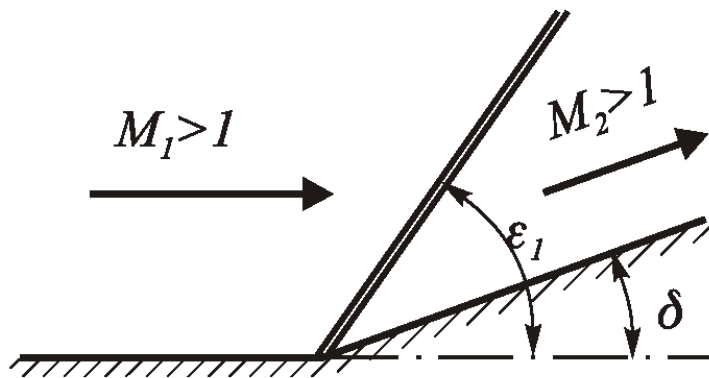


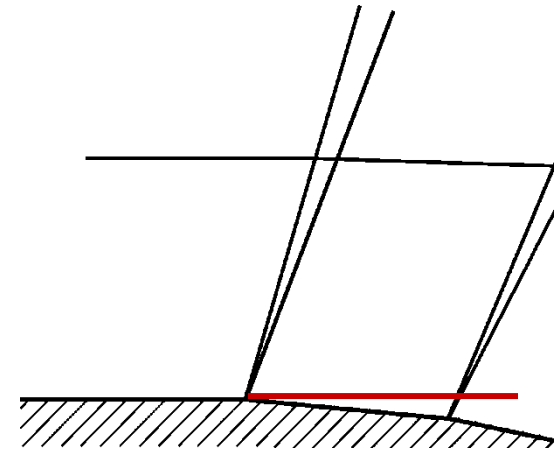
ONDE DI ESPANSIONE

Si è visto in precedenza che, quando una corrente supersonica che fluisce su una parete **devia per la presenza di un angolo concavo della superficie, tale deviazione è resa possibile da un'onda d'urto obliqua.**

Nel seguito si analizzerà il comportamento di una corrente supersonica nel caso in cui **l'angolo formato dalla parete è convesso anziché concavo**.



onde di Mach



ONDE DI ESPANSIONE

Si è visto in precedenza che, quando una corrente supersonica che fluisce su una parete ***devia per la presenza di un angolo concavo della superficie, tale deviazione è resa possibile da un'onda d'urto obliqua.***

Nel seguito si analizzerà il comportamento di una corrente supersonica nel caso in cui ***l'angolo formato dalla parete è convesso anziché concavo.***

Si supponga, ***inizialmente,*** che la parete formi ***ancora un angolo concavo ma di valore infinitesimo $d\delta$*** (angolo di deviazione della corrente).

Si ricordi che, per $\delta \rightarrow 0$, sono sempre possibili due soluzioni: ***un'onda d'urto normale*** ($\varepsilon \rightarrow 90^\circ$) ed ***un'onda di Mach*** ($\varepsilon \rightarrow \mu = \arcsin 1/M_1$).

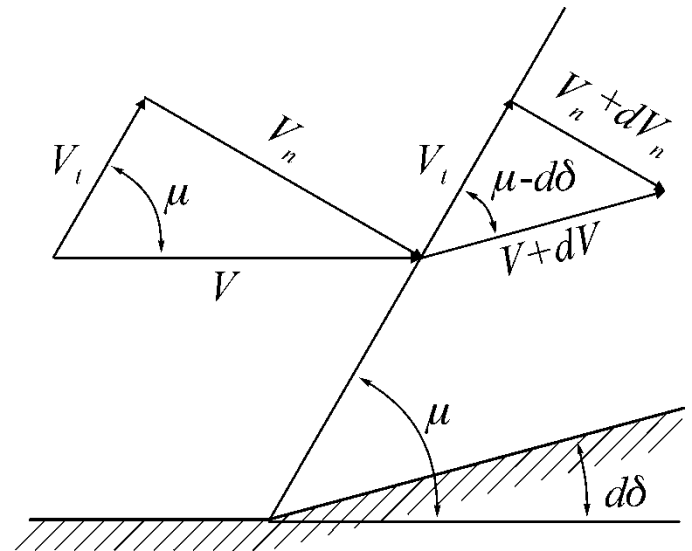
Poiché in questa situazione la soluzione più realistica è quella debole, si può concludere che la deviazione infinitesima è prodotta da un' ***onda di Mach.***

L'onda di Mach ***non produce alcuna compressione finita della corrente.*** Infatti, per $M_1 \sin \varepsilon = 1$, i rapporti caratteristici dell'onda d'urto obliqua diventano:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = 1$$

$$M_2 = M_1 \quad ; \quad \delta = 0$$

Si possono però avere variazioni infinitesime.



Inoltre, poiché essendo: $\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = 1 \quad \rightarrow \quad s_2 - s_1 = -R \ln \frac{P_{o2}}{P_{o1}} = 0$

l'onda di Mach è isoentropica e, quindi, ***reversibile***.

Dunque, a differenza di un'onda d'urto obliqua, l'onda di Mach, può produrre ***al più variazioni infinitesime*** dello stato termofluidodinamico del fluido, ma ***può essere sia di compressione che di espansione***.

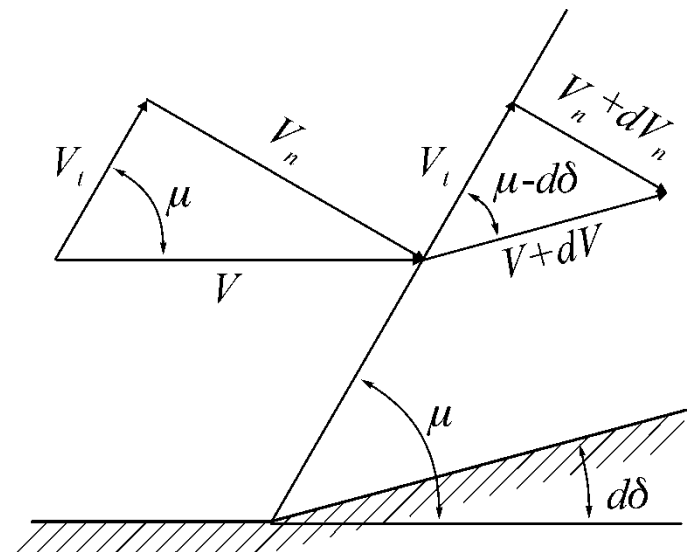
La deviazione infinitesima $d\delta$ può essere rappresentata come in figura.

Una corrente supersonica (avente velocità V , numero di Mach $M > 1$ e supposta orizzontale) è deviata verso l'alto di un angolo $d\delta$, ***infinitesimo e supposto positivo in quel verso***, (concavità) con un'onda di Mach.

L'onda è ***inclinata dell'angolo μ*** , rispetto al vettore velocità V , e lo fa variare della quantità dV .

$$\mu = \arcsin(1/M_1)$$

Gli angoli relativi a una convessità (cioè nell'altro verso) sono, quindi, considerati negativi.



Essendo per definizione $M_n = M \sin \mu = 1$, dalla figura si ha:

$$\tan \mu = \frac{V_n}{V_t} = \frac{M_n}{M_t} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad \begin{array}{l} \sin x = 0 + x + 0 - x^3/3! \\ \cos x = 1 + 0 - x^2/2! + 0 \end{array}$$

Inoltre, con riferimento alla stessa figura, poiché per quanto più volte detto in precedenza **la componente tangenziale delle velocità prima e dopo l'onda deve rimanere la stessa**, si ha:

$$V_t = V \cos \mu = (V + dV) \cos(\mu - d\delta)$$

Ricordando che $d\delta$ è **infinitesimo** (quindi $\sin d\delta \cong d\delta$ e $\cos d\delta \cong 1$) si ha:

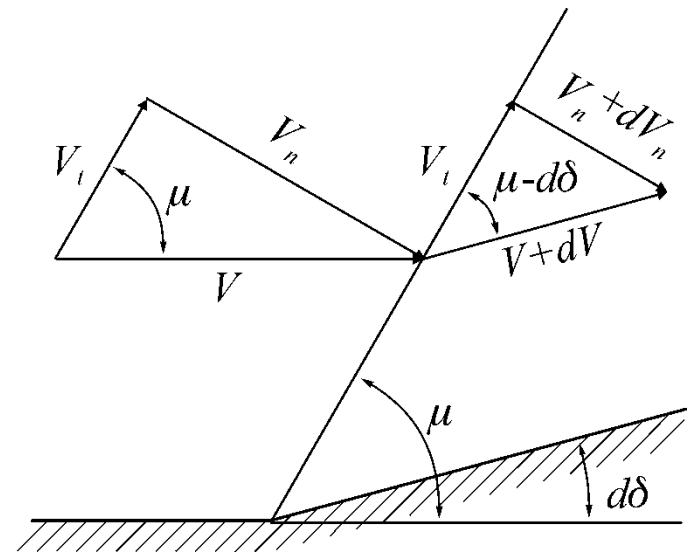
$$\cos(\mu - d\delta) = \cos \mu \cos d\delta + \sin \mu \sin d\delta = \cos \mu + d\delta \sin \mu$$

per cui, trascurando infinitesimi di ordine superiore, si ricava:

$$\frac{dV}{V} = - \tan \mu d\delta$$

ed infine, tenendo conto della relazione in alto, si ottiene:

$$d\delta = - \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

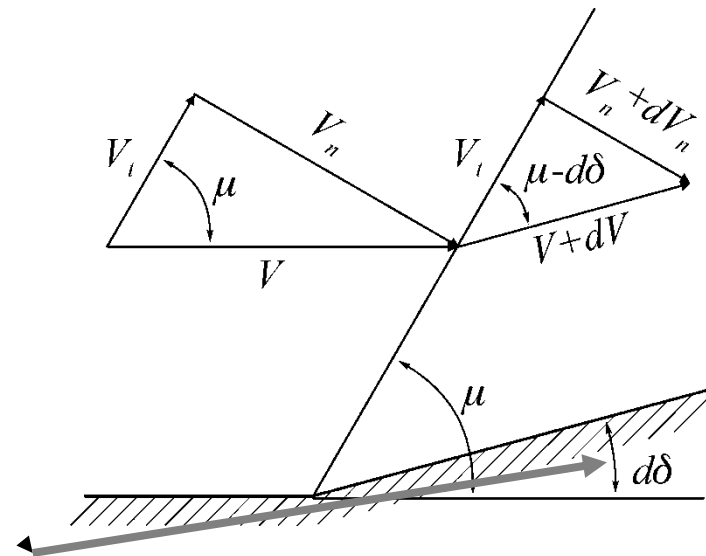


$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

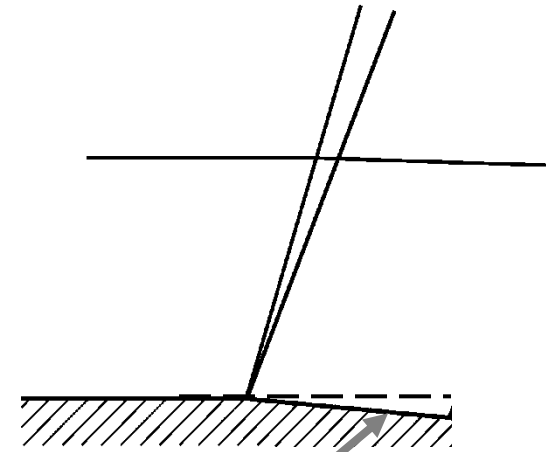
La relazione precedente rappresenta l'equazione differenziale che governa il **moto** cosiddetto alla **Prandtl e Meyer**.

Essa mostra che, per **angoli $d\delta$ positivi** (parete concava del tipo indicato in figura), la corrente subisce una **diminuzione (infinitesima) della sua velocità ($dV < 0$)** e quindi del suo numero di Mach. In proposito, si veda la:

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$



$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$



La relazione precedente rappresenta l'equazione differenziale che governa il **moto** cosiddetto alla **Prandtl e Meyer**.

Essa mostra che, per **angoli $d\delta$ positivi** (parete concava del tipo indicato in figura), la corrente subisce una **diminuzione (infinitesima) della sua velocità ($dV < 0$)** e quindi del suo numero di Mach. In proposito, si veda la:

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

$$dp + \rho V dV = 0$$

Viceversa, per **angoli $d\delta$ negativi** (parete convessa), la corrente supersonica **accelera ($dV > 0$)** e il suo **numero di Mach aumenta**.

Nel primo caso (decelerazione), la corrente è soggetta ad una **compressione** (infinitesima), mentre nel secondo caso (accelerazione) ad un'**espansione**.

Attraverso un'onda di Mach la trasformazione è, infatti, reversibile.



Invero, ricordando che la trasformazione è isoentropica, vale l'espressione:

$$\frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

che, differenziata logaritmicamente, dà luogo a:

$$\frac{dp}{p} = - \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \gamma M dM$$

La relazione precedente mostra che **i segni di dp e di dM sono tra loro opposti e, avendo dM e dV lo stesso segno, ad una decelerazione corrisponde una compressione e viceversa.**

Allo stesso risultato si può giungere più facilmente mediante la:

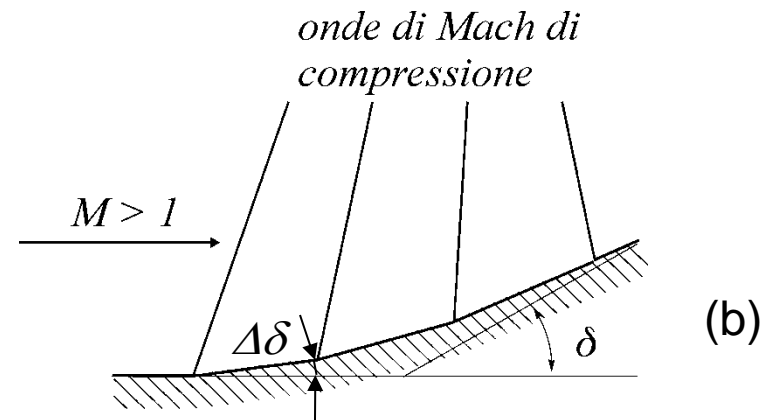
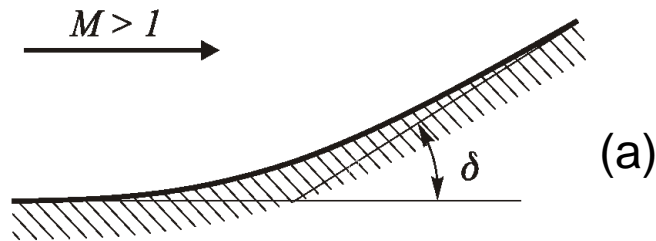
$$dp + \rho V dV = 0$$

nella quale è stato trascurato il termine gravitazionale $\rho g dz$, ovviamente ignorato in questa trattazione.

Quanto ricavato è ***valido anche nel caso in cui il modello di gas non sia quello più che perfetto.***



$$\mu = \arcsin(1/M_1)$$



Si consideri ora una parete concava con curvatura continua che dia luogo ad una deviazione finita δ come quella indicata in Fig. (a).

La curvatura continua si può approssimare con un numero n molto grande di piccoli tratti rettilinei, ciascuno inclinato rispetto al precedente di un **piccolo angolo** $\Delta\delta$, per cui l'effetto sulla corrente è quello che, **da ciascun punto angoloso, partirà un'onda di Mach di compressione**, Fig. (b).

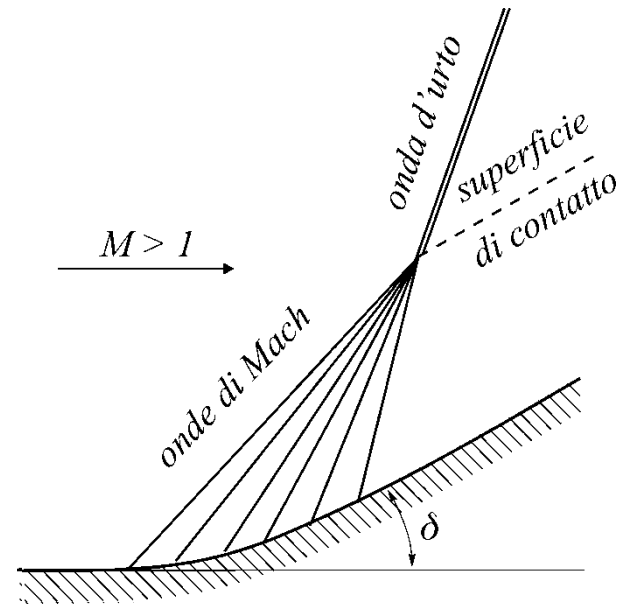
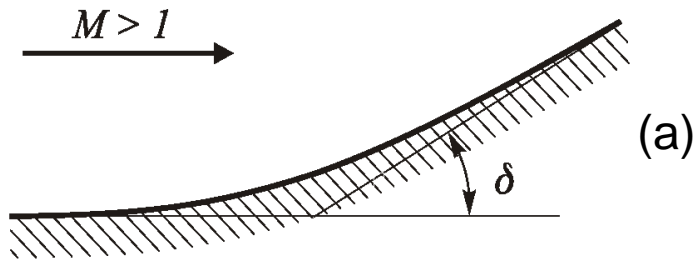
Ovviamente si ha: $n\Delta\delta = \delta$

È facile convincersi che, in questo caso, le **onde di Mach di compressione tendono a coalescere** (a unirsi):

- sia perché **la parete ruota verso il fluido**, che si deve muovere parallelamente ad essa;
- sia perché **l'angolo** μ che esse formano localmente con la parete stessa **tende ad aumentare** a causa della progressiva diminuzione del numero di Mach della corrente ($M_n = M \sin \mu = 1$).

Infatti, la **compressione fa diminuire il numero di Mach** (aumenta μ) e, dopo ogni rotazione, μ si misura rispetto alla **nuova direzione della corrente**.

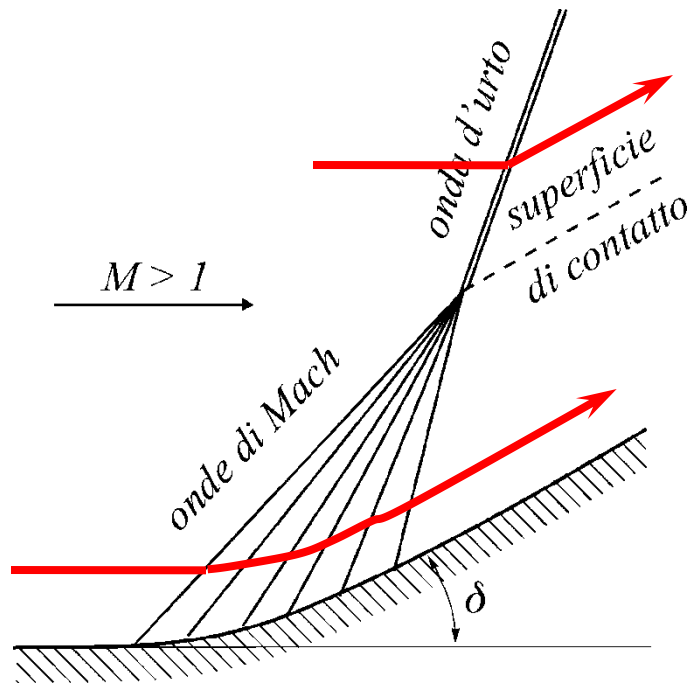




In effetti, **per la concavità con curvatura continua** (raccordata), ad ogni rotazione infinitesima $d\delta$ della parete corrisponde un'onda di Mach e, **poiché sono necessarie infinite rotazioni infinitesime per dare luogo ad una deviazione finita δ** , le onde di Mach che si generano sono anch'esse **infinite**.

Ad una certa distanza dalla parete, come rappresentato schematicamente in figura (b), **la coalescenza delle onde di Mach dà luogo ad un'onda d'urto**.

Ovviamente nel caso in cui la parete risulti concava per **un solo punto angoloso**, le onde di Mach non saranno più presenti e la configurazione sarà piuttosto quella già descritta in precedenza, **con la sola onda d'urto obliqua**.

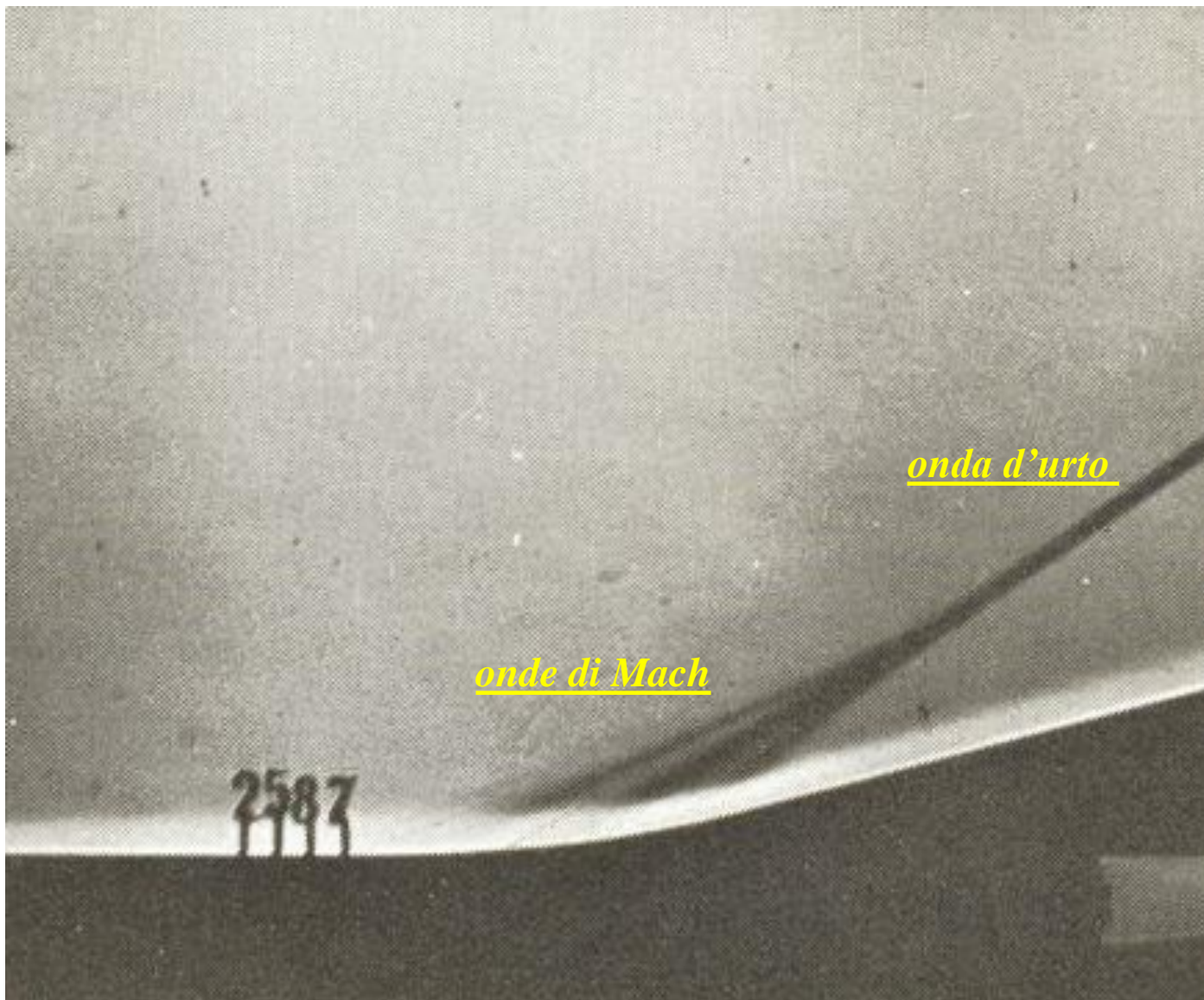


E' importante notare che ***il fluido, che attraversa le (infinite) onde di Mach*** (ciascuna delle quali devia la corrente di un angolo infinitesimo $d\delta$), ***è soggetto ad una trasformazione isoentropica*** (perché ciascuna onda di Mach è isoentropica).

Ciò non è vero per il fluido che attraversa l'onda d'urto nella quale vi è produzione di entropia.

La ***superficie di contatto***, curva tratteggiata in figura, indica la superficie di ***separazione tra questi due flussi***, che, ovviamente, avranno diverse caratteristiche tra loro.

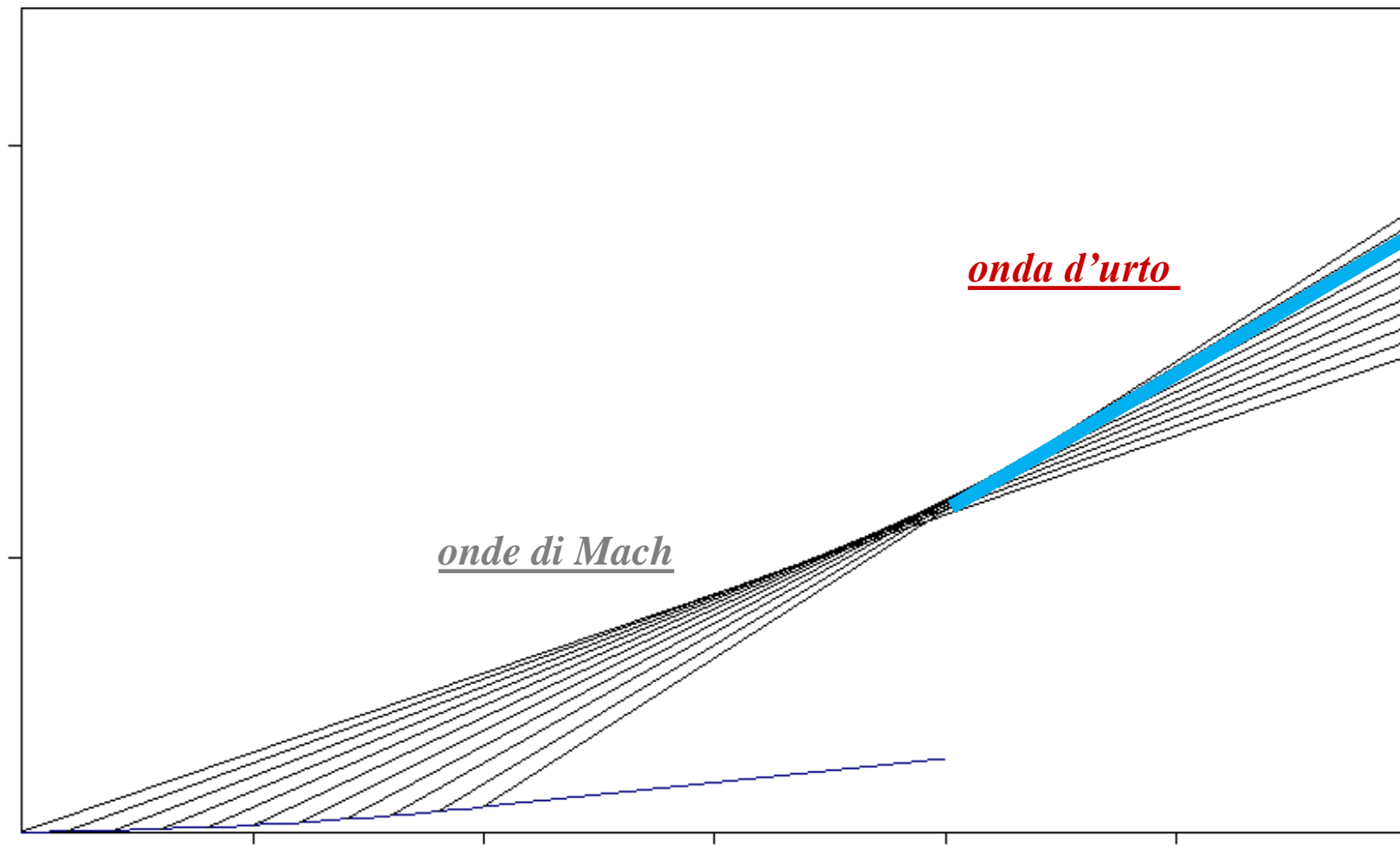




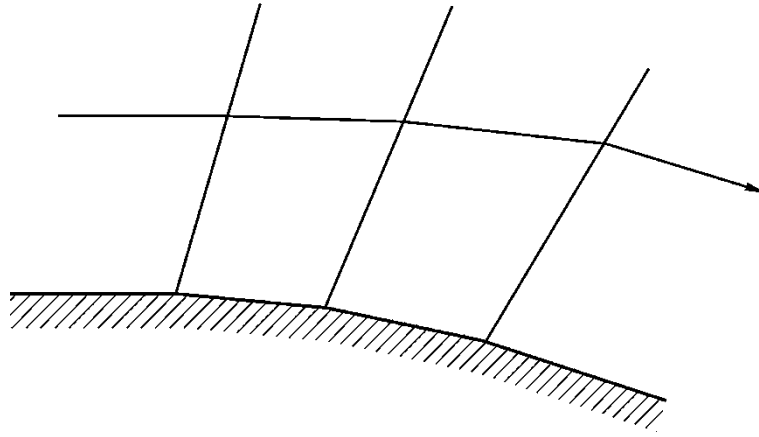
Onde di Mach e onda d'urto su una parete concava a curvatura continua.

Il numero di Mach a monte vale $M = 2.75$





onde di Mach di espansione



Se ora, viceversa, si considera una **parete convessa** avente una curvatura continua, la rappresentazione approssimata della parete con le onde di Mach che si generano, così come fatto in precedenza, si modifica in quella rappresentata in figura $n\Delta\delta = \delta$.

Le onde di Mach sono ora onde di espansione poiché i piccoli angoli di deviazione $\Delta\delta$ sono negativi (la corrente si allontana dall'onda).

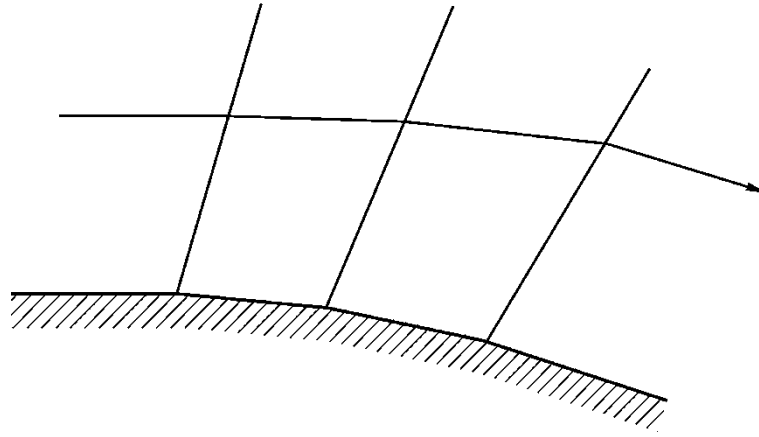
Quindi, in base alla relazione di Prandtl e Meyer ed all'equazione del bilancio della quantità di moto:

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad ; \quad dp + \rho V dV = 0$$

la corrente, oltre a diminuire la sua pressione, tende ad accelerare.



onde di Mach di espansione



$$\mu = \arcsin(1/M_1)$$

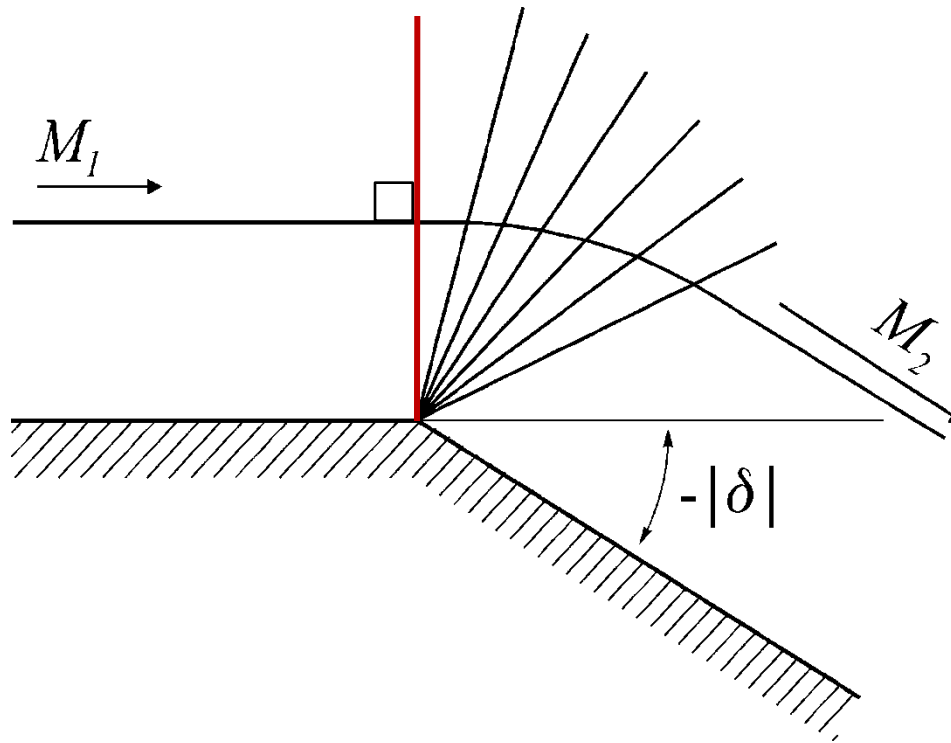
E' facile convincersi che, in questo caso, **le onde di Mach di espansione sono divergenti tra loro:**

- sia perché ***la parete ruota allontanandosi dal fluido,***
- sia perché ***l'angolo μ che esse formano localmente con la parete stessa tende a diminuire a causa del progressivo aumento del numero di Mach*** conseguente all'espansione.

L'insieme delle onde di espansione, che per una deviazione finita – $|\delta|$ sono ovviamente infinite (in quanto ogni onda di Mach dà luogo ad una deviazione infinitesima – $d\delta$) si chiama **ventaglio di espansione.**

La relativa trasformazione del fluido, **isoentropica** perché ciascuna onda di Mach è isoentropica, viene denominata **espansione alla Prandtl e Meyer.**





Nel caso rappresentato in figura in cui la parete è convessa per la presenza di un solo punto angoloso, le infinite onde di espansione hanno tutte origine in detto punto angoloso.

Inoltre, nel caso in cui sia $M_1 = 1$, la **prima onda** di Mach che incontra la corrente deve **necessariamente essere ortogonale alla corrente** stessa, ciò perché il numero di Mach normale a questa prima onda deve essere **unitario**.



Infine, occorre osservare che dalla:

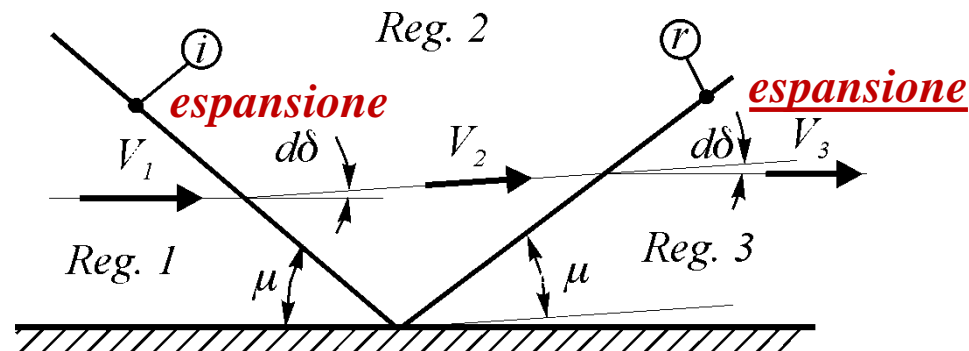
$$d\delta = - \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

si è visto che **un'onda di Mach di espansione** ($dV > 0$) **dà luogo ad un $d\delta$ negativo** per cui **la corrente tende** (sia pure con una rotazione infinitesima) **ad allontanarsi dall'onda**.

Viceversa, per **un'onda di Mach di compressione** ($dV < 0$), **il $d\delta$ è positivo** e **la corrente tende ad adagiarsi sull'onda** così come avviene nel caso più generale di un'onda d'urto obliqua.

È immediato verificare praticamente che l'allontanamento della corrente a valle di un'onda di Mach di espansione giustifica l'asserzione già fatta in precedenza, cioè che **le onde di Mach di espansione si riflettono su una superficie piana come tali**.

La corrente, che si allontana dalla parete in seguito alla prima onda, deve allontanarsi dalla seconda onda per ritornare parallela alla parete e, quindi, anche la seconda onda deve essere di espansione.



ESPANSIONE ALLA PRANDTL E MEYER IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Per un gas più che perfetto si può scrivere la relazione:

$$V^2 = M^2 a^2 = M^2 \gamma R T$$

che differenziata logaritmicamente dà luogo a:

$$2 \frac{dV}{V} = 2 \frac{dM}{M} + \frac{dT}{T}$$

Differenziando logaritmicamente la:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

anche essa valida per una trasformazione omoenergetica di un gas più che perfetto, si ottiene:

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M dM \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} = 0$$

per cui sostituendo si ha, infine, **per un moto omoenergetico**:

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

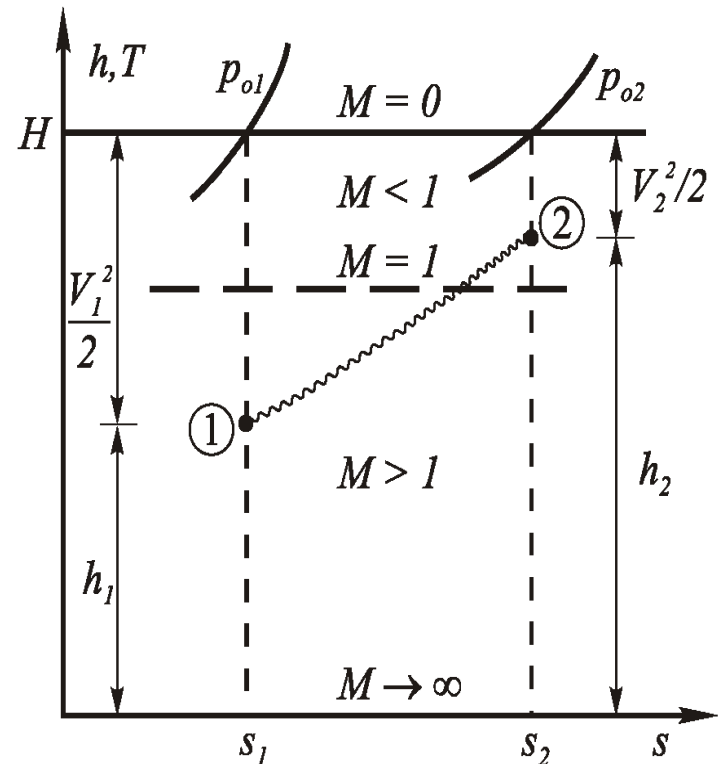
relazione più volte anticipata in precedenza.



$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

La formula precedente rappresenta (per un moto ad $H = \text{cost}$) il legame tra il dM ed il dV nel caso di un **gas più che perfetto**. Si noti che dM e dV **hanno lo stesso segno** per cui **ad un aumento del numero di Mach corrisponde un aumento della velocità e viceversa**.

Questo è stato già visto anche con riferimento alle onde d'urto, quando sono stati rappresentati i punti a monte ed a valle di un'onda d'urto sul piano $h-s$ (o, $T-s$).



$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

La formula precedente rappresenta (per un moto ad $H = \text{cost}$) il legame tra il dM ed il dV nel caso di un **gas più che perfetto**. Si noti che dM e dV **hanno lo stesso segno** per cui **ad un aumento del numero di Mach corrisponde un aumento della velocità e viceversa**.

Questo è stato già visto anche con riferimento alle onde d'urto, quando sono stati rappresentati i punti a monte ed a valle di un'onda d'urto sul piano $h-s$ (o, $T-s$).

Dalla relazione in alto si rileva anche che, **per $M \neq 0$, la quantità dM/M è sempre maggiore di dV/V** .

La relazione precedente sostituita nella:

$$d\delta = - \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

conduce all'**equazione differenziale del moto alla Prandtl e Meyer** per un gas più che perfetto nelle due sole variabili δ e M (**sparisce la V**):

$$d\delta = - \sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$



Posto:

$$k = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) > 1$$

(perché per la stabilità termodinamica è $\gamma > 1$), l'integrale indefinito della:

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

è il seguente:

$$\delta = -\sqrt{k} \operatorname{artan} \sqrt{(M^2 - 1)/k} + \operatorname{artan} \sqrt{M^2 - 1} + \text{cost}$$

in cui la costante di integrazione può essere ricavata assegnando un valore di δ per un ben determinato valore di M .

Occorre ora osservare che, in una corrente, le onde di Mach sono presenti solo in condizioni **non subsoniche** e cioè per $M \geq 1$. Infatti, ***solo in tal caso, può accadere che la componente del numero di Mach, normale all'onda, sia pari ad 1.***

Oltretutto, la precedente relazione, per valori di $M < 1$, non dà luogo a soluzioni nel campo dei numeri reali cosicché essa è valida solo per $M \geq 1$.

Risulta allora **conveniente porre $\delta = 0$ per $M = 1$** da cui si ottiene che la **cost = 0.**



Con tale posizione, l'espansione in serie arrestata al II termine della:

$$\delta = -\sqrt{k} \operatorname{artan} \sqrt{(M^2 - 1)/k} + \operatorname{artan} \sqrt{M^2 - 1}$$

per $M^2 \rightarrow 1$ conduce a:

$$\operatorname{artan} x = x - x^3/3 + x^5/5$$

$$\delta \cong - (M^2 - 1)^{3/2} (k - 1) / 3k$$

e cioè a **valori negativi di δ** (in quanto k è maggiore dell'unità).

Inoltre, per $M^2 \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$\delta_{lim} = -\frac{\pi}{2} (\sqrt{k} - 1) < 0$$

anch'esso **valore negativo** (per $\gamma = 1.4$ si ha $\delta_{lim} = -130.45^\circ$).

In effetti, **con la posizione $cost = 0$, si hanno valori di δ sempre negativi.**

Poiché, **in questo contesto, le situazioni di interesse sono quelle con valori negativi di δ (parete convessa e non concava), è conveniente porre $v = -\delta$ trattando, quindi, solo valori positivi di v .**

$$v = \sqrt{k} \operatorname{artan} \sqrt{(M^2 - 1)/k} - \operatorname{artan} \sqrt{M^2 - 1}$$

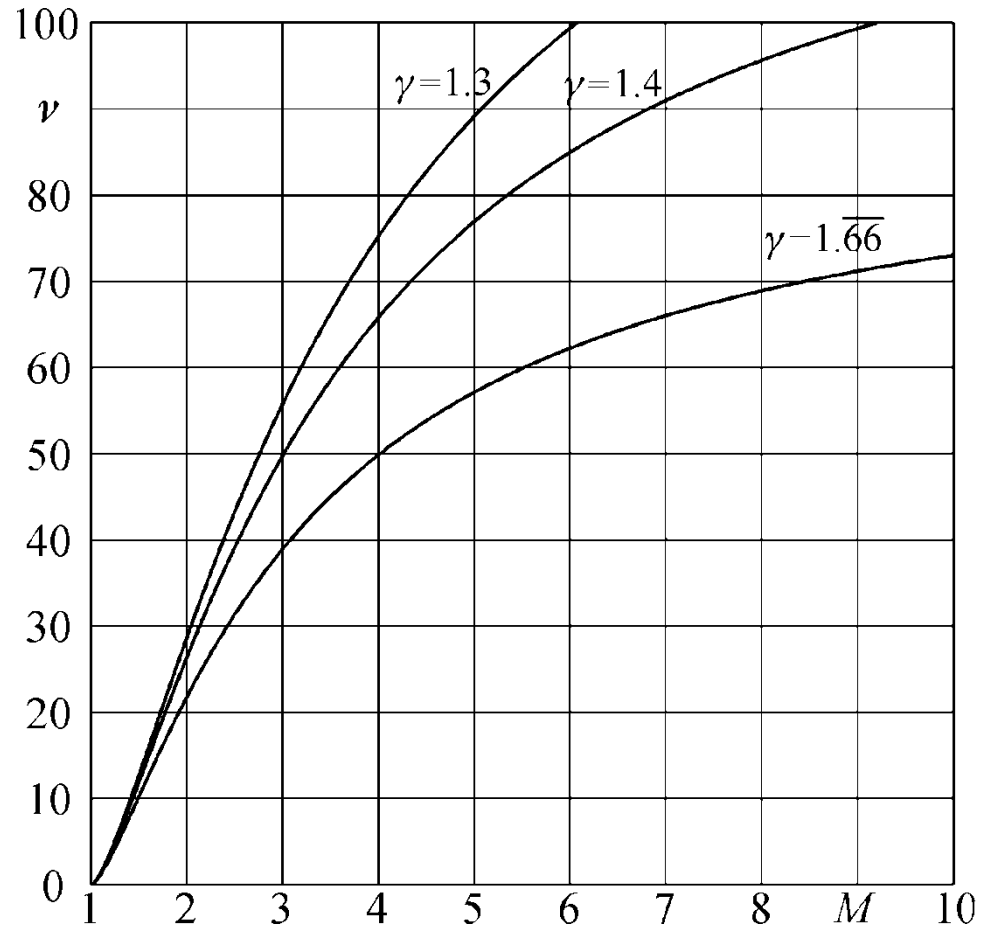


L'angolo ν è chiamato **angolo di Prandtl e Meyer** ed è diagrammato nella figura che segue per tre diversi valori di γ e quindi di k .

Come già detto per valori di $M \rightarrow \infty$, il valore di ν raggiunge il valore asintotico $\nu_{lim} = -\delta_{lim}$:

$$\delta_{lim} = -\frac{\pi}{2} (\sqrt{k} - 1) < 0$$

per $\gamma = 1.4 \Rightarrow \nu_{lim} = 130.45^\circ$



$$\nu = \sqrt{k} \operatorname{artan} \sqrt{(M^2 - 1) / k} - \operatorname{artan} \sqrt{M^2 - 1}$$



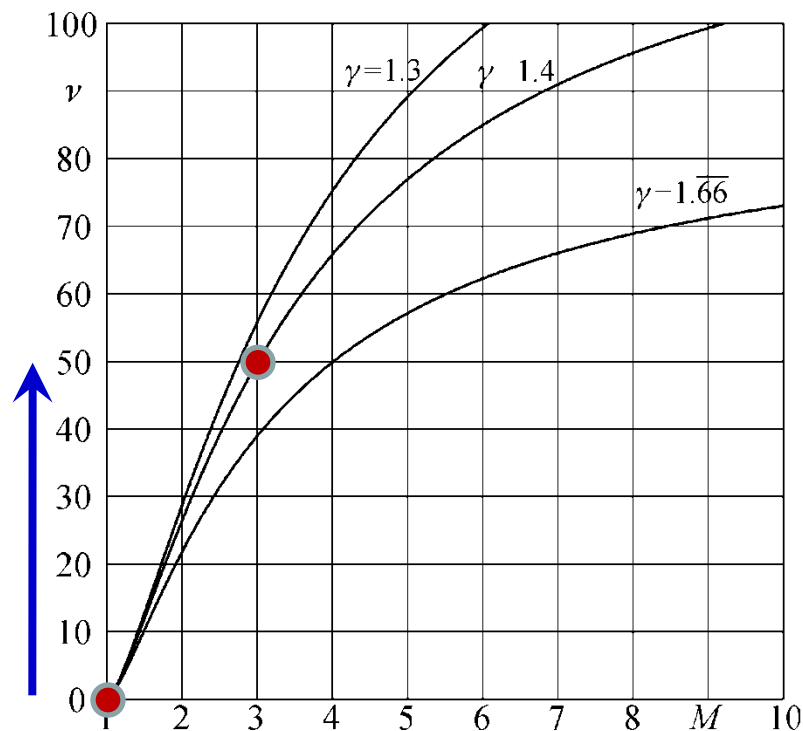
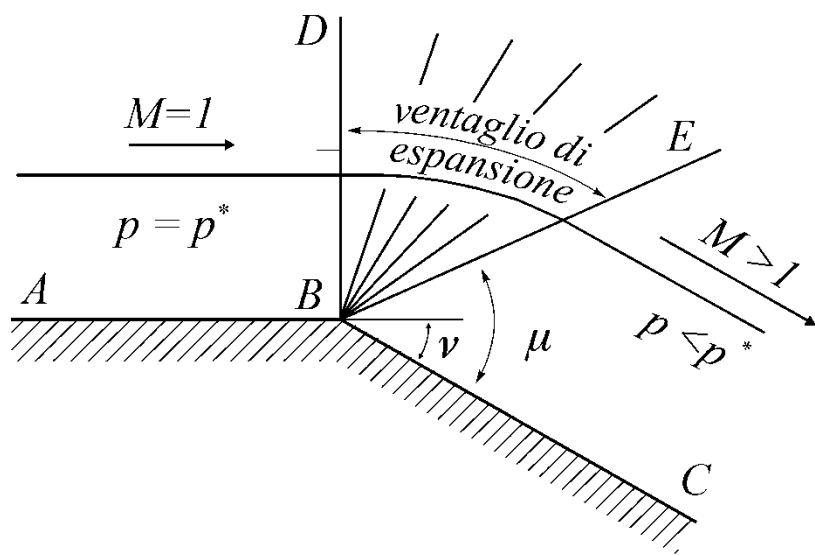
Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Prandtl e Meyer	
$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$
.0000	9.000 +1
.4472 -1	8.193 +1
.1257	7.864 +1
.2294	7.614 +1
.3510	7.406 +1



Per come è stato ricavato ($\nu = 0$ per $M = 1$), l'angolo di Prandtl e Meyer ha il seguente significato fisico, che è anche rappresentato di seguito.

Si supponga di avere una **corrente sonica** che fluisca parallelamente ad una parete AB .

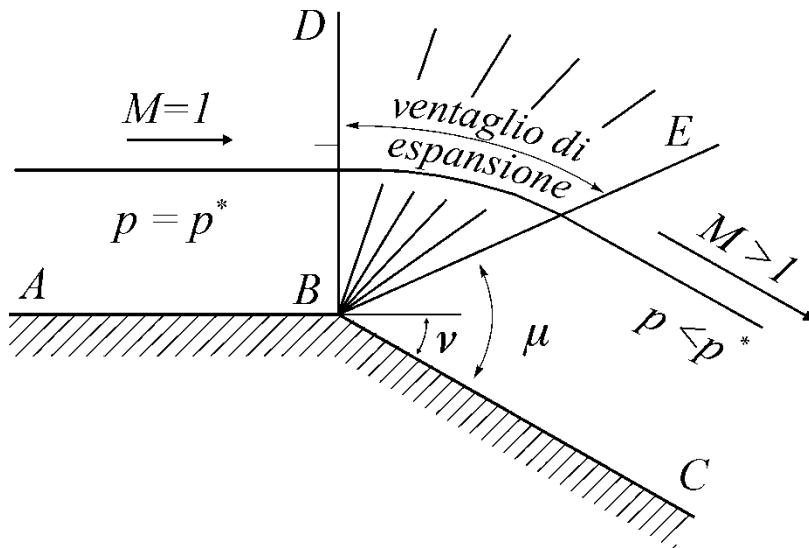


L'angolo ν è quello di cui bisogna ruotare la parete (formando una convessità) perché la corrente passi dal numero di Mach sonico ($M = 1$), che ha sulla parete AB , al numero di Mach supersonico ($M > 1$) sulla parete BC .



Alternativamente, se una corrente sonica fluisce su una parete e questa parete ruota (formando una convessità) di un angolo $\nu < -\delta_{lim}$, la corrente raggiungerà un numero di Mach M ricavabile dalla:

$$\nu = \sqrt{k} \operatorname{artan} \sqrt{(M^2 - 1)/k} - \operatorname{artan} \sqrt{M^2 - 1}$$



Logicamente, tutto ciò accade se nella zona a valle del ventaglio di espansione esistono le condizioni adatte di pressione date dalla:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

dettate dal fatto che la trasformazione è **adiabatica isoentropica**.

Nella figura, **la prima onda di Mach BD** del ventaglio di espansione è **ortogonale alla corrente** (sonica); **l'ultima onda di Mach BE** è **inclinata**, rispetto alla direzione locale della corrente, **dell'angolo $\mu = \arcsin(1/M)$** .

Attenzione a non confondere ν e μ !



La condizione innanzi posta ($v < -\delta_{lim} = v_{lim}$) deriva dal fatto che per $v = v_{lim}$ si ha $M \rightarrow \infty$ e di conseguenza $p \rightarrow 0$. La corrente non può, quindi, espandere ulteriormente al di là di v_{lim} (per $\gamma = 1.4$ si ha $v_{lim} = 130.45^\circ$).

Se la geometria della discontinuità è tale che, come rappresentato in figura, l'angolo di convessità della parete è maggiore di v_{lim} la corrente si separa dalla parete a valle dello spigolo e l'ultima onda di Mach ha la stessa direzione della corrente.

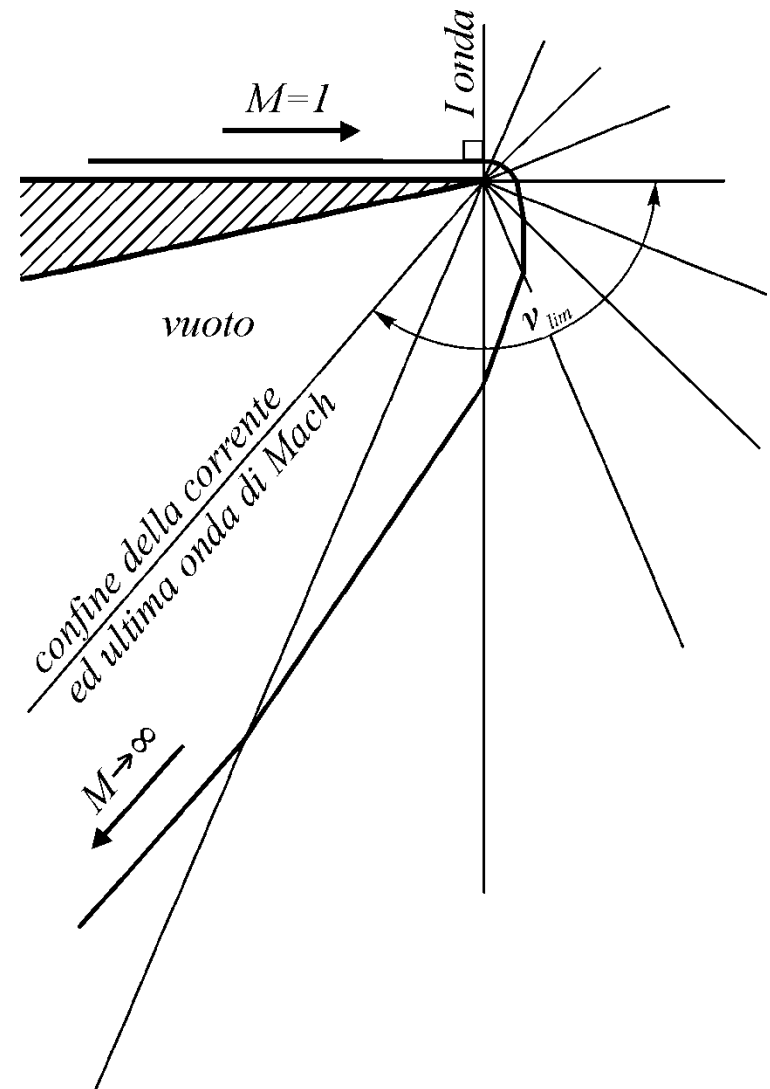
Infatti, per $M \rightarrow \infty$, si ha:

$M (\sin \mu) = 1$ e quindi $\mu \rightarrow 0$.

La figura è solo indicativa poiché il rapporto tra l'area di passaggio del flusso a $M \rightarrow \infty$ e quella a $M \rightarrow 1$, in base alla:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

risulterebbe pari ad infinito.



Si consideri ora una corrente supersonica, avente $M_1 > 1$, noto, soggetta a una deviazione pari a Δ (di convessità) che la porta a M_2 , da determinare.

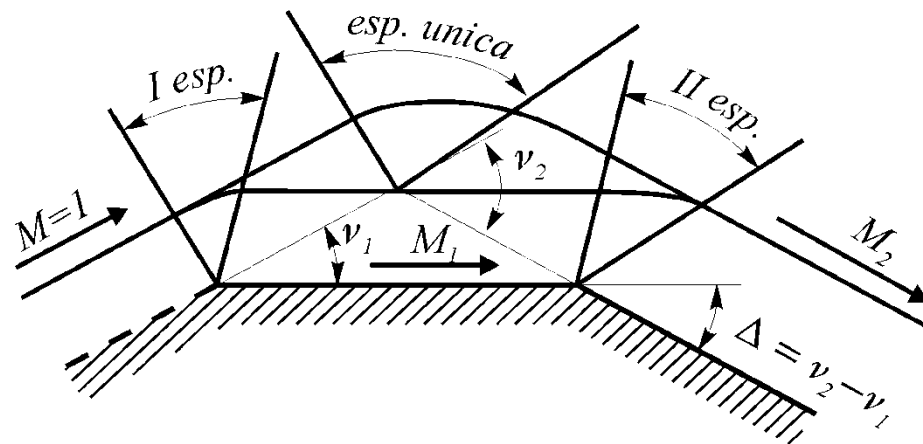
A partire da $M = 1$, per arrivare a M_1 con una deviazione, è necessario deviare la corrente di un angolo pari a ν_1 , con un primo ventaglio di espansione.

Per poi arrivare a M_2 , è necessario un secondo ventaglio di espansione che porta la corrente a M_2 , cui corrisponde un angolo di Prandtl e Meyer pari a ν_2 .

E' chiaro che a M_2 si può arrivare anche con un'unica deviazione pari a ν_2 .

Allora, partendo da $M = 1$, si può arrivare a M_2 sia con l'unica espansione per una rotazione della parete pari a ν_2 , sia con una prima espansione per una rotazione pari a ν_1 (che porta la corrente a M_1), seguita da un'altra espansione con una rotazione pari a $\Delta = \nu_2 - \nu_1$ (che porta la corrente a M_2).

$$\Delta = \nu_2 - \nu_1$$



Allora per trovare il numero di Mach M_2 di una corrente supersonica ($M_1 > 1$) soggetta a una deviazione Δ (di convessità) si procede in questo modo:

- ❖ A partire da $M_1 > 1$, si calcola il valore dell'angolo di Prandtl e Meyer ν_1 ;
- ❖ per poter determinare il numero di Mach M_2 dopo la deviazione, occorre sommare l'angolo Δ a ν_1 ottenendo così il valore di ν_2 ;
- ❖ il valore M_2 sarà facilmente calcolabile da quello di ν_2 .

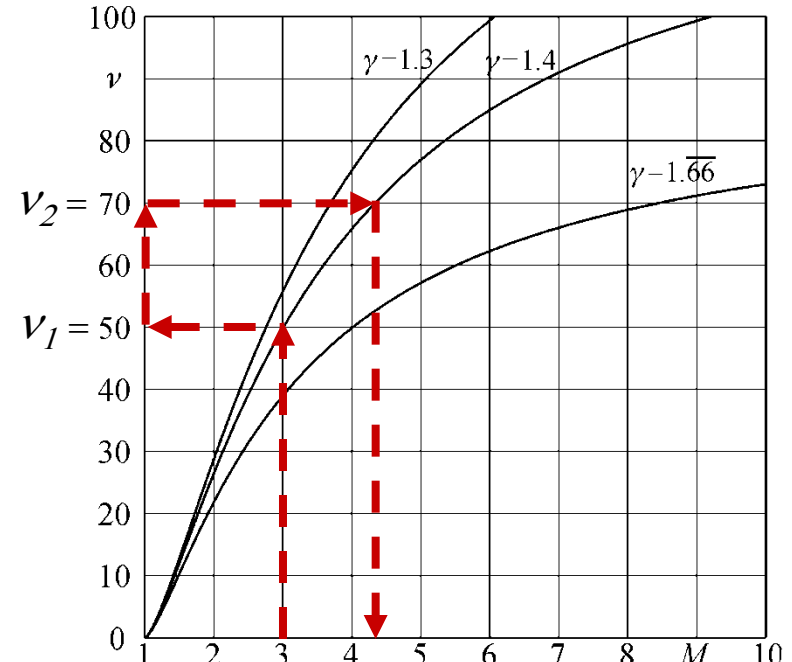
È chiaro che ciò è possibile poiché, essendo l'espansione di Prandtl e Meyer caratterizzata da una trasformazione isoentropica, si può applicare alle diverse espansioni il principio di sovrapposizione degli effetti.

Esempio

$$M_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = 50^\circ$$

$$\Delta = 20^\circ \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \nu_1 + \Delta = 70^\circ$$

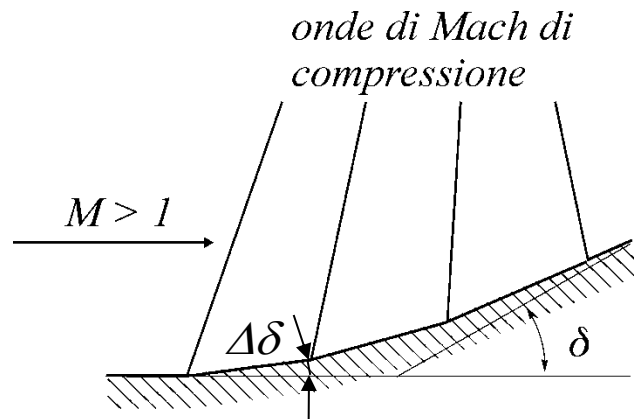
$$\nu_2 = 70^\circ \quad \Rightarrow \quad M_2 = 4.3$$



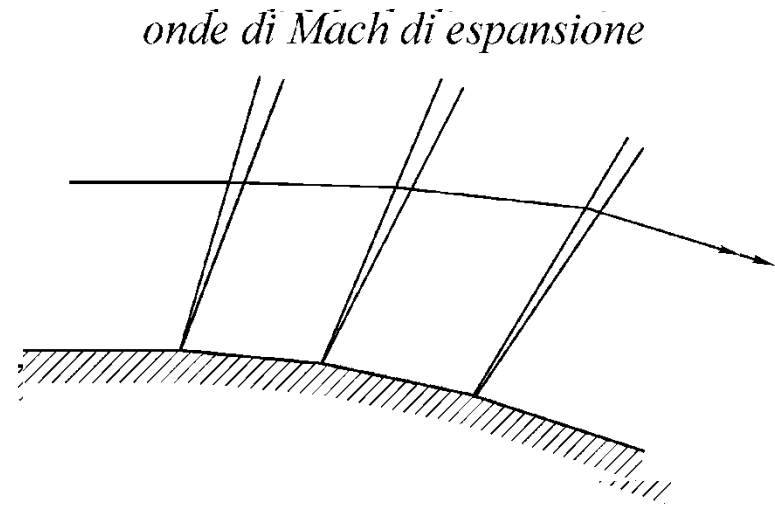
In base a quanto già esposto, **occorre precisare meglio quanto detto sui campi di moto derivanti dalle geometrie delle diverse figure viste in precedenza.**

Essendo le rotazioni $\Delta\delta$ finite e non infinitesime, le onde di compressione della precedente Fig. (a) sono in effetti onde d'urto oblique quasi-isoentropiche molto deboli (perchè i $\Delta\delta$ sono piccoli).

Invece, **le onde di espansione della precedente Fig. (b) sono di fatto tanti piccoli ventagli di espansione, comunque ciascuno costituito da una infinità di onde di Mach.**

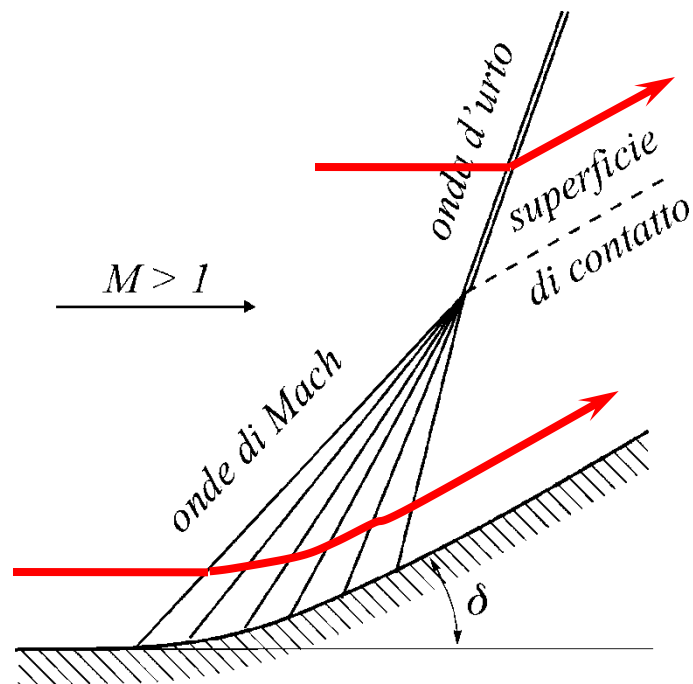


(a)



(b)





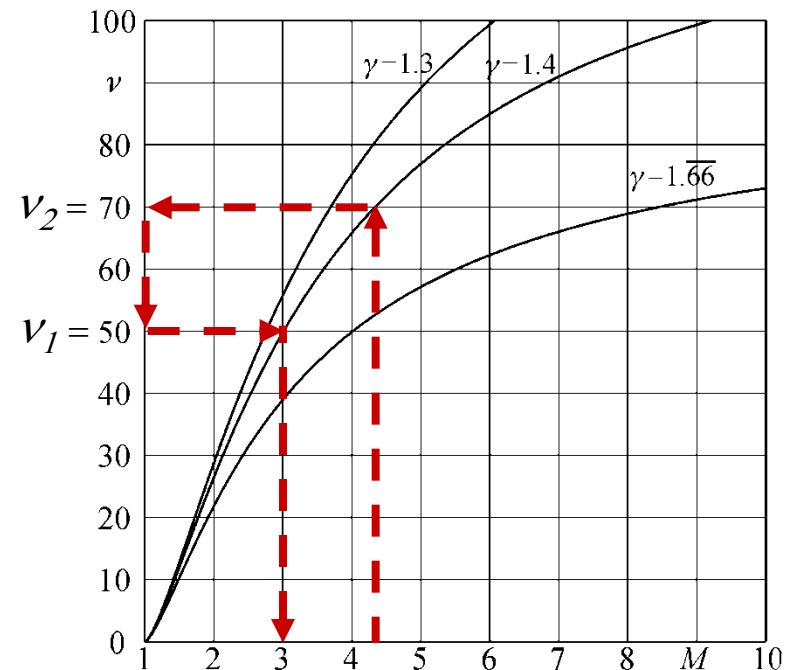
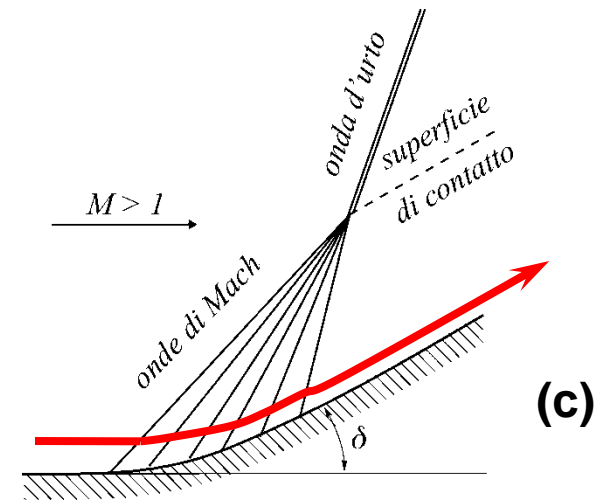
E' importante notare che ***il fluido, che attraversa le (infinite) onde di Mach*** (ciascuna delle quali devia la corrente di un angolo infinitesimo $d\delta$), **è soggetto ad una trasformazione isoentropica** (perché ciascuna onda di Mach è isoentropica).

Ciò non è vero per il fluido che attraversa l'onda d'urto nella quale vi è produzione di entropia.

La ***superficie di contatto***, curva tratteggiata in figura, indica la superficie di ***separazione tra questi due flussi***, che, ovviamente, avranno ***diverse caratteristiche*** tra loro (ad es. diverso modulo delle velocità), ma la ***stessa pressione e la stessa direzione della velocità***.

Inoltre, con riferimento al campo di moto in prossimità della parete di Fig. (c), si nota che il fluido attraversa solo le onde di Mach.

Esso si può ancora calcolare con la relazione di Prandtl e Meyer, sottraendo al valore di v , corrispondente al numero di Mach a monte della prima onda, i valori delle rotazioni (di concavità) della parete fino a sottrarre tutto δ .



Inoltre, con riferimento al campo di moto in prossimità della parete di Fig. (c), si nota che il fluido attraversa solo le onde di Mach.

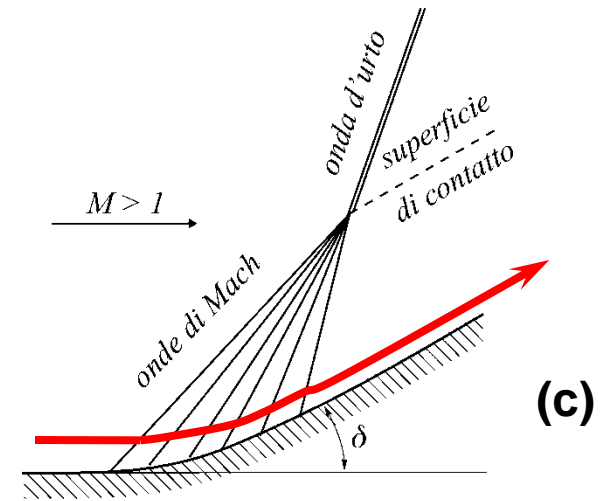
Esso si può ancora calcolare con la relazione di Prandtl e Meyer, sottraendo al valore di v , corrispondente al numero di Mach a monte della prima onda, i valori delle rotazioni (di concavità) della parete fino a sottrarre tutto δ .

Infine deve essere rimarcato che le situazioni del tipo prima viste, e cioè corrente a valle del ventaglio di espansione parallela alla parete, sono possibili solo se ivi esistono le condizioni di pressione p dettate dalla:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Se ciò non fosse vero, e cioè la pressione fosse maggiore di quella da calcolo, l'espansione si arresterebbe a detto valore di pressione e la corrente di conseguenza si separerebbe dalla parete.

Chi comanda è sempre la pressione a valle e ciò sarà esplicitamente esaminato nel caso di efflusso da un ugello nel prossimo capitolo.



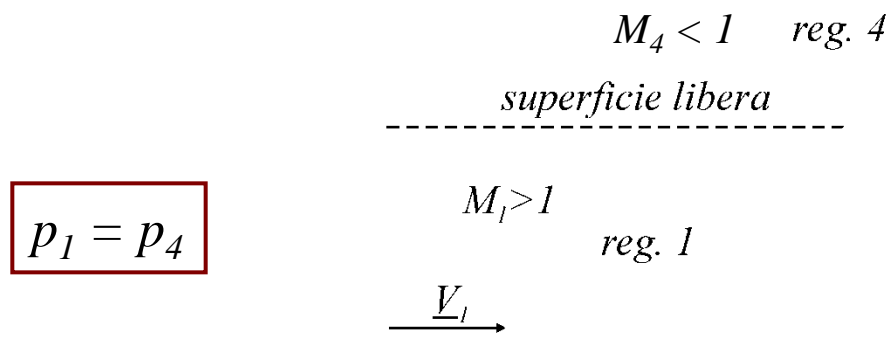
RIFLESSIONE DI ONDE SU SUPERFICI LIBERE

Nel seguito si intenderà per **superficie libera**, ***quella superficie che separa due correnti aventi velocità diverse***. Una superficie di questo tipo è necessariamente **vorticoso**. Anche qui si trascureranno gli effetti viscosi.

Per semplicità si supporrà che ***una delle due correnti sia supersonica*** e che ***l'altra sia subsonica*** (o al limite a velocità nulla).

Come rappresentato in figura, si consideri la regione 1 costituita da una corrente supersonica, separata dalla regione 4 (nella quale $M_4 < 1$) dalla superficie libera indicata con la linea tratteggiata.

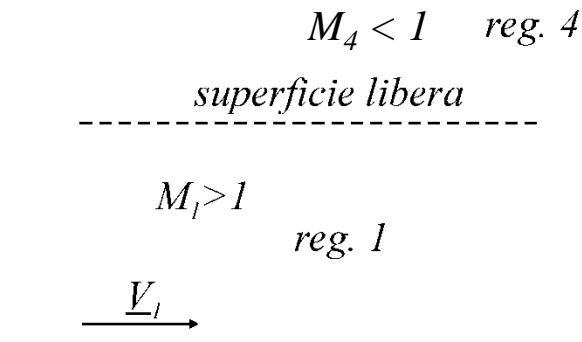
Poiché le linee di corrente nelle due regioni (a cavallo della superficie libera) sono rettilinee e parallele, **le rispettive pressioni statiche debbono essere tra di loro uguali**.



Si supponga ora che nella regione 1 esista un' **onda d'urto obliqua**, del tipo rappresentato in figura, che dia luogo ad una **deviazione** δ_1 della corrente nella regione 2 ed un numero di Mach $M_2 > 1$.

L'onda d'urto obliqua darà luogo ad una **compressione** $p_2 > p_1$, ma sulla superficie libera i valori della pressione nelle due regioni ad essa adiacenti devono necessariamente essere uguali tra loro.

Ne consegue che dal punto di intersezione tra l'onda d'urto e la superficie libera deve formarsi un **ventaglio di espansione** che riporti la pressione al valore $p_1 = p_3 = p_4$.

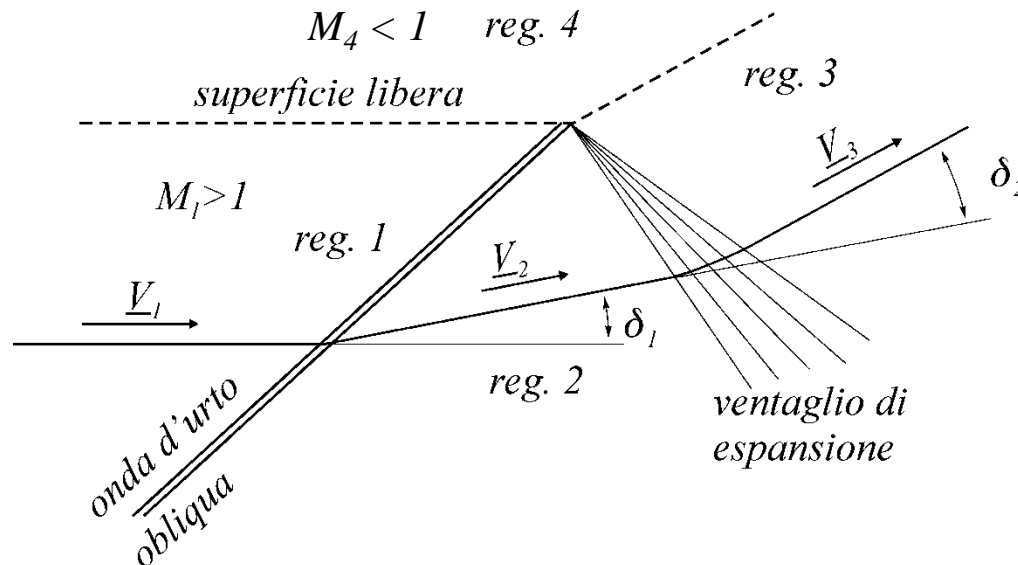


Si supponga ora che nella regione 1 esista un'**onda d'urto obliqua**, del tipo rappresentato in figura, che dia luogo ad una **deviazione** δ_1 della corrente nella regione 2 ed un numero di Mach $M_2 > 1$.

L'onda d'urto obliqua darà luogo ad una **compressione** $p_2 > p_1$, ma sulla superficie libera i valori della pressione nelle due regioni ad essa adiacenti devono necessariamente essere uguali tra loro.

Ne consegue che dal punto di intersezione tra l'onda d'urto e la superficie libera deve formarsi un **ventaglio di espansione** che riporti la pressione al valore $p_1 = p_3 = p_4$.

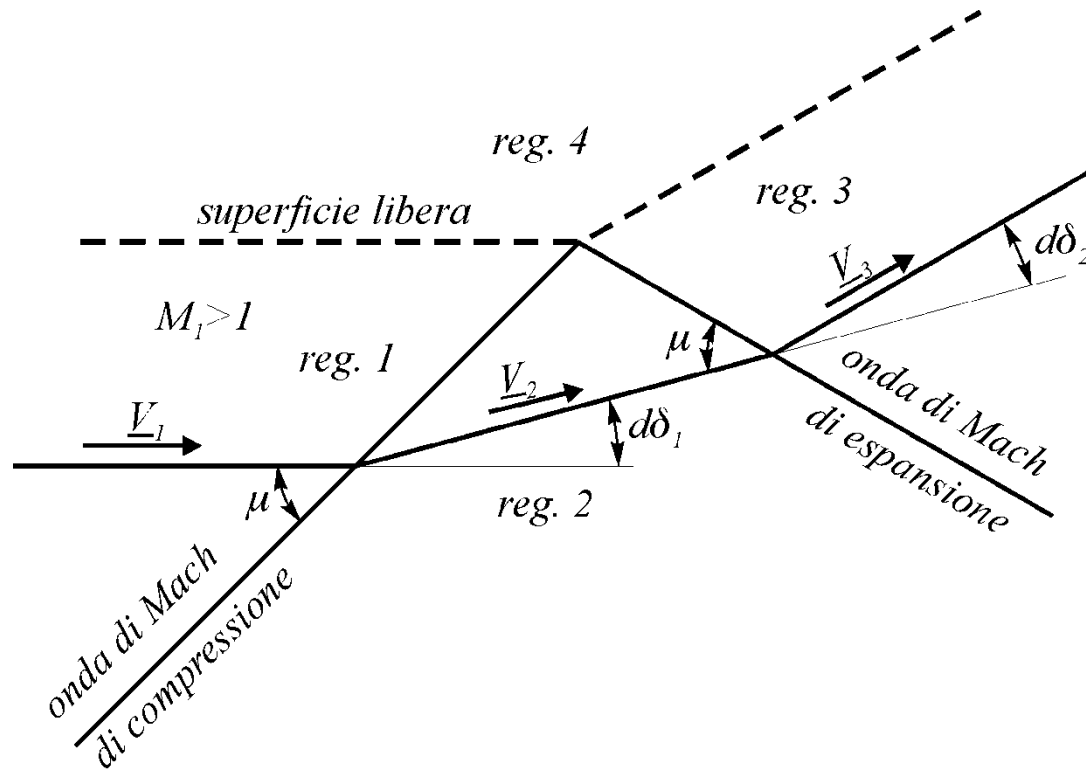
Questo ventaglio di espansione ovviamente darà luogo ad una **ulteriore deviazione della corrente** δ_2 nello stesso verso della deviazione δ_1 .



Nel caso in cui l'onda che separa le regioni 1 e 2 non sia un'onda d'urto ma un'**onda di Mach di compressione** (onda d'urto isoentropica), è chiaro che essa **si riflette come una sola onda di Mach di espansione**.

Nel caso precedente invece l'onda d'urto si rifletteva come una infinità di onde di Mach di espansione cioè come un ventaglio di espansione.

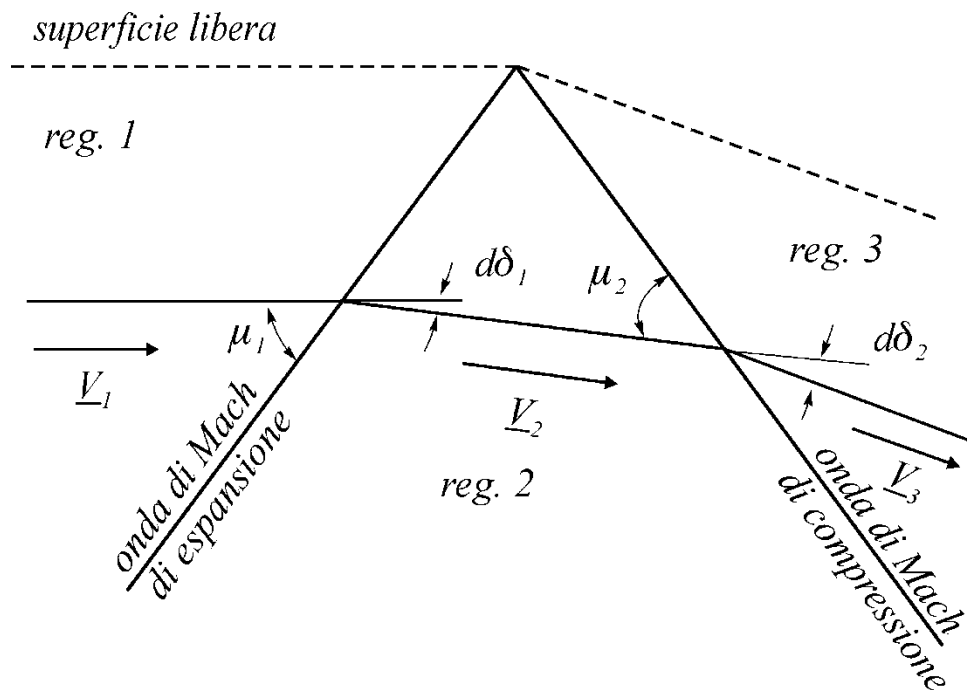
In questo caso, **le due deviazioni $d\delta_1$ e $d\delta_2$ sono ovviamente infinitesime anche se nello stesso verso**, come rappresentato in figura.



Qualora, invece, l'onda incidente sulla superficie libera è un'onda di Mach di espansione, essa si riflette come un'onda di Mach di compressione così come rappresentato nella figura.

Anche in questo caso **le due deviazioni $d\delta_1$ e $d\delta_2$ sono infinitesime**, ma entrambe **nel verso opposto a quello dei due casi precedenti**.

Cioè, le **onde di Mach** si riflettono su una superficie libera come **onde di tipo opposto** (**compressione \rightarrow espansione**, **espansione \rightarrow compressione**).



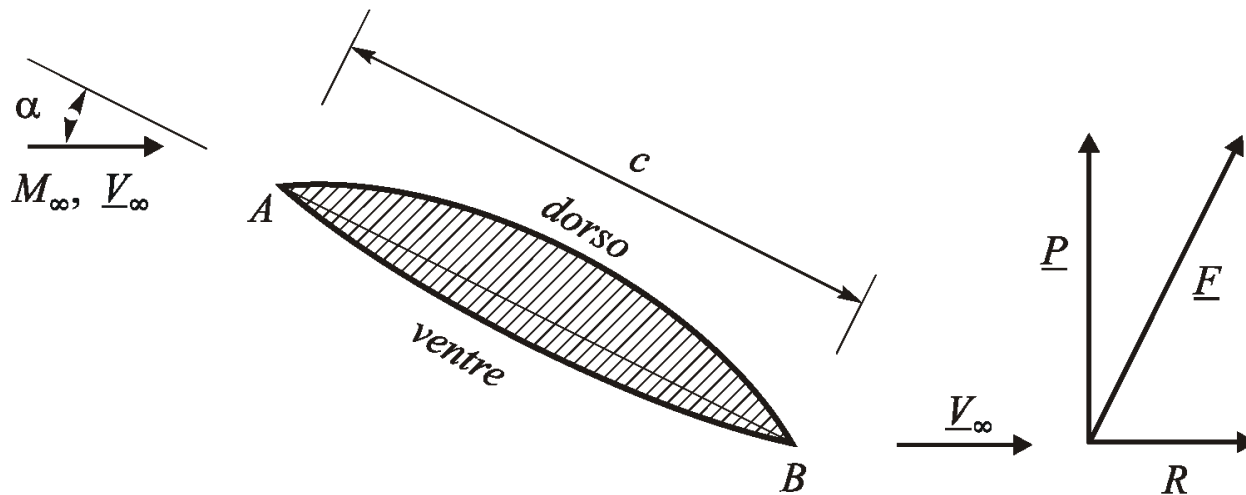
IL METODO URTO-ESPANSIONE

Una interessante applicazione delle teorie dell'onda d'urto obliqua e dell'espansione alla Prandtl e Meyer è quella relativa alla determinazione della portanza e della resistenza di profili alari bidimensionali supersonici con il cosiddetto metodo urto-espansione.

Questo metodo consente di calcolare queste due quantità ma non permette di valutare la resistenza viscosa del profilo che non è qui considerata.

Va comunque osservato che conoscere la distribuzione di pressione sul profilo, cui il metodo conduce, è il primo passo per la determinazione della resistenza viscosa.

Si consideri il profilo alare bidimensionale rappresentato in figura. Il punto A del profilo è chiamato bordo d'attacco, mentre il punto B bordo di uscita.



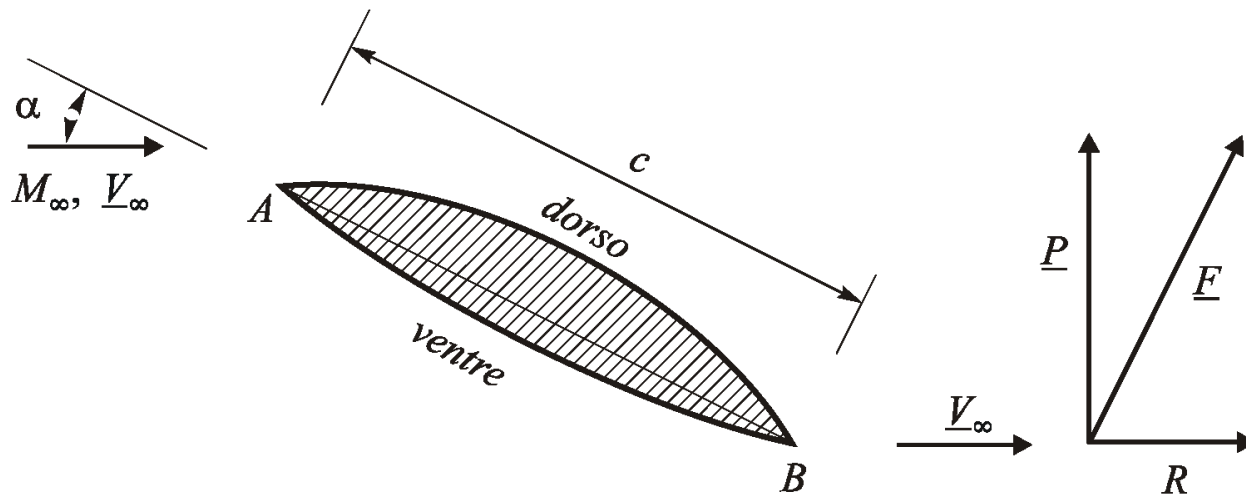
Il segmento AB rappresenta la **corda** c del profilo e l'angolo α che esso forma con la corrente indisturbata avente velocità V_∞ , si chiama **angolo di attacco** del profilo rispetto alla corrente, che, nel caso mostrato in figura, risulta **per convenzione positivo** (bordo d'attacco più alto di quello di uscita).

La superficie superiore del profilo da A a B si chiama **dorso**, mentre quella inferiore **ventre** del profilo.

È anche convenzione scomporre la forza \underline{F} che la corrente esercita sul profilo nelle sue **due componenti** R , la **resistenza** nella direzione di V_∞ , e P , la **portanza** in direzione normale a V_∞ .

Portanza e resistenza sono considerate positive quando hanno il verso indicato nella figura.

La resistenza è di per sé sempre positiva, mentre **la portanza può risultare anche negativa**, cioè diretta verso il basso (**profilo deportante**).



È poi convenzione porre portanza e resistenza nella forma:

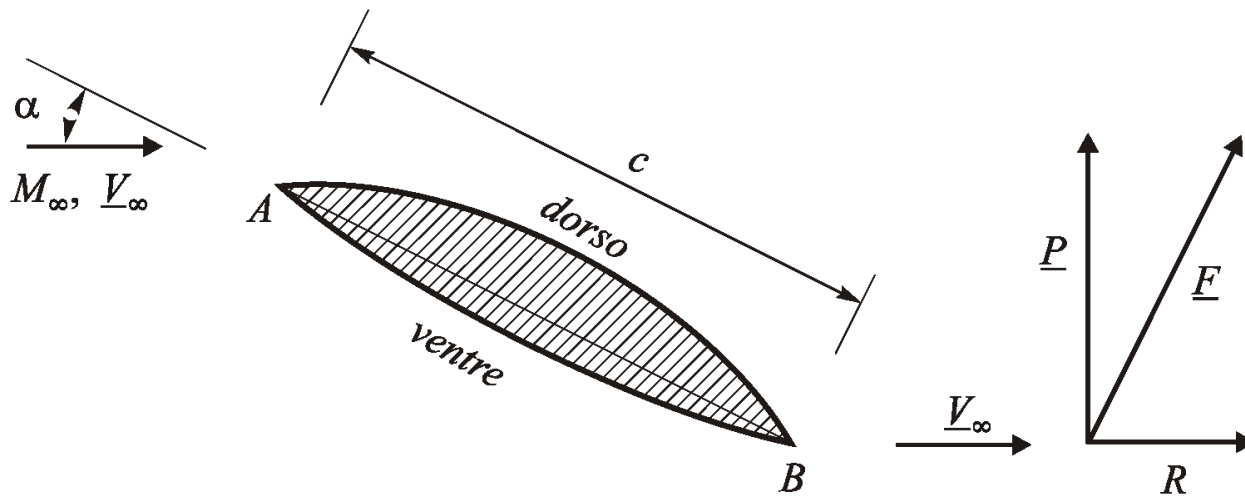
$$P = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_p$$

$$R = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_r$$

in cui l'area in pianta dell'ala è rappresentata dal prodotto $c \times 1$ (cioè essa è ***riferita all'unità di apertura alare del profilo***, nella direzione normale allo schermo)

Le quantità C_p e C_r sono rispettivamente dette ***coefficiente di portanza*** e ***coefficiente di resistenza*** del profilo.

Si ricordi quindi che, ovviamente sia la portanza P che la resistenza R , sono riferite all'***unità di apertura alare***.



Poiché nel caso di gas più che perfetto è possibile scrivere:

$$\rho_{\infty} V_{\infty}^2 = \rho_{\infty} a_{\infty}^2 M_{\infty}^2 = \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2$$

le definizioni dei **coefficienti di portanza e di resistenza** risultano essere rispettivamente:

$$P = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_p$$

→

$$C_p = \frac{2P}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \frac{2P}{\gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 c}$$

$$R = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_r$$

→

$$C_r = \frac{2R}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \frac{2R}{\gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 c}$$

Il motivo per cui si introducono i coefficienti di portanza e di resistenza risiede fondamentalmente nella necessità di poter **confrontare le prestazioni di profili alari aventi dimensioni e quota di volo (pressione ambiente) diverse tra loro**.

Infatti, **trascurando gli effetti viscosi**, **profili aventi dimensioni diverse, geometrie simili, uguale angolo di attacco** e che volano allo **stesso numero di Mach** hanno gli **stessi** C_p e C_r , ma **diversa portanza e resistenza**.

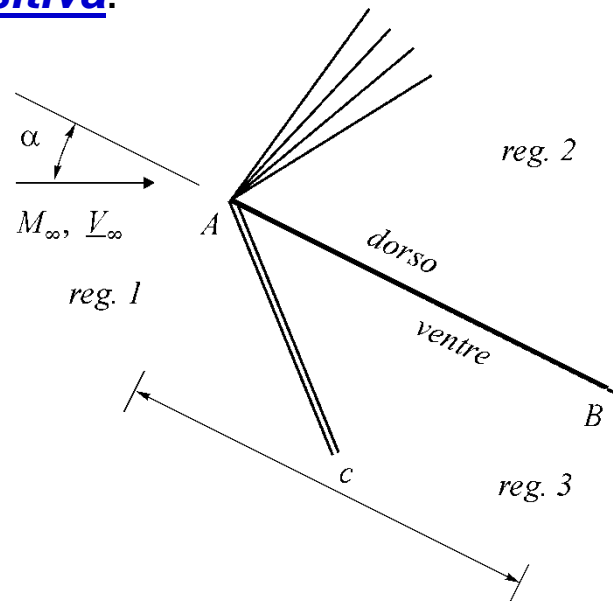
C_p e C_r , difatti, **non dipendono dalla corda né tanto meno dalla quota di volo**, ma **solo dall'angolo di incidenza α e dai numeri di Mach e Reynolds**.



Si consideri come profilo alare una lastra piana, di spessore infinitamente sottile, posta ad un angolo di attacco positivo α rispetto ad una corrente supersonica avente numero di Mach pari a M_∞ . Si supponga inoltre che α sia minore del δ_{max} corrispondente a M_∞ e si trascurino gli effetti viscosi.

Poiché sul bordo di attacco A del profilo la corrente supersonica trova una convessità nella parte superiore ed una concavità in quella inferiore, è chiaro che dal bordo d'attacco partiranno una espansione di Prandtl e Meyer verso l'alto ed un'onda d'urto obliqua debole verso il basso.

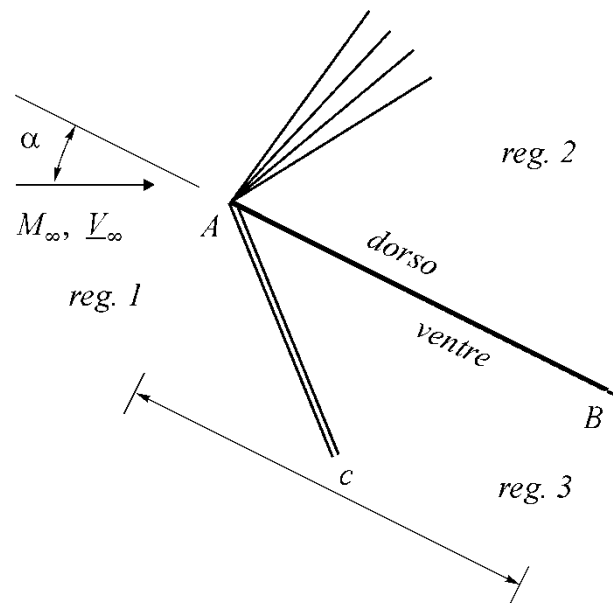
Il risultato di tutto ciò sarà una diminuzione della pressione sul dorso del profilo (regione 2) ed un aumento della stessa sul ventre (regione 3); quindi il profilo avrà una portanza positiva, oltre che una resistenza anch'essa ovviamente positiva.



Le due correnti supersoniche nelle regioni 2 e 3 hanno, pertanto, la stessa direzione ma **due diverse pressioni** ($p_3 > p_2$).

E' quindi necessario che dal bordo di uscita B del profilo partano un'**onda d'urto verso l'alto** (che faccia aumentare la pressione) ed un **ventaglio di espansione verso il basso** (che la faccia diminuire), si che le due correnti che lasciano il profilo, anche se con velocità tra loro diverse in modulo ma uguali in direzione, possano raggiungere la stessa pressione ($p_4 = p_5$).

Anche in questo caso esisterà una **linea di slip** e per risolvere completamente il problema (determinazione dell'inclinazione dell'onda d'urto obliqua tra le regioni 2 e 4, dell'ampiezza del ventaglio di espansione tra le regioni 3 e 5 e quindi dell'inclinazione della linea di slip) si deve **procedere per tentativi**.

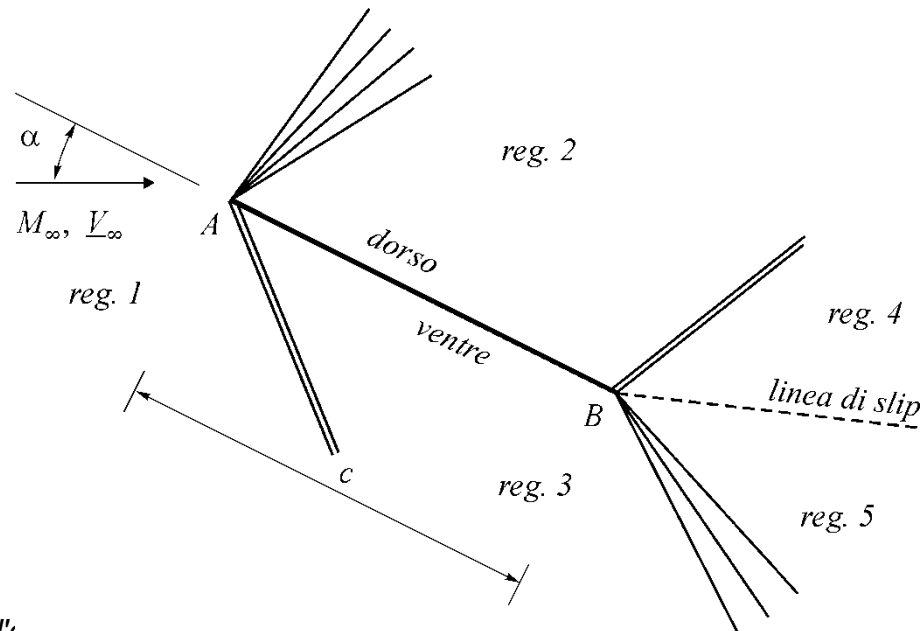


Al fine, però, di determinare la portanza e la resistenza sul profilo, **detta risoluzione non è necessaria** perché influenza solo ed unicamente gli stati termofluidodinamici nelle **regioni 4 e 5** poste a valle del profilo stesso e non la distribuzione di pressione sul profilo.

Nel caso semplice di lastra piana, la portanza e la resistenza per unità di apertura alare sono date da:

$$P = (p_3 - p_2)c \cos \alpha \quad ; \quad R = (p_3 - p_2)c \sin \alpha$$

in cui le quantità $(c \cos \alpha)$ e $(c \sin \alpha)$ rappresentano le due **proiezioni della superficie alare in direzione normale alla portanza e normale alla resistenza, rispettivamente.**



$$P = (p_3 - p_2)c \cos \alpha \quad ; \quad R = (p_3 - p_2)c \sin \alpha$$

Sostituendo queste due quantità nelle:

$$C_p = \frac{2P}{\rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{2P}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c} \quad ; \quad C_r = \frac{2R}{\rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{2R}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c}$$

si ottengono i coefficienti di portanza e resistenza del profilo:

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \cos \alpha \quad ; \quad C_r = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \sin \alpha = C_p \tan \alpha$$

che si annullano entrambi per $\alpha = 0$ poiché in questo caso $p_2 = p_3 = p_\infty$.

In generale, i due rapporti di pressione p_2/p_∞ e p_3/p_∞ dipendono solo da γ e M_∞ , oltre che da α .

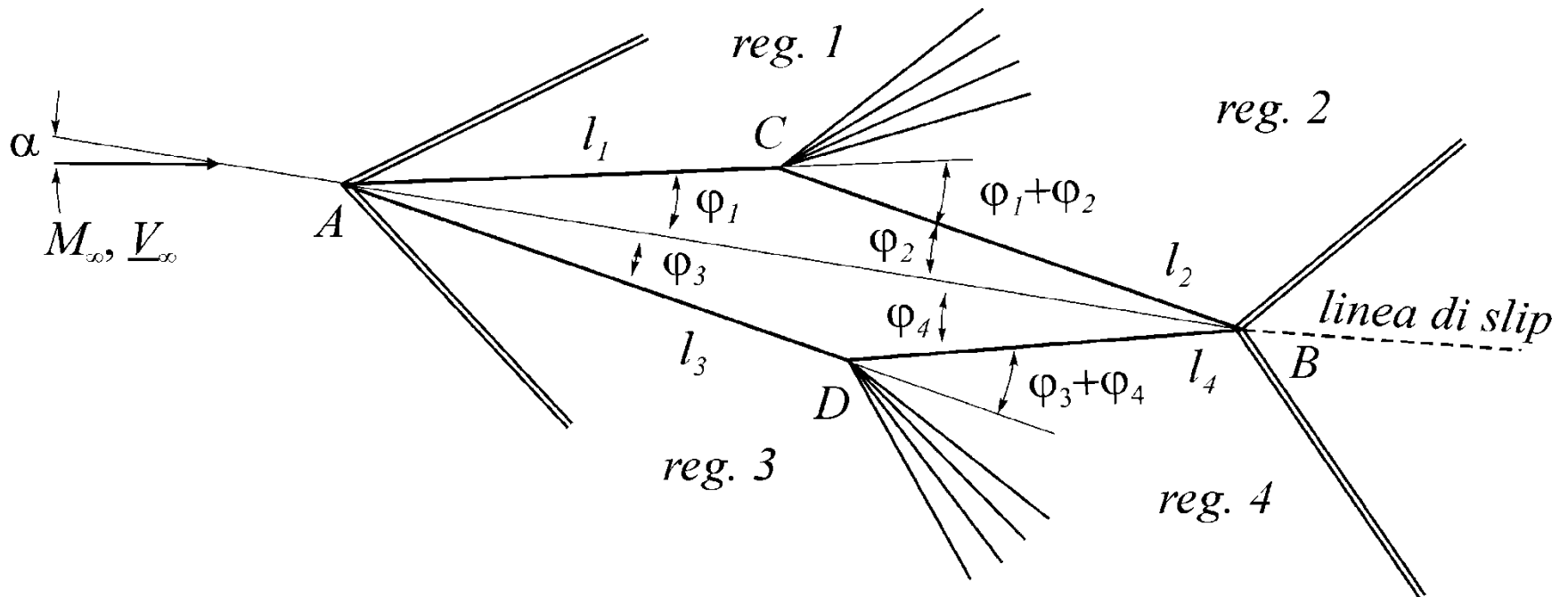
Invece, come già detto in precedenza, e come si può notare dalle due relazioni che li esprimono, risulta che C_p e C_r risultano **indipendenti dalla corda c e dalla pressione ambiente p_∞** .



Di seguito si considera il caso di un profilo alare a sezione quadrilatera posto ad un determinato angolo di attacco α in una corrente supersonica (caratterizzata da γ e M_∞) e con $\alpha + \varphi_3 < \delta_{max}$.

Potrebbe essere questo il caso di un profilo supersonico che, per quanto detto in precedenza, deve avere un bordo d'attacco affilato.

Ovviamente si suppongono note le caratteristiche geometriche del profilo quali l_1, l_2, l_3 e l_4 , e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4 .



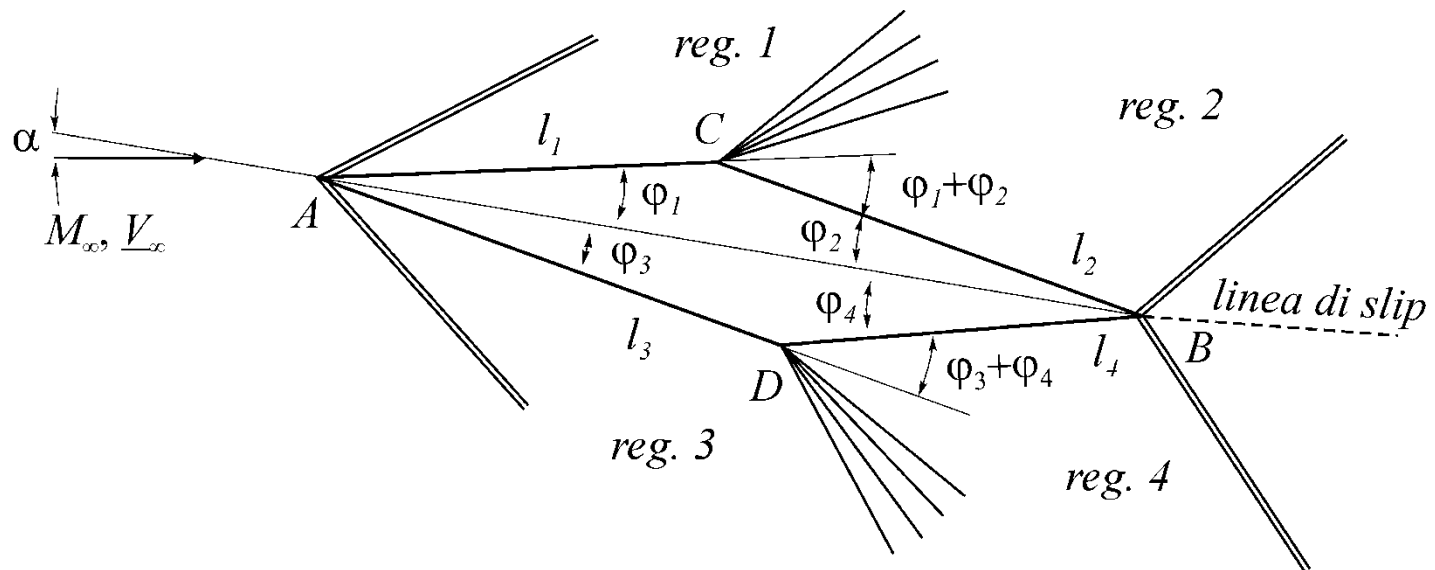
Gli *angoli* sono considerati *positivi nei versi mostrati in figura*.

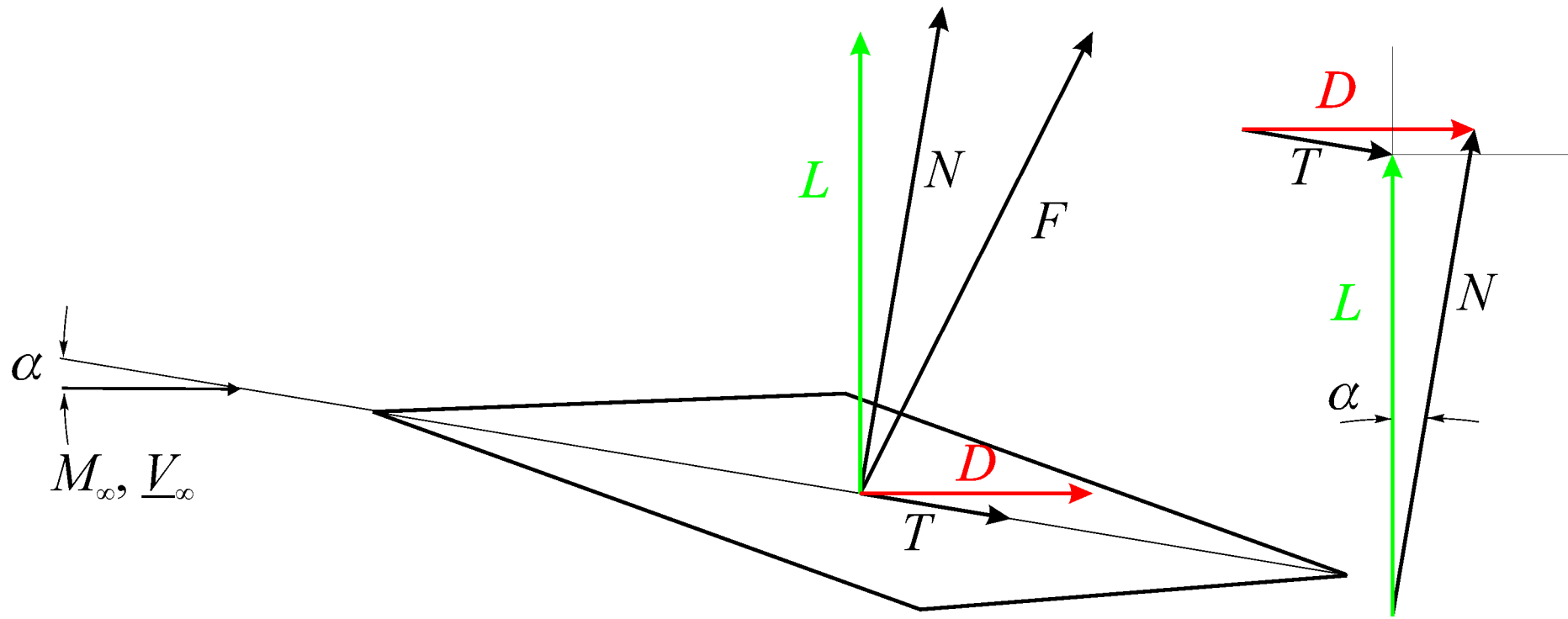
L'onda d'urto in alto a sinistra e quella in basso a destra potrebbero essere, in alcuni casi, sostituite da un ventaglio di espansione (caso della lastra piana).

Il teorema dei seni, applicato ai due triangoli in cui è possibile scomporre il quadrilatero diviso dalla corda, conduce a:

$$l_1 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} c \quad ; \quad l_2 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} c$$

$$l_3 = \frac{\sin \varphi_4}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)} c \quad ; \quad l_4 = \frac{\sin \varphi_3}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)} c$$





La configurazione fluidodinamica per $\alpha < \varphi_1$ è quella rappresentata in figura.

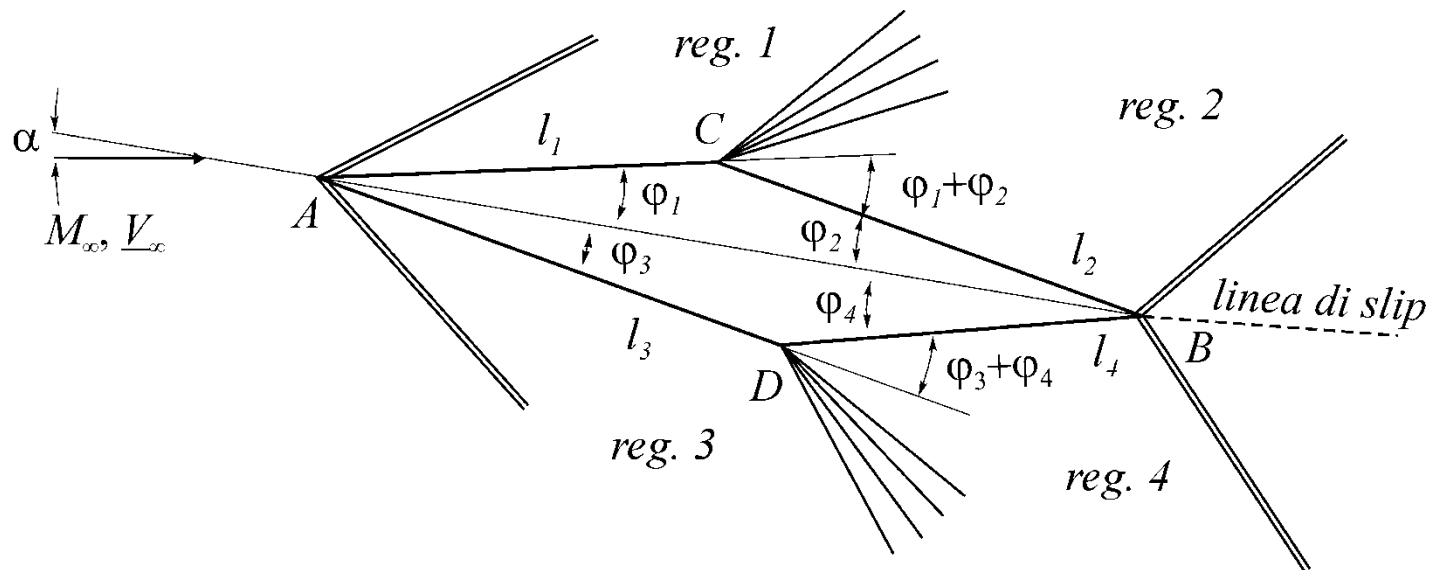
Le due onde d'urto oblique che partono dal bordo di attacco A del profilo sono dovute alla deviazione della corrente verso l'alto della quantità $(\varphi_1 - \alpha)$ ed a quella verso il basso di $(\varphi_3 + \alpha)$.

I due ventagli di espansione che partono dai punti C e D sono dovuti alle due convessità ivi presenti.

Le due onde d'urto che partono dal bordo di uscita B derivano da una situazione analoga a quanto visto nelle onde d'urto oblique e l'onda in basso può essere sostituita da un ventaglio di espansione come nella lastra piana.

La portanza e la resistenza della [sola superficie l](#) sono date da:

$$P_1 = -p_1 l_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) \quad ; \quad R_1 = p_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \alpha)$$



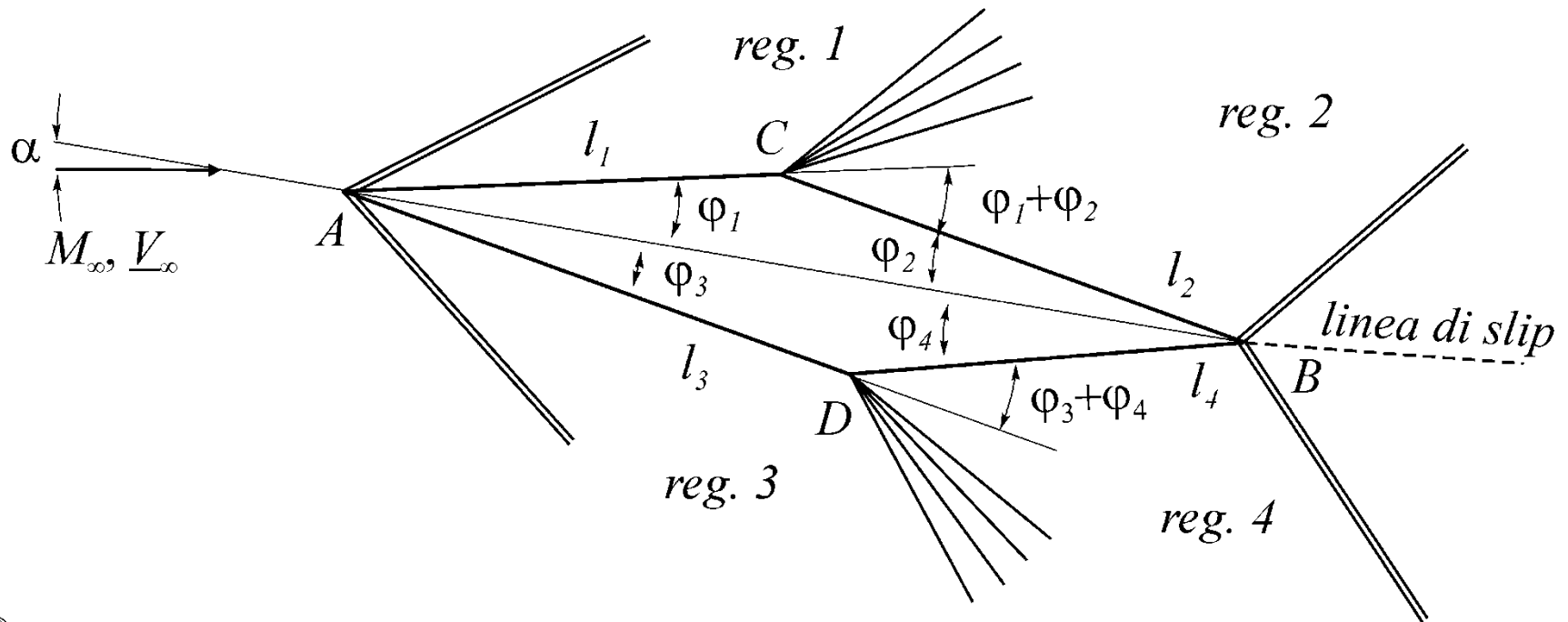
$$P_1 = -p_1 l_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) \quad ; \quad R_1 = p_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \alpha)$$

e analogamente per le altre superfici:

$$P_2 = -p_2 l_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \quad ; \quad R_2 = -p_2 l_2 \sin(\varphi_2 + \alpha)$$

$$P_3 = p_3 l_3 \cos(\varphi_3 + \alpha) \quad ; \quad R_3 = p_3 l_3 \sin(\varphi_3 + \alpha)$$

$$P_4 = p_4 l_4 \cos(\varphi_4 - \alpha) \quad ; \quad R_4 = -p_4 l_4 \sin(\varphi_4 - \alpha)$$



Sostituendo le relazioni precedenti nelle:

$$C_p = \frac{2P}{\rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{2P}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c} \quad ; \quad C_r = \frac{2R}{\rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{2R}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c}$$

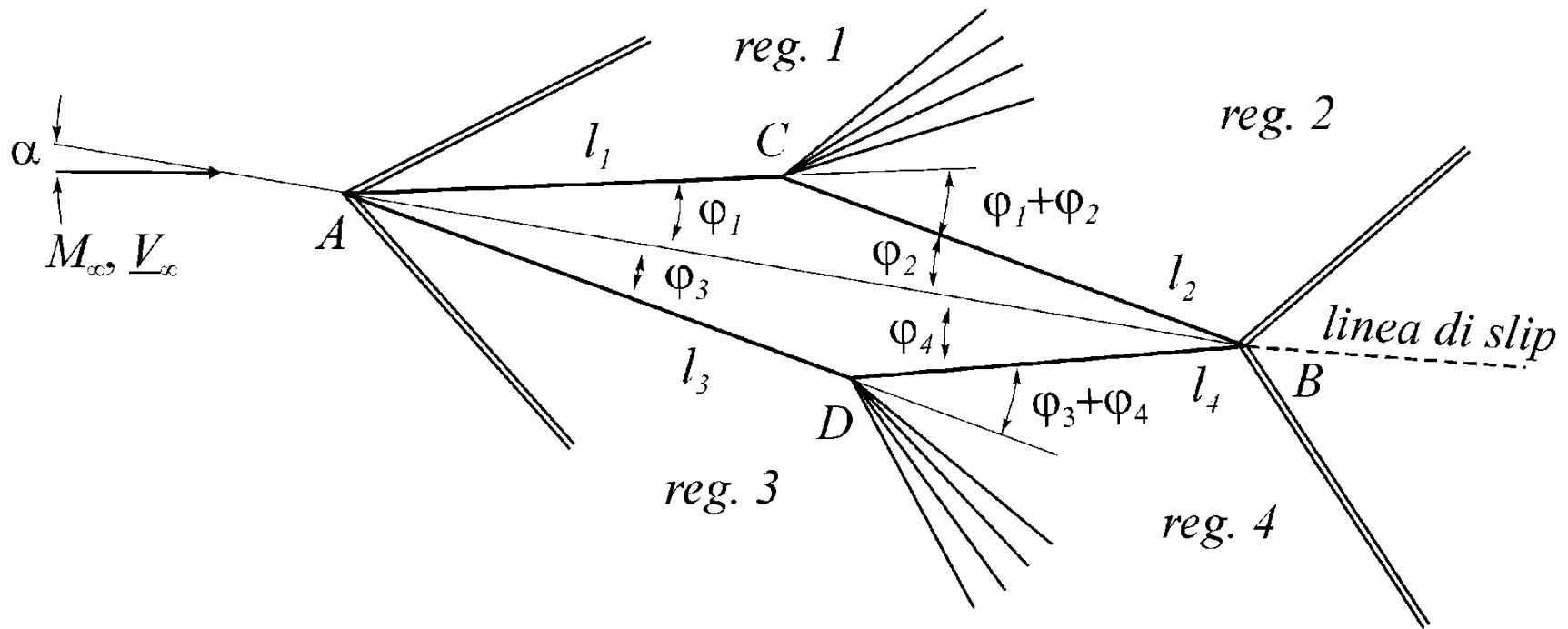
e tenendo conto delle espressioni di l_1 , l_2 , l_3 e l_4 , si ottiene infine:

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ -\frac{I}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \left[\sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \alpha) \frac{P_1}{p_\infty} + \sin \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \alpha) \frac{P_2}{p_\infty} \right] \right. \\ \left. + \frac{I}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)} \left[\sin \varphi_4 \cos(\varphi_3 + \alpha) \frac{P_3}{p_\infty} + \sin \varphi_3 \cos(\varphi_4 - \alpha) \frac{P_4}{p_\infty} \right] \right\}$$

$$C_r = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \frac{I}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \left[\sin \varphi_2 \sin(\varphi_1 - \alpha) \frac{P_1}{p_\infty} + \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \alpha) \frac{P_2}{p_\infty} \right] \right. \\ \left. + \frac{I}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)} \left[\sin \varphi_4 \sin(\varphi_3 + \alpha) \frac{P_3}{p_\infty} - \sin \varphi_3 \sin(\varphi_4 - \alpha) \frac{P_4}{p_\infty} \right] \right\}$$

Ancora una volta si può notare che C_p e C_r non dipendono dalla corda né da p_∞ .





Ovviamente, nel caso in cui l'angolo di attacco del profilo sia $\alpha > \varphi_1$, l'onda d'urto obliqua che parte dal bordo di attacco A del profilo verso l'alto deve essere sostituita da un **ventaglio di espansione**.

Infatti, la **concavità**, che la corrente ivi incontra per $\alpha < \varphi_1$, viene rimpiazzata da una **convessità** come nel caso già visto della lastra piana.

Come già detto, ciò vale anche per l'onda d'urto obliqua che parte dal bordo di attacco B verso il basso, nel modo già visto per la lastra piana.

