

ESERCITAZIONE MICRO AVANZATA

SCELTE IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA.

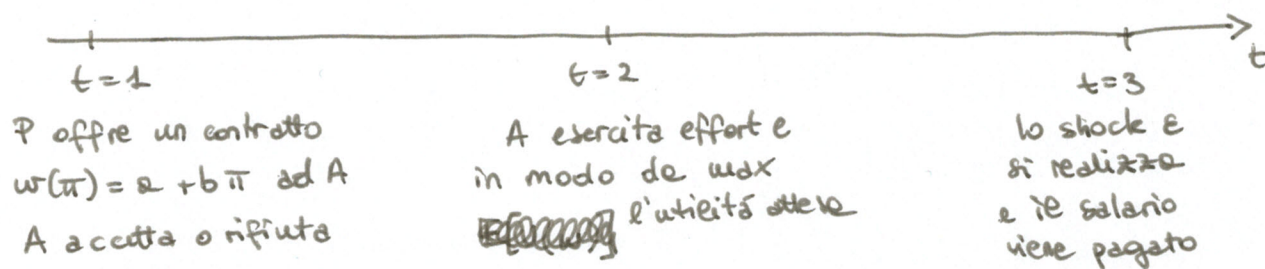
PROBLEMI DI AZZARDO MORALE

Principale e Agente

Il prodotto è una funzione dell'effort $\pi(e) = e + \varepsilon$ $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Il principale è neutrale nei confronti del rischio, mentre l'agente è avverso al rischio. La funzione di utilità dell'agente è $u(x) = -\exp(-rx)$

Consideriamo contratti lineari $w(\pi) = a + b\pi$. $c(e) = \frac{ce^2}{2}$ COSTO DELL'EFFORT



L'utilità attesa dell'agente è:

$$\begin{aligned} E[-\exp(-r(a + be + b\varepsilon - \frac{ce^2}{2}))] &= -\exp\{-r(a + be - \frac{ce^2}{2})\} E[\exp(-rb\varepsilon)] \\ &= -\exp\{-r(a + be - \frac{ce^2}{2} - \frac{r}{2}b^2\sigma^2)\} \end{aligned}$$

$E[e^x] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ con $x \sim N(\mu, \sigma^2)$

Il principale P massimizza il profitto atteso, rispettando i vincoli di partecipazione e di compatibilità degli incentivi dell'agente:

$$\max_{a, b} e - a - be$$

sotto i vincoli

$$\textcircled{1} \quad a + be - \frac{ce^2}{2} - \frac{r}{2}b^2\sigma^2 \geq w_0$$

$$\textcircled{2} \quad e \in \arg\max_{e'} \left\{ a + be' - \frac{ce'^2}{2} - \frac{r}{2}b^2\sigma^2 \right\}$$

Il vincolo $\textcircled{2}$ può essere sostituito dalla scelta ottima di e in funzione di a e b : $b - ce = 0 \Rightarrow e(b) = \frac{b}{c}$

Il vincolo di partecipazione dell'agente diventa (sostituendo $c(b)$):

$$a + \frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{2c} - \frac{r}{2} b^2 \sigma^2 \geq w_0$$

$$\Rightarrow a + \frac{b^2}{2c} - \frac{r}{2} b^2 \sigma^2 \geq w_0$$

Si noti che il vincolo di partecipazione sarà soddisfatto con il segno di uguaglianza perché, se così non fosse, il principale potrebbe aumentare il proprio profitto riducendo a (la scelta di e non dipende da a quindi l'effort resterebbe inalterato).

$$\Rightarrow a = w_0 - \frac{b^2}{2c} + \frac{r}{2} b^2 \sigma^2$$

Il problema di ottimo del principale a questo punto diventa:

$$\max_b \left\{ \frac{b}{c} - \frac{b^2}{c} - w_0 + \frac{b^2}{2c} - \frac{r}{2} b^2 \sigma^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \max_b \left\{ \frac{b}{c} - \frac{b^2}{2c} - \frac{r}{2} b^2 \sigma^2 \right\}$$

Condizione del 1° ordine:

$$\frac{1}{c} - \frac{b}{c} - r b \sigma^2 = 0$$

$$b^* = \frac{1}{1 + r \sigma^2 c}$$

INCENTIVI PIÙ FORTI SE
 - C'È MENO INCERTEZZA ($\sigma^2 \downarrow$)
 - L'AGENTE È MENO AVVERSO AL RISCHIO ($r \downarrow$)

$$e^* = \frac{1}{(1 + r \sigma^2 c) c} < \boxed{\frac{1}{c} = e^{FB}}$$

- IL COSTO MARG. DELL'EFFORT È MINORE ($c \downarrow$)

$$a^* = w_0 - \frac{1}{2c(1 + r \sigma^2 c)^2} + \frac{r}{2} \frac{\sigma^2}{(1 + r \sigma^2 c)^3}$$

ESERCIZIO 8

1. SCRIVERE IL VINCOLO DI BILANCIO DEL CONSUMATORE.

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{con } x_1, x_2 \geq 0$$

2. CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÉ LA DOMANDA DEL ~~BENE~~ ^{TITOLO} 1 SIA > 0 .

IL TITOLO PRIVO DI RISCHIO PAGA 1 DOLLARO E COSTA 1 DOLLARO.

PERCHÉ $x_1 > 0$ SI DEVE AVERE CHE NELLO STATO DEL MONDO PEGGIORE

IL TITOLO ~~PRIVO~~ PRIVO DI RISCHIO PAGHI PIÙ DEL TITOLO RISCHIOSO

$$1 > \min\{a, b\}$$

3. CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÉ $x_2 > 0$.

$$\max\{a, b\} > 1 \quad \text{non è abbastanza}$$

$$a\pi + b(1-\pi) > 1$$

4. MASSIMIZZAZIONE DELL'UTILITÀ:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1 + x_2 a)\pi + u(x_1 + x_2 b)(1-\pi)$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1 + x_2 a)\pi + u(x_1 + x_2 b)(1-\pi) - \lambda(x_1 + x_2 - 1)$$

$$\begin{cases} u'(x_1 + x_2 a)\pi + u'(x_1 + x_2 b)(1-\pi) - \lambda = 0 & \textcircled{1} \\ u'(x_1 + x_2 a)\pi a + u'(x_1 + x_2 b)(1-\pi)b - \lambda = 0 & \textcircled{2} \\ x_1 + x_2 = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

dividendo $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ otteniamo:

$$u'(x_1 + x_2 a)\pi + u'(x_1 + x_2 b)(1-\pi) = u'(x_1 + x_2 a)\pi a + u'(x_1 + x_2 b)(1-\pi)b$$

$$\Rightarrow u'(x_1 + x_2 a)\pi(1-a) + u'(x_1 + x_2 b)(1-\pi)(1-b) = 0$$

Dal vincolo di bilancio otteniamo $x_2 = 1 - x_1$

Quindi

$$u'(x_2 + a(1-x_1))\pi(1-e) + u'(x_1 + b(1-x_1))(1-\pi)(1-b) = 0$$

Riarrangiando abbiamo:

$$u'(x_2(1-e) + a)\pi(1-e) + u'(x_2(1-b) + b)(1-\pi)(1-b) = 0 \quad (*)$$

5. ASSUMENDO $a < 1$, MOSTRARE CHE $dx_1/de \leq 0$.

(*) definisce implicitamente $x_1(e)$. Per determinare $\frac{dx_1}{de}$ calcoliamo le differenziali totali di (*).

$$u''(x_a)\pi(1-e)^2 dx_1 + u''(x_a)(1-x_1)\pi(1-e) de + u'(x_a)(-\pi) da + \\ + u''(x_b)(1-\pi)(1-b)^2 dx_1 = 0$$

$$\frac{dx_1}{de} (u''(x_a)(1-e)^2\pi + u''(x_b)(1-\pi)(1-b)^2) = \pi u'(x_a) - u''(x_a)(1-x_1)\pi(1-e)$$

$$\frac{dx_1}{de} = \frac{\overset{>0}{\pi u'(x_a)} - \overset{<0}{u''(x_a)} \overset{>0}{(1-x_1)} \overset{>0}{\pi(1-e)}}{\underset{<0}{u''(x_a)\pi(1-e)^2} + \underset{<0}{u''(x_b)(1-\pi)(1-b)^2}} \leq 0$$

6. DETERMINARE IL SEGNO DI $dx_1/d\pi$.

$$\frac{dx_1}{d\pi} = - \frac{u'(x_a)(1-a) - u'(x_b)(1-b)}{\underbrace{u''(x_a)\pi(1-e)^2 + u''(x_b)(1-\pi)(1-b)^2}_{<0}}$$

$$\text{segno}\left(\frac{dx_1}{d\pi}\right) = \text{segno}\left(u'(x_a)(1-a) - u'(x_b)(1-b)\right) \begin{cases} a > 1 > b & \frac{dx_1}{d\pi} > 0 \\ a < 1 < b & \frac{dx_1}{d\pi} < 0 \end{cases}$$