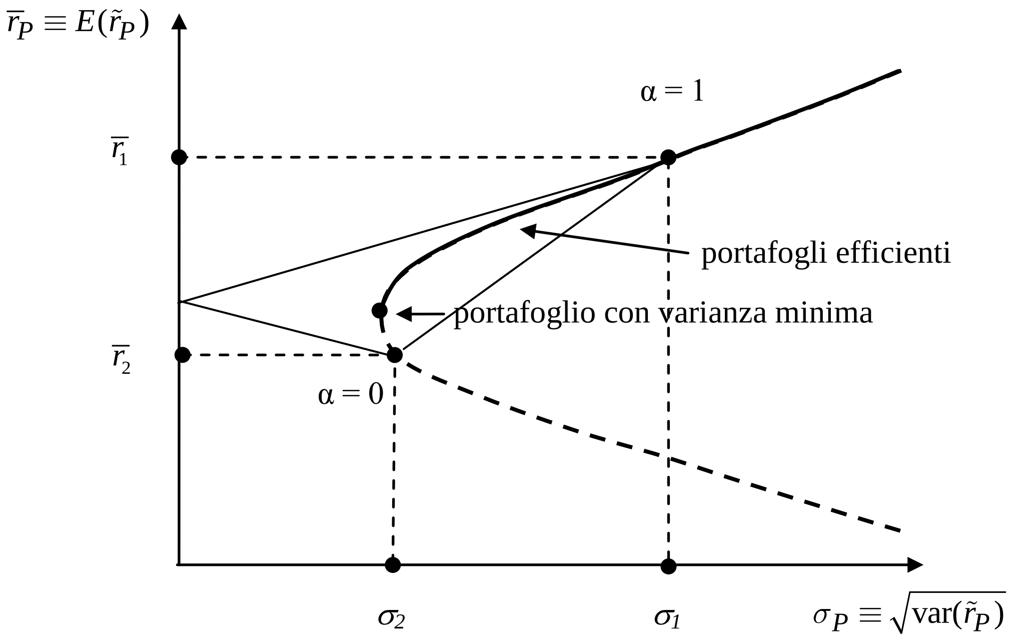
Si può dimostrare che questa stessa relazione è rappresentata da un'iperbole se sull'asse orizzontale misuriamo lo scarto quadratico medio invece della varianza, come mostrato nella Figura 6. Questa iperbole è un luogo geometrico intermedio rispetto alle linee dei portafogli possibili nei due casi precedenti: essa è infatti inscritta nel triangolo formato dai segmenti che rappresentano i portafogli possibili nei casi estremi ottenuti con $\rho = 1$ e $\rho = -1$.

La posizione e la forma dell'iperbole all'interno del triangolo può essere individuata studiando la posizione del portafoglio a varianza minima, che è il punto estremo della curva verso sinistra, e vedendo come questo punto si sposta al variare del coefficiente correlazione ρ tra i due titoli. Il portafoglio a varianza minima si trova minimizzando la varianza, cioè in corrispondenza di:

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\overline{r}} = 2c\overline{r} + b = 0 \iff \overline{r}^* = -\frac{b}{2c} = \frac{\overline{r}_2\sigma_1^2 + \overline{r}_1\sigma_2^2 - (\overline{r}_1 + \overline{r}_2)\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}}, \quad \sigma_P^2(\overline{r}^*) = a - \frac{b^2}{4c}.$$

Come si vede, la condizione che $b < 0$ garantisce che il portafoglio a varianza minima dia un rendimento atteso positivo ($\overline{r}^* > 0$), come supposto nella Figura 5. Il lettore potrà controllare che la condizione di secondo ordine per un punto di minimo è soddisfatta.

Figura 6. Due titoli rischiosi con correlazione intermedia nel piano media-deviazione standard



La composizione del portafoglio a varianza minima si ottiene minimizzando l'espressione (15) rispetto ad α:

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 2\left[\alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) - (\sigma_2^2 - \sigma_{12})\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}. \tag{16}$$

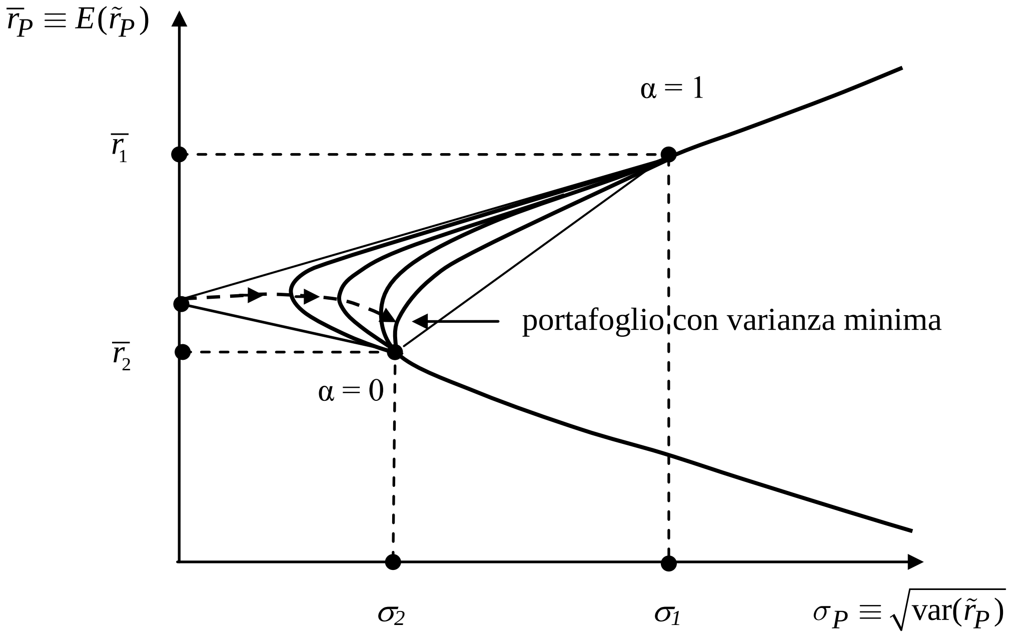
Questa espressione comprende come casi speciali le espressioni che abbiamo già trovato con correlazione perfetta positiva e con correlazione perfetta negativa. Infatti se $\rho = 1$, abbiamo $\alpha^* = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$; se invece $\rho = -1$, allora $\alpha^* = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$.

La Figura 7 mostra come si sposta l'iperbole che rappresenta l'insieme dei portafogli possibili man mano che ρ aumenta: essa si sposta gradualmente verso destra come mostra la freccia, e tende ad appiattirsi sul segmento che congiunge i punti corrispondenti ai due titoli 1 e 2. Il risultato della Figura 7 è intuitivo: all'aumentare della correlazione ρ, il portafoglio a varianza minima diventa più rischioso, perché le possibilità di diversificazione si riducono. Possiamo dimostrarlo calcolando la derivata della varianza del portafoglio a varianza minima rispetto a ρ:

$$\left.\frac{d\sigma_P^2}{d\rho}\right|_{\alpha=\alpha^*} = \underbrace{\left.\frac{\partial\sigma_P^2}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} \frac{d\alpha}{d\rho}}_{=0} + \left.\frac{\partial\sigma_P^2}{\partial\rho}\right|_{\alpha=\alpha^*} = 2\alpha^*(1-\alpha^*)\sigma_1\sigma_2,$$

dove il primo termine è pari a zero in base alla (16) (un'applicazione del teorema dell'inviluppo). Come si vede, la derivata è positiva per $0 < \alpha^* < 1$, cioè finché il portafoglio a varianza minima non comporta vendite allo scoperto di uno dei due titoli. Quindi, man mano che ρ aumenta da -1 a σ_2 / σ_1, la rischiosità del portafoglio a varianza minima aumenta da 0 a σ_2^2 (mentre α^* si riduce da $\sigma_2 /(\sigma_1 + \sigma_2)$ a 0). Al contempo, il rendimento atteso del portafoglio a varianza minima si riduce, come si può controllare differenziando rispetto a ρ l'espressione di $\overline{r}^*$ trovata più sopra.

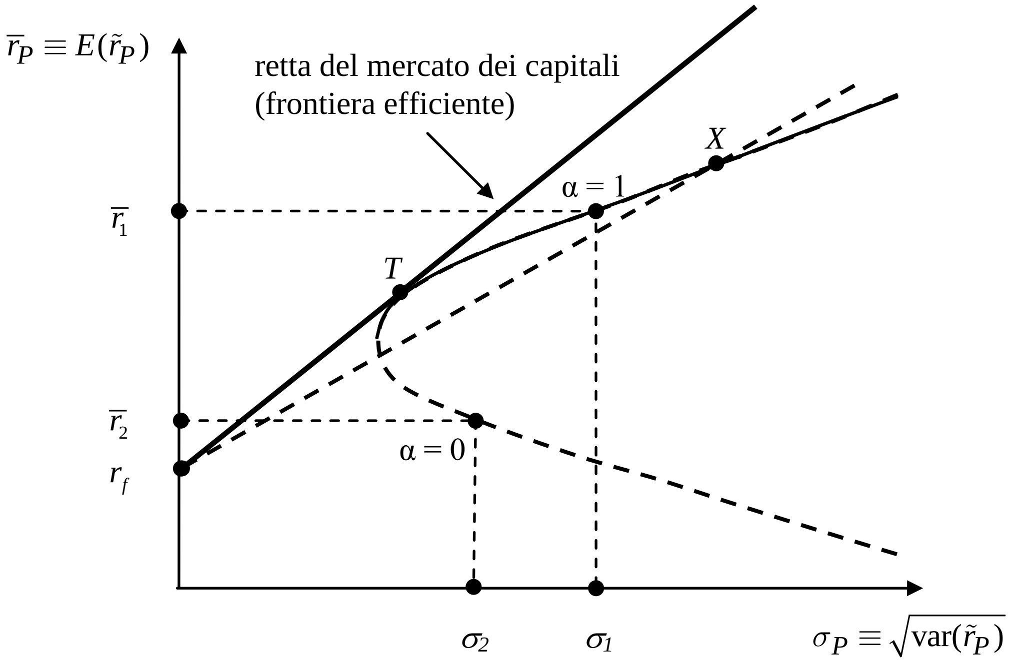
Figura 7. Variazione dell'insieme dei portafogli formati da due titoli rischiosi al variare della correlazione ρ



A questo punto, se vogliamo tener conto anche della possibilità di investire nel titolo sicuro con rendimento r_f, dobbiamo modificare il diagramma come mostrato nella Figura 8. Si consideri un qualsiasi portafoglio X sulla frontiera efficiente formata solo con i due titoli rischiosi. Mescolando questo portafoglio con il titolo sicuro, si ottengono nuovi portafogli, situati sulla semiretta (tratteggiata nella figura) che parte dal punto r_f sull'asse verticale e inteserca l'iperbole nel punto X.

Tutte le semirette così ottenute giacciono però al di sotto della semiretta tangente alla frontiera formata con i soli due titoli rischiosi: la semiretta tratteggiata che passa per il punto X giace al di sotto di quella tangente che passa per il punto T. Quindi i portafogli che combinano il titolo sicuro con il portafoglio di tangenza T dominano tutti gli altri: essi definiscono la frontiera efficiente.

Figura 8. Frontiera efficiente con due titoli rischiosi (correlazione intermedia) e un titolo sicuro



Per ottenere l'equazione della frontiera efficiente, si consideri un quasiasi portafoglio P che appartiene a questa retta, cioè formato in proporzione β dal titolo sicuro e in proporzione $1-\beta$ dal portafoglio di tangenza T. Il rendimento atteso di tale portafoglio P è:

$$\bar{r}_P = \beta r_f + (1-\beta)\bar{r}_T = r_f + (1-\beta)(\bar{r}_T - r_f)\,,$$

e la sua deviazione standard è:

$$\sigma_P = \sqrt{(1-\beta)^2 \sigma_T^2} = (1-\beta)\sigma_T\,.$$

Sostituendo $1-\beta = \sigma_P / \sigma_T$ nell'espressione del rendimento atteso, si ha l'equazione della frontiera efficiente:

$$\bar{r}_P = r_f + \frac{\bar{r}_T - r_f}{\sigma_T}\sigma_P\,, \qquad (17)$$

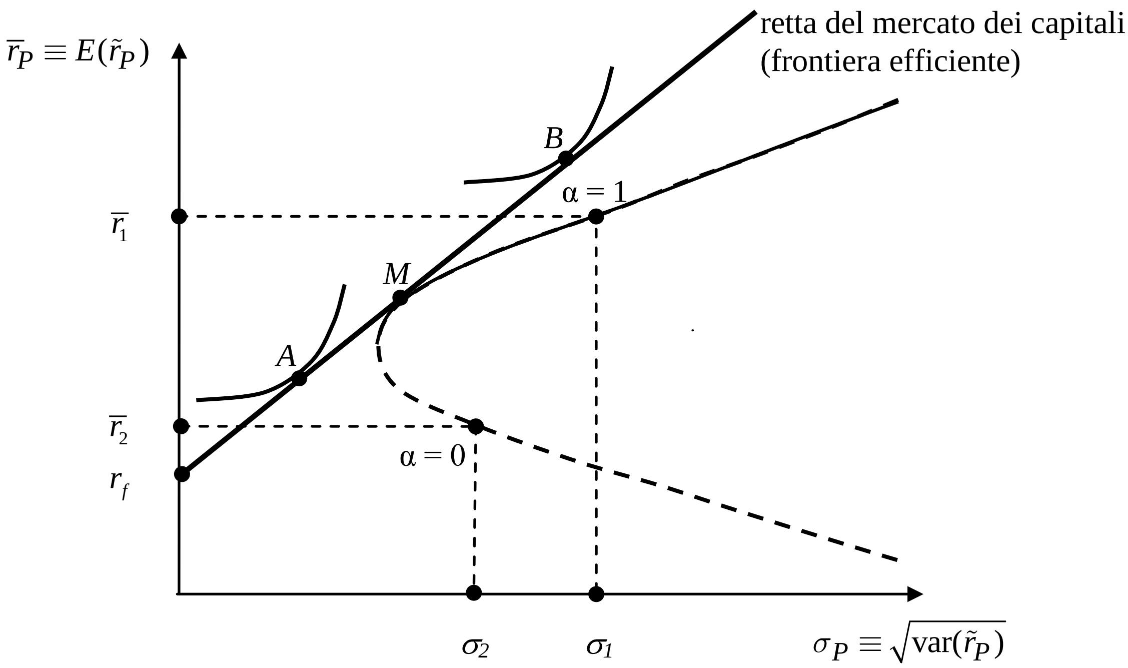
la cui intercetta è il tasso di interesse r_f e il cui coefficiente angolare è il "premio unitario per il rischio" del portafoglio di tangenza: l'extra-rendimento atteso $\bar{r}_T - r_f$ scalato per il rischio σ_T. Poiché il rapporto tra extra-rendimento atteso e deviazione standard è noto in finanza come "rapporto di Sharpe" (*Sharpe ratio*), la frontiera efficiente è il luogo geometrico dei portafogli con il massimo rapporto di Sharpe.

Ogni investitore vorrà scegliere un portafoglio lungo questa frontiera efficiente, e quindi deterrà una combinazione del titolo sicuro e del portafoglio di tangenza *T*. Gli investitori più avversi al rischio (cioè con curve di indifferenza "più ripide") sceglieranno un portafoglio con un valore maggiore di β (una maggior percentuale del titolo sicuro), come il punto A nella Figura 9.

Il contrario avverrà per gli investitori meno avversi al rischio, che potranno addirittura voler investire più del 100% della propria ricchezza nel portafoglio di tangenza, indebitandosi al tasso di interesse r_f e così accrescendo sia il rendimento atteso che il rischio del proprio portafoglio oltre quelli del portafoglio di tangenza. Ciò avviene ad esempio in corrispondenza del punto B nella Figura 9.

Tuttavia, *ogni* investitore deterrà i due titoli rischiosi nelle proporzioni in cui essi sono presenti nel portafoglio di tangenza. Ne segue che in equilibrio il portafoglio di tangenza *T* deve coincidere con il portafoglio di mercato *M*.

Figura 9. Equilibrio con due titoli rischiosi e un titolo sicuro



Ritroviamo qui, attraverso questa dimostrazione grafica ed intuitiva, il risultato della "separazione in due portafogli" che abbiamo mostrato algebricamente nel paragrafo 1.2. La coincidenza tra il portafoglio di tangenza *T* e il portafoglio di mercato *M* ci consente di riscrivere la frontiera efficiente nel modo seguente:

$$\overline{r}_P = r_f + \frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P \,. \tag{17'}$$

Questa espressione, nota come “retta del mercato dei capitali” (*capital market line*), è una delle due relazioni fondamentali del CAPM (l’altra relazione è la “retta di mercato dei titoli” ottenuta nel paragrafo 1.2). Essa indica che qualsiasi portafoglio efficiente *P* ha un extra-rendimento atteso pari al premio unitario per il rischio sul portafoglio di mercato $(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M$ moltiplicato per il rischio del portafoglio *P*, cioè σ_P.

La pendenza della retta $(\bar{r}_M - r_f)/\sigma_M$ è detta anche “prezzo di mercato del rischio”, poiché è il saggio marginale di trasformazione tra rischio e rendimento atteso offerto dal mercato, $d\bar{r}_P / d\sigma_P^2$. Poiché come mostrato nella Figura 9 la scelta ottima di ciascun investitore è data dalla condizione di tangenza tra la sua curva di indifferenza e la retta del mercato dei capitali, in equilibrio ciascun investitore *j* uguaglia il proprio saggio marginale di sostituzione con questo valore comune, cioè ha lo stesso *tradeoff* tra rischio e rendimento atteso. Come abbiamo visto all’inizio di questo paragrafo, il saggio marginale di sostituzione dell’investitore *j* è $\gamma_j \sigma_P w_{0j}$. Poiché in equilibrio lo scarto quadratico medio σ_P del portafoglio di ogni investitore *j* è semplicemente $\alpha_j \sigma_M$, dove α_j è la frazione della sua ricchezza investita nel portafoglio di mercato, possiamo riscrivere la condizione di uguaglianza tra prezzo di mercato del rischio e saggio marginale di sostituzione come segue:

$$\frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_p} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} = \gamma_j \alpha_j \sigma_M w_{0j}, \text{ per } j = 1, 2, ..., M \text{ ,}$$

ovvero in modo equivalente:

$$\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2} = \gamma_j \alpha_j w_{0j}, \text{ per } j = 1, 2, ..., M \text{ .}$$

Poiché l’espressione sul lato sinistro è costante, quest’ultima equazione conferma che gli investitori con maggiore avversione al rischio γ_j vorranno investire una quantità minore di risorse nel portafoglio di mercato, cioé sceglieranno un ammontare $\alpha_j w_{0j}$ proporzionalmente minore.

2. Il modello con *N* titoli rischiosi e uno sicuro

Ora che abbiamo capito come funziona la versione standard del CAPM con due soli titoli rischiosi e uno sicuro, è facile generalizzarlo al caso in cui i titoli rischiosi sono un qualsiasi numero *N*, anche maggiore di 2. Tutte le altre ipotesi e le altre definizioni restano invariate: per esempio, la funzione obiettivo dell’investitore *j* è ancora data dall’equazione (1), e l’offerta di tutti i titoli è data. La sola novità è che ciascuno degli *M* investitori può scegliere all’interno di un menu di $N+1$ titoli, di cui *N* rischiosi (“azioni”) e uno sicuro (“debito”). Indicizziamo gli *N* titoli rischiosi con *i* = 1, 2, …, *N* .

Estendendo la definizione della ricchezza finale dell'individuo j dell'equazione (2) al caso di N titoli rischiosi, ora abbiamo:

$$\tilde{w}_{1j} = \left[1 + r_f + \alpha_{1j}(\tilde{r}_1 - r_f) + ... + \alpha_{Nj}(\tilde{r}_N - r_f)\right] w_{0j},$$

che può essere scritta in modo più compatto con il simbolo di sommatoria:

$$\tilde{w}_{1j} = \left[1 + r_f + \sum_{i=1}^{N} (\tilde{r}_i - r_f)\alpha_{ij}\right] w_{0j}. \tag{18}$$

Sostituendo il vincolo (18) nella funzione obiettivo (1), il problema dell'investitore j diventa il problema di scelta dei pesi degli N titoli rischiosi α_{ij} nel suo portafoglio, per i = 1, 2, …, N:

$$\max_{\{\alpha_{ij}\}_{i=1}^{N}} \ \mathrm{E}\left[(1 + r_f) + \sum_{i=1}^{N} (\tilde{r}_i - r_f)\alpha_{ij}\right] w_{0j} - \frac{\gamma_j}{2} \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i \alpha_{ij} w_{0j}\right). \tag{19}$$

Nell'appendice a questo capitolo, si dimostra che la soluzione di questo problema è molto simile a quella mostrata nel paragrafo 1 con riferimento al caso di due soli titoli rischiosi: si calcola la condizione di primo ordine per ciascun titolo i, poi si sommano tale condizione per tutti gli investitori, si divide per il loro numero e si impongono le N condizioni di equilibrio. Così facendo, si ottiene per ciascun titolo i la stessa condizione ottenuta nella (9') e nella (10'), nonché la condizione (11) per il portafoglio di mercato. Utilizzando congiuntamente tali condizioni, si ottiene infine l'equazione della retta del mercato dei titoli, cioè una relazione uguale alla (9") e (10") ottenute in presenza di due soli titoli rischiosi:

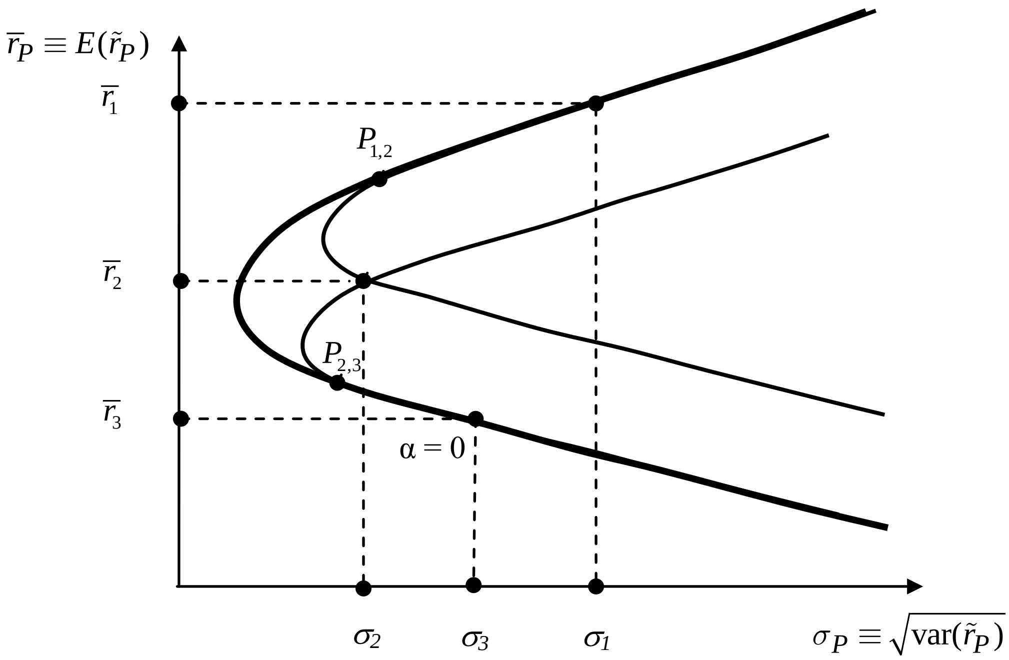
$$\bar{r}_i^* - r_f = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M^* - r_f) = \beta_i(\bar{r}_M^* - r_f). \tag{20}$$

Nel caso di N titoli rischiosi, anche la rappresentazione grafica del problema di scelta degli investitori è qualitativamente invariata rispetto al caso con due soli titoli. L'unica differenza è che è più complesso derivare la frontiera efficiente. Tuttavia, ai nostri scopi basta dimostrare che la frontiera definisce un insieme strettamente convesso come nel caso con due soli titoli rischiosi. Da ciò segue che la retta del mercato dei capitali è anche in questo caso l'unica tangente alla frontiera efficiente, e così via.

Per costruire induttivamente la frontiera efficiente, consideriamo un caso con tre titoli rischiosi: 1, 2 e 3. Il luogo geometrico dei portafogli che possono essere costruiti con i titoli 1 e 2 sarà un'iperbole come nel caso con due titoli. Lo stesso varrà per la curva dei portafogli che possono essere costruiti con i titoli 2 e 3. Ma a loro volta i portafogli così ottenuti possono essere combinati tra loro ottenendo altrettante curve di tipo iperbolico. La Figura 10 illustra questa possibilità con riferimento al portafoglio $P_{1,2}$ (formato con i titoli 1 e 2) e al portafoglio $P_{2,3}$ (formato con i titoli 2 e 3). Combinandoli tra loro, è possibile ottenere un'iperbole che "inviluppa" quelle ottenute da ciascuna delle due coppie di titoli. In tal modo, è possibile eliminare qualsiasi non-convessità dall'insieme dei portafogli. La frontiera dell'insieme dei portafogli realizzabili sarà l'"inviluppo" delle frontiere ottenute combinando a coppie gli *N* titoli elementari, come mostrato nella Figura 10.

Come nel caso di due soli titoli, solo la parte crescente della curva così ottenuta è la frontiera efficiente. Tutti i punti all'interno dell'insieme convesso delimitato dalla curva (nonché quelli sulla parte decrescente della curva stessa) sono dominati. Tuttavia, ciò non vuol dire che i titoli o portafogli all'interno della frontiera siano ridondanti: basti notare che il titolo 2 e il titolo 3 sono dominati, ma ciononostante sono essenziali per poter costruire la frontiera efficiente stessa. Infatti il contributo di un titolo alla costruzione della frontiera efficiente non dipende sono dal suo rendimento medio e dalla sua varianza, ma anche dalla sua covarianza con gli altri titoli. Un titolo con covarianza bassa o addirittura negativa con gli altri può dare un contributo fondamentale ai portafogli della frontiera efficiente, anche se ha minor rendimento atteso e maggiore varianza di tutti gli altri titoli.

Figura 10. Frontiera efficiente con N titoli rischiosi



Anche in questo caso, così come nel caso di due soli titoli rischiosi, introdurre un titolo sicuro cambia drasticamente la frontiera efficiente, poiché la rende lineare. Il resto della trattazione grafica dell'equilibrio – la derivazione della retta del mercato dei capitali – segue da vicino quella già svolta alla fine del paragrafo 1.3.3, e quindi non vale la pena di ripeterla.

3. Verifiche empiriche del CAPM

La principale previsione empirica del CAPM è la retta del mercato dei titoli, cioè l'equazione (20), che deve valere per ogni data *t* e ogni titolo *i*:

$$\mathrm{E}(\tilde{r}_{it}) - r_{ft} = \beta_i (\mathrm{E}(\tilde{r}_{Mt}) - r_{ft}) . \tag{21}$$

Questa relazione è anche nota come la forma "ex ante" del CAPM perché si riferisce a valori attesi dei rendimenti dei titoli e del portafoglio di mercato, che non sono empiricamente osservabili. Per poter raffrontare questa relazione con i valori osservati dei rendimenti, dobbiamo ipotizzare che le aspettative degli investitori siano razionali, ovvero siano in media corrette, cosicché gli errori di previsione dei rendimenti siano in media pari a zero. Se tale ipotesi fosse violata, cioè, gli investitori compirebbero errori sistematici nella formazione delle proprie aspettative. Poiché i rendimenti osservati sono pari alla somma del loro valore atteso e del rispettivo errore di previsione:

$$\tilde{r}_{it} = \mathrm{E}(\tilde{r}_{it}) + \tilde{u}_{it} . \tag{22}$$

$$\tilde{r}_{Mt} = \mathrm{E}(\tilde{r}_{Mt}) + \tilde{\delta}_{Mt} , \tag{23}$$

l'ipotesi di aspettative razionali richiede che $\mathrm{E}(\tilde{u}_{it}) = \mathrm{E}(\tilde{\delta}_{Mt}) = 0$. Essa richiede anche che gli errori di previsione u_{it} e δ_{Mt} non siano autocorrelati, cioè $\mathrm{E}(\tilde{u}_{it}\tilde{u}_{it-\tau}) = \mathrm{E}(\tilde{\delta}_{Mt}\tilde{\delta}_{Mt-\tau}) = 0$, per ogni $\tau > 0$: se così non fosse, essi potrebbero esser previsti sulla base dei loro valori passati, il che vorrebbe dire che gli investitori non sfruttano in modo efficiente tutte le informazioni disponibili (inclusi i loro stessi errori di previsione passati) nel formare le loro aspettative $\mathrm{E}(\tilde{r}_{it})$ e $\mathrm{E}(\tilde{r}_{Mt})$.

Inoltre ipotizziamo, come già nel Capitolo 6, che i rendimenti di ciascun titolo siano generati dal "modello di mercato", cioè da un processo statistico con un singolo fattore aggregato, data dalla componente imprevista $\tilde{\delta}_M$ del rendimento del portafoglio di mercato, e un fattore idiosincratico $\tilde{\varepsilon}_{it}$, cioè relativo allo specifico titolo *i* e non correlato con il fattore aggregato:

$$\tilde{r}_{it} = \mathrm{E}(\tilde{r}_{it}) + \beta_i \tilde{\delta}_M + \tilde{\varepsilon}_{it} , \tag{24}$$

dove si ipotizza che anche il fattore idiosincratico abbia media zero ($\mathrm{E}(\tilde{\varepsilon}_{it}) = 0$). L'ipotesi che non vi sia correlazione tra la componente aggregata e quella idiosincratica equivale a porre $\mathrm{E}(\tilde{\delta}_{Mt}\tilde{u}_{it}) = 0$. Combinando il modello di mercato (24) con l'ipotesi di aspettative razionali (22) vediamo che l'errore di previsione dei rendimenti dei singoli titoli è formato da una componente aggregata e una idiosincratica, entrambe a media zero ed non autocorrelate: $\tilde{u}_{it} = \beta \tilde{\delta}_M + \tilde{\varepsilon}_{it}$.

Sostituendo la (22) e nella (21), abbiamo

$$\tilde{r}_{it} - r_{ft} = \beta_i (\tilde{r}_{Mt} - r_{ft}) + \tilde{\varepsilon}_{it} , \tag{25}$$

che è la forma "ex post" del CAPM, poiché si riferisce ai rendimenti osservati (invece che a quelli attesi), e quindi è una relazione che può essere stimata con le serie storiche dei rendimenti, e quindi verificare le previsioni del CAPM. È importante notare però che la relazione (25) non rappresenta solo il CAPM, ma racchiude congiuntamente in sé tre ipotesi: CAPM, aspettative razionali e modello di mercato. Quindi stimare di tale relazione per verificare empiricamente le previsioni del CAPM significa in realtà verificare congiuntamente tutte e tre queste ipotesi.

In quanto segue, presenteremo due metodi che sono stati ampiamente utilizzati per verificare empiricamente le predizioni del CAPM sulle differenze tra rendimenti all'interno di un campione di titoli. Il primo si basa su regressioni stimate con le serie storiche (*time series*) dei rendimenti dei titoli e del mercato, mentre il secondo si basa su regressioni stimate con la sezione (*cross section*) dei rendimenti e dei beta in varie date successive nel tempo.

3.1. Regressioni con serie storiche

Un primo modo per effettuare la stima del CAPM è stimare l'equazione (25) con una regressione per ciascun titolo, usando come variabile dipendente la serie storica del suo extra-rendimento, e come variabile indipendente quella dell'extra rendimento del portafoglio di mercato. Usando alcune varianti di questa equazione, è possibile verificare alcune predizioni del CAPM, come mostrato da Black, Jensen e Scholes (1972):[1]

1) Aggiungendo una costante α_i nell'equazione (25), $\tilde{r}_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i(\tilde{r}_{Mt} - r_{ft}) + \tilde{\varepsilon}_{it}$, possiamo verificare se l'ipotesi che $\alpha_i = 0$ è rifiutata dai dati. Per esempio, possiamo effettuare un t-test per verificare l'ipotesi che il coefficiente stimato $\hat{\alpha}_i$ sia zero, oppure un F-test per verificare l'ipotesi congiunta che i coefficienti stimati $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_N$ degli *N* titoli nel campione siano tutti pari a zero. Se il coefficiente stimato $\hat{\alpha}_i$ risulta significativamente maggiore di zero, se ne può concludere che il CAPM è falso, nel senso che il titolo *i* ha dei rischi che non sono adeguatamente descritti dai beta ma per i quali gli investitori richiedono ugualmente di essere compensati, oppure che il CAPM è vero ma il titolo *i* è sottovalutato dal mercato, per cui ha la sua "alfa di Jensen" è positiva. Operativamente, queste due interpretazioni suggeriscono scelte di portafoglio molto diverse: in base alla prima, il CAPM non è una buona guida nelle scelte di portafoglio ma da ciò non segue alcuna indicazione sull'opportunità di comprare o vendere il titolo *i*, mentre la seconda interpretazione suggerisce che il titolo vada acquistato, essendo sottovalutato.

2) Se aggiungiamo altre variabili alla regressione (25), in base al CAPM esse non dovrebbero avere potere esplicativo, cioè i loro coefficienti non devono essere significativamente diversi da zero, perché il rischio da covarianza misurato da β_i e il premio per il rischio sul mercato $\tilde{r}_{Mt} - r_{ft}$ dovrebbero spiegare completamente l'extra-rendimento del titolo *i*.

Generalmente queste regressioni sono stimate sui rendimenti di portafogli invece che di singoli titoli, per ridurre l'errore di misurazione nella stima dei beta, in modo da evitare di rifiutare il modello a causa di poche osservazioni anomale. Ovviamente ciò pone la necessità di identificare un

[1] Fischer Black, Myron S. Scholes and Michael C. Jensen, "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests", in *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger Publishers Inc., 1972.

"buon insieme" di portafogli su cui effettuare la verifica empirica: generalmente i portafogli vengono formati scegliendo titoli emessi da società con caratteristiche simili, per esempio di dimensioni simili e dello stesso settore.

L'equazione (25) può essere stimata con vari metodi. Se si suppone che i rendimenti abbiano una distribuzione di probabilità congiuntamente normale, α_i e β_i possono essere stimati con il metodo dei minimi quadrati ordinari (*ordinary least squares*: OLS) o il metodo della massima verosimiglianza (*maximum likelihood*: ML). Altrimenti, si può utilizzare il metodo generalizzato dei momenti (*generalized method of moments*: GMM), che non richiede ipotesi sulla distribuzione dei rendimenti. Tale metodo sfrutta le condizioni sui momenti (cioè su valori attesi e covarianze) previste dal modello: per esempio, poiché le due condizioni sui momenti $\mathrm{E}\left[(\tilde{r}_{Mt} - r_{ft})\tilde{\varepsilon}_{it}\right] = 0$ e $\mathrm{E}(\tilde{\varepsilon}_{it}) = 0$ devono valere per ogni titolo, esse forniscono 2*N* equazioni in 2*N* incognite (α_i e β_i per ciascuno degli *N* titoli), cosicché il sistema è perfettamente identificato.

Un prerequisito per la stima di queste regressioni è la misurazione del portafoglio di mercato, $\tilde{r}_{Mt}$. Quale sia il portafoglio complessivo rilevante per le scelte di portafoglio degli investitori non è affatto ovvio. In linea di principio, esso potrebbe essere l'insieme dei titoli quotati e trattati sul mercato azionario, per cui il rendimento $\tilde{r}_{Mt}$ potrebbe essere misurato con la variazione percentuale di un indice di mercato. Ma in tal caso, a quale mercato – e quindi a quale indice – occorre fare riferimento: quello statunitense, quello europeo o quello globale? E occorre limitarsi solo alle azioni o includere anche altri strumenti finanziari, come le obbligazioni societarie e i titoli del debito pubblico? O si deve considerare anche attività patrimoniali non finanziarie, come gli immobili? E cosa dire delle azioni delle società non quotate?

Roll (1977) ha notato che in realtà la verifica empirica del CAPM richiede osservazioni sul rendimento dell'intero portafoglio di attività rischiose delle famiglie, in cui tutte le attività fin qui menzionate sono incluse.[2] Invece quasi tutte le verifiche empiriche del CAPM si basano su definizioni del portafoglio di mercato molto meno complete: tipicamente il rendimento del mercato è definito come la variazione percentuale di un indice azionario relativo a un ampio numero di titoli. Roll ha criticato questo tipo di verifiche empiriche, notando che un eventuale rifiuto delle predizioni del CAPM basata su una verifica che usa un dato indice azionario non implica che il CAPM è necessariamente falso: potrebbe essere solo che la definizione del "mercato" usata nella verifica empirica non coglie adeguatamente il vero portafoglio di mercato. Allo stesso modo, anche nel caso in cui una verifica empirica del CAPM concluda che le sue previsioni *non* sono rifiutate, cioè sono compatibili con i dati, non si può concludere che il CAPM sia corretto: anche tale conclusione potrebbe dipendere solo dall'uso di una definizione sbagliata del portafoglio di mercato. Essenzialmente, la "critica di Roll" comporta che il CAPM non è verificabile empiricamente. Uno studio di Stambaugh (1982) ha mostrato che la critica di Roll è meno devastante di quanto potrebbe sembrare, poiché le stime non variano molto se si utilizzano misure del rendimento del portafoglio di mercato basate solo su indici azionari, su un portafoglio di azioni e obbligazioni, oppure su un

[2] Richard Roll, "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory", *Journal of Financial Economics*, Volume 4, numero 2, marzo 1977, pp. 129–176.

portafoglio di azioni, obbligazioni e immobili.[3] Tuttavia da tali portafogli restano escluse le società non quotate. Quindi in questo senso la critica di Roll resta rilevante.

3.2. Regressioni con campioni trasversali: il metodo di Fama e MacBeth

In un loro celebre articolo, Fama e MacBeth (1973) hanno proposto un altro metodo per stimare il CAPM e verificare le sue previsioni.[4] Questo metodo si articola in tre stadi:

1) Dopo aver formato dei portafogli composti da titoli di società omogenee per grandezza e settore, si stima l'equazione (24) con una regressione della serie storica dell'extra-rendimento di ciascun portafoglio sull'extra-rendimento del portafoglio di mercato: in tal modo si ottiene la stima $\hat{\beta}_i$ del coefficiente β_i di ogni portafoglio *i*. Questa stima viene spesso fatta su un primo sotto-campione di dati, per esempio relativi ai primi T_1 mesi di dati disponibili.

2) Si stimano le seguenti regressioni sul campione trasversale (*cross-section*) degli extra-rendimenti e dei $\hat{\beta}_i$ stimati nel primo stadio per ogni data (per esempio, per ogni mese):

$$\tilde{r}_{it} - r_{ft} = \alpha_t + \hat{\beta}_i \lambda_t + \tilde{\varepsilon}_{it}, \tag{26}$$

   in cui il termine $\lambda_t = \mathrm{E}(\tilde{r}_{Mt} - r_{ft})$ è un parametro stimato, e rappresenta il valore stimato del premio per il rischio del mercato (*market price of risk*) in ciascuna data. Queste regressioni vengono generalmente stimate sui dati relativi a un secondo sotto-campione di dati, relativi ai T_2 mesi successivi ai primi T_1 mesi (supponendo di avere in tutto osservazioni per $T = T_1 + T_2$ mesi). Quindi in questo secondo stadio si stimano T_2 regressioni.

3) Si calcola la media delle costanti $\hat{\alpha}_t$ per $t = 1, ..., T_2$ stimate nel secondo stadio, per sottoporre a test l'ipotesi che tale media sia zero, cioè:

$$\sum_{t=T_1+1}^{T_2} \frac{\hat{\alpha}_t}{T_2} = 0. \tag{27}$$

Se i rendimenti usati nelle T_2 regressioni sono identicamente e indipendentemente distribuiti (i.i.d.), lo sono anche le intercette stimate $\hat{\alpha}_t$, per cui la media (27) sarà distribuita come una statistica t. Per verificare se tale media sia zero – come previsto dal CAPM – si può quindi usare un semplice *t*-test. Inoltre si può verificare se nessun'altra variabile oltre al beta contribuisca a spiegare le differenze tra i rendimenti – come previsto dal CAPM. Tale verifica del CAPM può esser fatta aggiungendo tale variabile (per esempio, una misura della grandezza della società emittente) come

---

[3] Robert F Stambaugh, "On the Exclusion of Assets from Tests of the Two-Parameter Model: A Sensitivity Analysis", *Journal of Financial Economics*, volume 10, numero 3, novembre 1982, pp. 237–26.

[4] Eugene F. Fama e James D. MacBeth, "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, volume 81, numero 3, 1973, pp. 607-636.

un'ulteriore variabile esplicativa nell'equazione (26), e verificando se il suo coefficiente sia significativamente diverso da zero.

Inizialmente i risultati di queste verifiche sono stati coerenti con il CAPM (Fama, 1970), ma successivamente sono state riscontrate varie discordanze con le sue previsioni (Fama, 1991). Specificamente, si è riscontrato che α è positivo e significativamente diverso da zero:

1) per azioni con basso rapporto tra prezzo e utili (*price earnings ratio*, P/E),
2) per azioni emesse da società di piccole dimensioni,
3) per azioni con alto rapporto tra valore contabile e valore di mercato (*book to market ratio*),
4) per azioni che hanno avuto di recente rendimenti elevati.

Il risultato al punto 2 è noto come *size effect*: le azioni di società piccole rendono di più, a parità di rischio sistematico. Invece il risultato al punto 3 è noto come *value effect*: le società il cui valore contabile è relativamente alto rispetto al valore di mercato sono dette *value stocks* (tipicamente società mature e solide, ma senza forti prospettive di crescita), mentre quelle per cui tale rapporto è minore sono dette *growth stocks* (società con elevate prospettive di crescita). Queste due regolarità statistiche potrebbero essere spiegate supponendo che le società piccole e quelle mature presentano rischi che non sono adeguatamente misurati dai rispettivi beta, e quindi richiedono l'introduzione di altri fattori di rischio nel modello, oltre a quello previsto dal CAPM.

Il risultato al punto 4 è più difficile da spiegare. Una possibilità è che i beta delle azioni non siano costanti nel tempo, ma cambino in modo autocorrelato nel tempo, dando luogo a cicli prevedibili nei rendimenti attesi (vedremo nel capitolo 10 perché ciò possa accadere). Un'altra è che una parte degli investitori formi le proprie aspettative sui rendimenti futuri in modo irrazionale, per esempio estrapolando dai rendimenti passati, e così generi ondate di acquisti ingiustificati di azioni che di recente hanno avuto rendimenti elevati (e vendite altrettanto ingiustificate di quelle che di recente hanno avuto bassi rendimenti), inducendo autocorrelazione positiva nei rendimenti delle azioni.

Un'altra possibilità è ovviamente che il metodo di stima del CAPM proposto da Fama e MacBeth sia viziato da problemi econometrici. In effetti, il fatto di usare nel secondo stadio i beta stimati al primo stadio è problematico, in quanto questi beta non sono dati, ma coefficienti stimati, e in quanto tali caratterizzati da un errore di stima. Tuttavia, questo problema può esser risolto correggendo gli *standard errors* delle stime nel secondo stadio. Inoltre, i rendimenti potrebbero essere autocorrelati, invece che indipendenti nel tempo; ma anche questo problema può esser superato correggendo il test sopra descritto. Più seria è la critica di Roll, che si applica anche al metodo di Fama e MacBeth: è perfettamente possibile che il CAPM sia vero, ma che le procedure utilizzate per stimarlo usino una misura sbagliata del portafoglio di mercato. Infine, alcune delle variabili aggiuntive utilizzate (come il *book-to-market ratio*) potrebbero aver potere esplicativo solo per caso, e sono state utilizzate solo perché i loro valori realizzati apparivano correlati con i rendimenti osservati dei titoli (*data snooping*).

3.3. Il modello a tre fattori di Fama e French

Le discordanze tra i dati e le previsioni del CAPM hanno indotto alcuni economisti ad abbandonare il CAPM nel lavoro empirico a favore di modelli più flessibili, anche se con dubbie basi teoriche. Come si è visto nel paragrafo precedente, le azioni hanno tipicamente offerto extra-rendimenti sono quelle emesse da società piccole, note come *small caps*, e quelle con alto rapporto tra valore contabile e valore di mercato (*book-to-market ratio*), note come *value stocks*. Partendo da questa osservazione, nel 1992 gli economisti Eugene Fama e Kenneth French hanno proposto un "modello a tre fattori", che si basa sull'idea che gli extra-rendimenti di questi due gruppi di azioni compensino dei fattori di rischio in esse presenti.[5] Fama e French hanno aggiunto due fattori al portafoglio di mercato del CAPM:

$$\tilde{r}_{it} - r_{ft} = \beta_i(\tilde{r}_{Mt} - r_{ft}) + b_{is}SMB_t + b_{iv}HML_t + \tilde{\varepsilon}_{it}, \tag{28}$$

dove SMB_t sta per "*small (capitalization) minus big*" ed è il differenziale di rendimento tra un portafoglio di società piccole e uno di società grandi, mentre HML_t sta per "*high (book-to-market ratio) minus low*" ed è il differenziale di rendimento tra un portafoglio di *value stocks* e uno di *growth stocks*. Mentre il coefficienti β_i è il tradizionale beta del titolo *i*, i coefficienti b_{is} e b_{is} rappresentano le esposizioni del titolo *i* ai due nuovi fattori di rischio ideati da Fama e French. I tre coefficienti sono stimati da regressioni su serie storiche.

Il modello a tre fattori di Fama e French riesce a spiegare oltre il 90% dei rendimenti di portafogli ben diversificati, a paragone con il 70% che tipicamente si ottiene con il CAPM. I segni dei coefficienti stimati suggeriscono che le *small caps* e i *value stocks* hanno maggiori rendimenti attesi rispetto a *large caps* e *growth stocks*, presumibilmente a causa della loro maggior rischiosità. Tuttavia i nuovi fattori introdotti da Fama e French sembrano variare da paese a paese: Griffin (2002) ha mostrato che, se ricalcolati per ciascun paese, i fattori di Fama e French forniscono una miglior descrizione della variazione temporale dei rendimenti di quel paese di quanto facciano gli stessi fattori se calcolati a livello globale.[6] Anche Fama e French (2012) hanno analizzato modelli con fattori locali e globali di rischio per quattro regioni (America settentrionale, Europa, Giappone e Asia) e concludono che i fattori locali funzionano meglio di quelli globali per portafogli di titoli regionali.[7]

---

[5] Eugene F. Fama e Kenneth R. French, "The Cross-Section of Expected Stock Returns", *Journal of Finance*, volume 47, numero 2, 1992, 427-465.

[6] John M. Griffin, "Are the Fama and French Factors Global or Country Specific?", *Review of Financial Studies*, volume 15, numero 3, 2002, pp. 783–803.

[7] Eugene F. Fama e Kenneth R. French, "Size, value, and momentum in international stock returns", *Journal of Financial Economics*, volume 105, numero 3, 2012, pp. 457–472.

Appendice

Derivazione della retta del mercato dei titoli con N titoli rischiosi e un titolo sicuro

La funzione obiettivo (19) può essere riscritta come segue:

$$\max_{\{\alpha_{ij}\}_{i=1}^{N}} \left(1+r_f\right)w_{0j} + \sum_{i=1}^{N}(\bar{r}_i - r_f)\alpha_{ij}w_{0j} - \frac{\gamma_j}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\sum_{k=1}^{N}\alpha_{kj}\sigma_{ik}w_{0j}^2$$
$$= \left(1+r_f\right)w_{0j} + \sum_{i=1}^{N}(\bar{r}_i - r_f)\alpha_{ij}w_{0j} - \frac{\gamma_j}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\alpha_{ij}\alpha_{kj}\sigma_{ik}\right)w_{0j}^2, \quad \text{(A1)}$$

dove nel primo rigo $\sigma_{ii} \equiv \sigma_i^2$. Senza perdita di generalità, possiamo concentrarci sulla scelta della quota α_{ij} del titolo *i* da parte dell'investitore *j*. La condizione di primo ordine rispetto a α_{ij} è:

$$\bar{r}_i - r_f = \gamma_j\left(\alpha_{ij}\sigma_i^2 + \sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{N}\alpha_{hj}\sigma_{hi}\right)w_{0j}. \quad \text{(A2)}$$

Come nel paragrafo 1, per calcolare gli extra-rendimenti di equilibrio, moltiplichiamo entrambi i lati della condizione di primo ordine (A2) per $\tau_j = 1/\gamma_j$ e li sommiamo per tutti gli *M* investitori. Con questi semplici passaggi, dalla (A2) si ottiene l'equazione:

$$\left(\sum_{j=1}^{M}\tau_j\right)(\bar{r}_i - r_f) = \left(\sum_{j=1}^{M}\alpha_{ij}w_{0j}\right)\sigma_i^2 + \sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M}\alpha_{hj}w_{0j}\right)\sigma_{hi}. \quad \text{(A3)}$$

Nell'espressione sul lato destro, la sommatoria in parentesi nel primo addendo è la domanda totale del titolo *i* (che appare moltiplicata per la sua varianza), mentre la sommatoria in parentesi nel secondo addendo è la domanda totale di ciascun titolo *h* diverso da i (che appare moltiplicata per la sua covarianza σ_{hi} con il titolo *i*). Dividendo entrambi i lati della (A3) per il numero di investitori M e ricordando la definizione della tolleranza media al rischio, $\tau_M \equiv \sum_{j=1}^{M}\tau_j / M$, otteniamo:

$$\tau_M(\bar{r}_i - r_f) = \frac{\sum_{j=1}^{M}\alpha_{ij}w_{0j}}{M}\sigma_i^2 + \sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{N}\left(\frac{\sum_{j=1}^{M}\alpha_{hj}w_{0j}}{M}\right)\sigma_{hi}. \quad \text{(A4)}$$

A questo punto, basta imporre le condizioni di equilibrio per tutti i titoli, cioè l'uguaglianza tra domanda e offerta totale in valore pro-capite:

$$\frac{\sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} w_{0j}}{M} = \overline{a}_i, \text{ per } i = 1, 2, ..., h, ..., N, \tag{A5}$$

e inserire queste condizioni di equilibrio nell'equazione (A4). Così, otteniamo l'extra-rendimento atteso di equilibrio del titolo *i*:

$$\overline{r}_i^* - r_f = \frac{1}{\tau_M}\left(\overline{a}_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N} \overline{a}_h \sigma_{hi} \right) = \frac{\sigma_{iM}}{\tau_M} \overline{a}_M, \tag{A6}$$

che è analoga alle espressioni (9') e (10') nel caso di due soli titoli rischiosi. Moltiplicando entrambi i lati della (A6) per il peso del titolo *i* nel portafoglio di mercato, $\overline{a}_i / \overline{a}_M$, e sommando per tutti i titoli, otteniamo l'extra-rendimento atteso di equilibrio del mercato:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\overline{a}_i}{\overline{a}_M} (\overline{r}_i^* - r_f)}_{\overline{r}_M^* - r_f} = \frac{1}{\tau_M} \underbrace{\left(\frac{\overline{a}_i^2}{\overline{a}_M^2} \sigma_i^2 + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N} \frac{\overline{a}_i}{\overline{a}_M} \frac{\overline{a}_h}{\overline{a}_M} \sigma_{hi} \right)}_{\sigma_M^2} \overline{a}_M$$

ovvero:

$$\overline{r}_M^* - r_f = \frac{\sigma_M^2}{\tau_M} \overline{a}_M, \tag{A7}$$

che è uguale alla (11).

A questo punto, combinando l'espressione (A6) con la (A7), otteniamo nuovamente la retta di mercato dei titoli già ottenuta nella (9'') per il caso con due soli titoli rischiosi:

$$\overline{r}_i^* - r_f = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} (\overline{r}_M^* - r_f) = \beta_{iM} (\overline{r}_M^* - r_f), \tag{A8}$$

che è l'equazione (20) del testo. Poiché questa espressione si applica a qualsiasi titolo *i* tra gli *N* titoli rischiosi, ciò dimostra che il risultato della retta di mercato dei titoli ottenuto nel paragrafo 1.2 si estende da due a qualsiasi numero di titoli rischiosi.

Esercizi

1. Due titoli hanno la seguente distribuzione congiunta dei rendimenti:

$$\text{Prob}(r_1 = -1 \text{ e } r_2 = 0{,}15) = 0{,}l,$$
$$\text{Prob}(r_1 = 0{,}5 \text{ e } r_2 = 0{,}15) = 0{,}8,$$
$$\text{Prob}(r_1 = 0{,}5 \text{ e } r_2 = 1{,}65) = 0{,}l.$$

a) Calcola le medie, varianze e covarianza dei due titoli.

b) Qual è la frontiera dell'insieme delle combinazioni possibili ($E(\tilde{r}), \sigma^2$), supponendo che i due titoli siano i soli esistenti? Scrivi l'equazione della frontiera e calcola i valori di ($E(\tilde{r}), \sigma^2$) corrispondenti a percentuali di 0%, 25%, 50%, 75% e 100% del primo titolo.

c) Quali portafogli appartengono all'insieme efficiente, cioè hanno la minima varianza per dato rendimento atteso?

d) Mostra che il titolo 2 è dominato dal titolo l usando il criterio della media e varianza, eppure entra in tutti i portafogli efficienti tranne uno. Perché?

2. Supponi che i titoli *X* e *Y* siano perfettamente correlati, e specificamente che il rendimento percentuale del titolo *Y* sia $\tilde{r}_Y = 6 + 0,2 \cdot \tilde{r}_X$ e che la distribuzione di probabilità del rendimento del titolo *X* sia:

$$\text{Prob}(\tilde{r}_X = 30) = 0{,}4;\ \text{Prob}(\tilde{r}_X = 10) = 0{,}5\ ;\ \text{Prob}(\tilde{r}_X = -50) = 0{,}1.$$

Qual è la percentuale della ricchezza che va investita nel titolo *X* per azzerare la varianza? Traccia l'insieme delle opportunità di investimento e indica il punto con varianza zero.

3. La "retta del mercato dei capitali" (*capital market line*) e la "retta del mercato dei titoli" (*security market line*) sono entrambe equazioni associate con il CAPM. Quale equazione useresti in ciascuna delle seguenti applicazioni? Spiega brevemente il tuo ragionamento.

a) Per valutare se un fondo comune di investimento è ben diversificato.

b) Per stabilire se una data azione è sopravvalutata.

c) Per determinare se il rendimento che hai ottenuto sul tuo portafoglio di investimento è migliore o peggiore, a parità di rischio, di quello che avresti potuto ottenere detenendo soltanto il portafoglio di mercato e un fondo comune monetario.

4. Considera il portafoglio efficiente *A* tale che $E(r_A) = 0{,}15$. Sappi inoltre che: $r_f = 0,06$, $E(r_M) = 0{,}10$ e $\sigma_M = 0{,}1$.

a) Calcola il beta del titolo *A*.

b) Qual è la varianza di questo portafoglio?

c) Qual è la correlazione di questo portafoglio con il mercato? Perché?

5. Supponi che il CAPM sia vero. La tabella seguente mostra il rendimento percentuale ottenuto da un fondo comune di investimento e dal portafoglio di mercato, nonché il tasso di interesse su un titolo di Stato privo di rischio con scadenza di 1 anno, nel corso degli ultimi 11 anni.

Anno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fondo commune	-25	0,5	-11	38	5	-2	14	52	35	22	7
Portafoglio di mercato	-22	1,3	-10	40	4,2	-4	15	60	43	24	7,2
Tasso di interesse	10,1	9,8	7,1	6,8	10,2	10,4	10,3	6,6	5,1	2,5	3,7

a) Basandoti su questi rendimenti storici, calcola il “rapporto di Sharpe” del fondo comune e del portafoglio di mercato.

b) Calcola l’equazione della retta di mercato dei titoli e rappresentala graficamente. (Per rispondere non c’è bisogno di stimare alcuna regressione.)

c) Sapendo che il beta del fondo comune è pari a 0,9, mostra la posizione del fondo comune nel grafico. Qual è l’alfa di Jensen di questo fondo, basandoci sui suoi rendimenti storici?

d) Il consiglio di amministrazione della società di gestione del fondo non è soddisfatta della performance del suo gestore e sta valutando la possibilità di sostituirlo con un altro gestore la cui performance passata è descritta da un rapporto di Sharpe di 0,15 e da un alfa di Jensen di +1%. Se fossi chiamato a dare un consiglio al consiglio di amministrazione, suggeriresti di sostituire l’attuale gestore oppure no? Spiega la tua risposta.

6. Considera un titolo con prezzo di mercato di € 40 e tasso di rendimento atteso del 13%. Ipotizza che il tasso di interesse privo di rischio sia 7% e il premio per il rischio di mercato, $E(\tilde{r}_M)-r_f$, sia 8%. Quale diverrebbe il prezzo corrente di equilibrio del titolo se il pagamento atteso futuro del titolo rimanesse lo stesso ma la covarianza del suo tasso di rendimento con quello del portafoglio di mercato raddoppiasse? Spiega il risultato da te ottenuto in modo intuitivo.

7. I seguenti titoli presentano prezzi di mercato coerenti con la retta di mercato dei titoli: $E(\tilde{r}_1)=6\%$, $E(\tilde{r}_2)=12\%$, $\beta_1=0,5$ e $\beta_2=1,5$.

a) Qual è l’equazione della retta di mercato dei titoli in questo caso?

b) Se i beta stimati di due azioni di nuova emissione *X* e *Y* sono $\beta_X=0,5$ e $\beta_Y=2$, quale devono essere i rendimenti attesi dei titoli *X* e *Y* perchè siano un investimento accettabile?

c) Se il rendimento atteso del titolo *X* è pari all’8%, quale operazione finanziaria converrà intraprendere, e che effetti questa avrà sul suo prezzo?