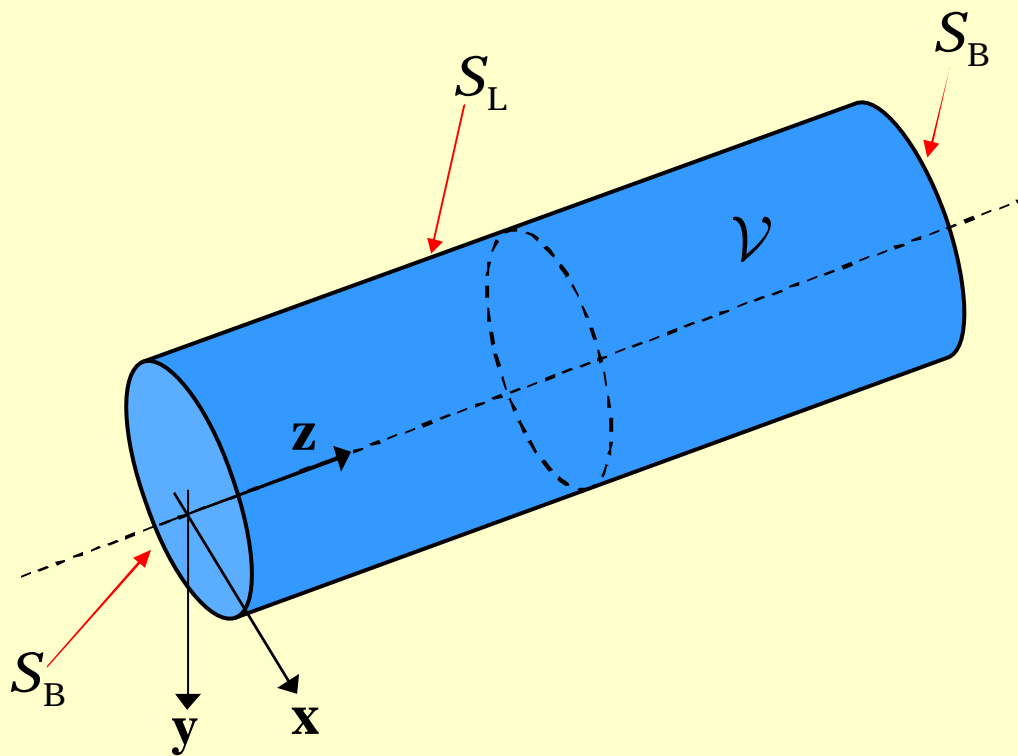


## **SOLIDO DI SAINT-VENANT**

Si definisce «**Solido di Saint-Venant**» un solido prismatico ottenibile dalla traslazione in direzione  $\mathbf{z}$  di una figura piana. La frontiera del solido è rappresentata da una superficie pressoché cilindrica detta *superficie laterale* e dalle sezioni terminali dette *basi*.



Il solido è considerato libero nello spazio. Ne segue che i carichi ad esso applicati devono costituire un sistema in equilibrio.

**In particolare si ipotizza:**

- Assenza di forze di volume:

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{in } \nu$$

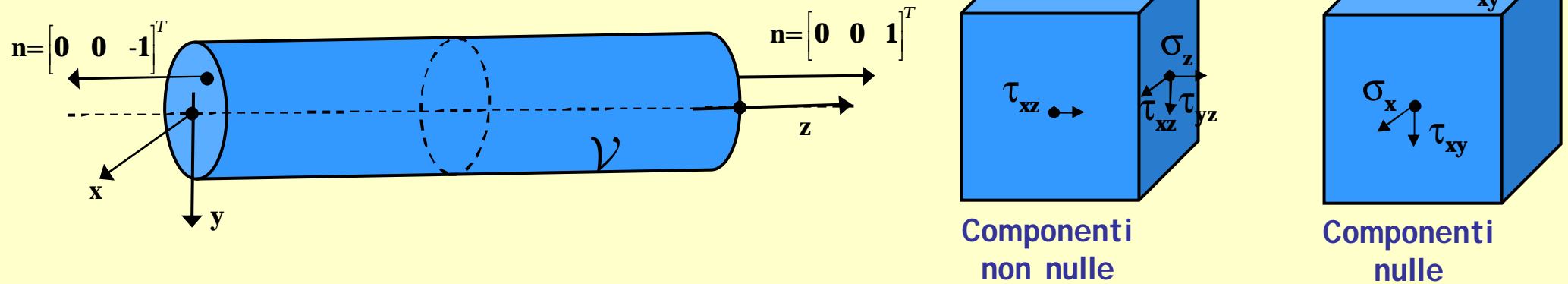
- Assenza di forze di superficie applicate alla superficie laterale:

$$\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{su } S_L; \quad \underline{\mathbf{p}} \neq \underline{\mathbf{0}} \quad \text{su } S_B$$

- Si ricorda che:  $\underline{\mathbf{p}} = \underline{\underline{\mathbf{s}}}\underline{\underline{\mathbf{n}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_n^T \underline{\underline{\mathbf{s}}}$

## SOLIDO DI SAINT-VENANT

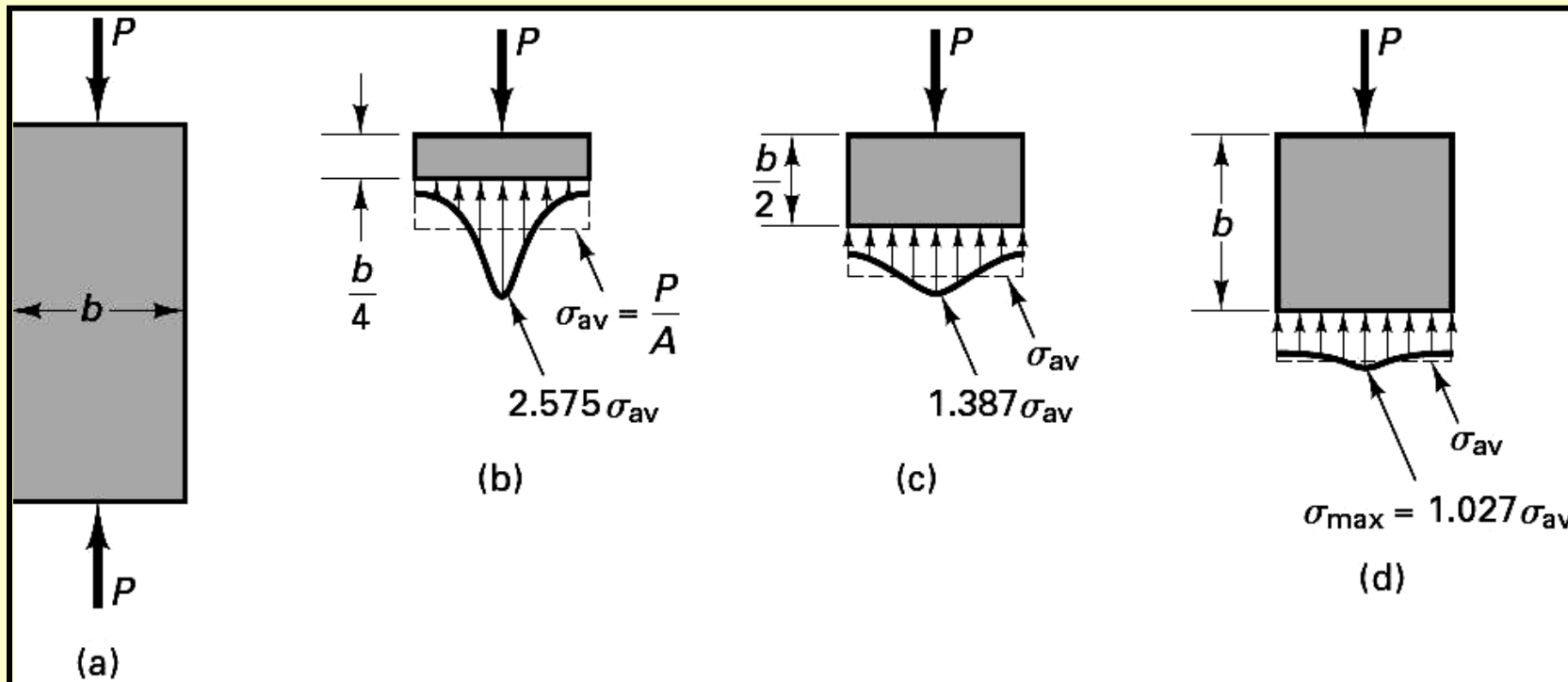
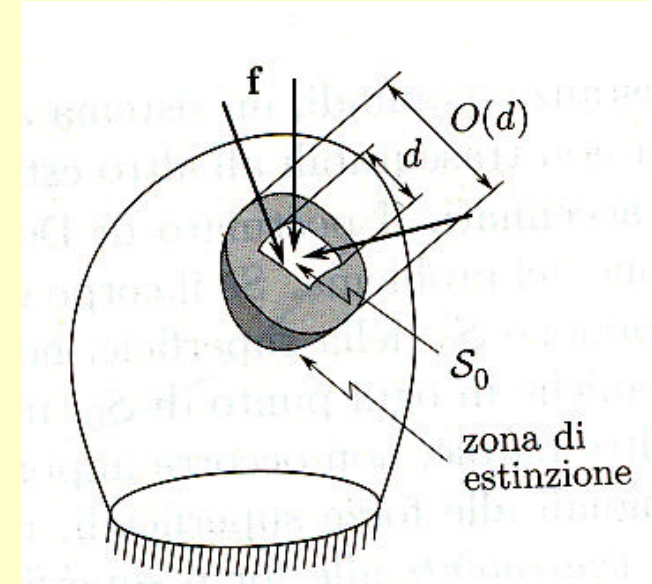
Nello spirito del metodo semi-inverso, la soluzione del problema dell'elasticità è stata ottenuta da *Saint-Venant* ipotizzando che sui piani paralleli all'asse baricentrico passanti per un qualunque punto interno siano nulle le componenti normali dello sforzo e quelle tangenziali ortogonali all'asse ( $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ).



- equazioni indef. di equilibrio:  $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$
- equazioni costitutive:  $\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z; \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \gamma_{xy} = 0; \quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$
- equazioni indef. di compatibilità: 
$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0. \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; \end{cases}$$

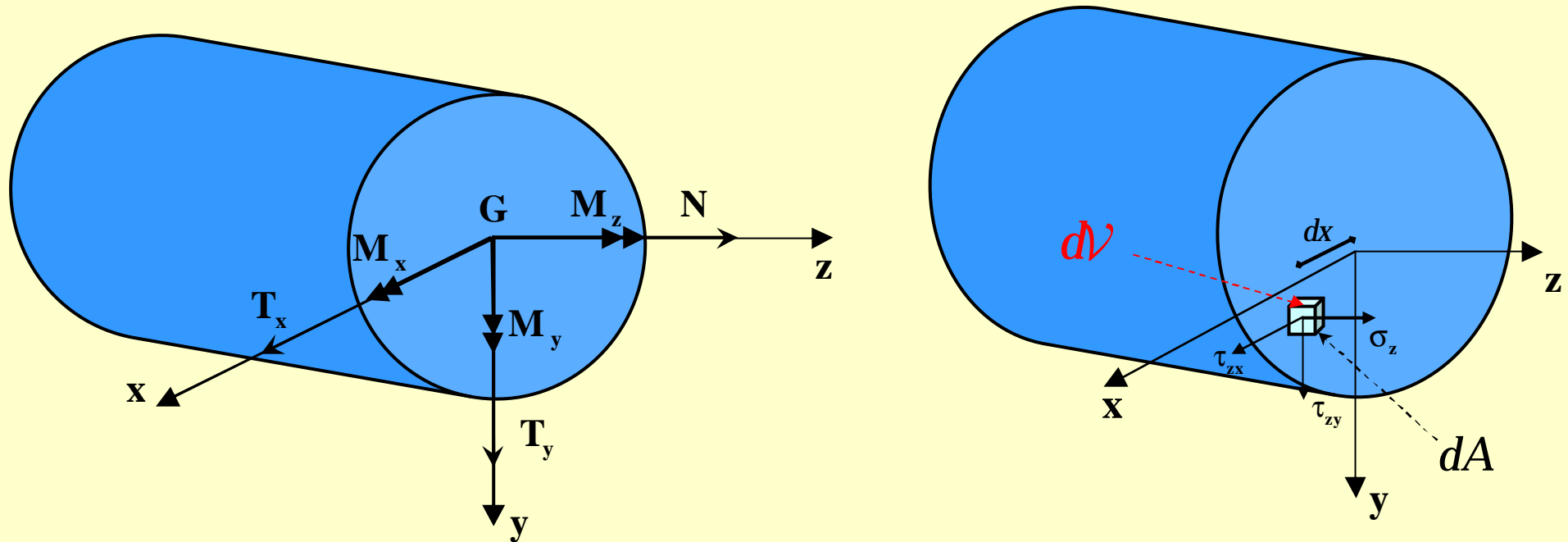
# SOLIDO DI SAINT-VENANT

**Postulato di Saint-Venant:** se ad un insieme di forze agenti su una piccola parte della superficie del solido se ne sostituisce un altro equivalente distribuito in modo diverso sulla medesima superficie, allora gli effetti dei due sistemi di forze sono identici ad una distanza dalla superficie di applicazione maggiore della massima dimensione lineare della superficie di applicazione delle forze.



## **SOLIDO DI SAINT-VENANT**

In virtù del *Postulato di Saint-Venant*, le basi del solido prismatico possono essere caricate da forze qualunque purché tra loro equivalenti.



Sforzo normale:  $N = \int_A \sigma_z dA$

Taglio secondo X:  $T_x = \int_A \tau_{zx} dA$

Taglio secondo Y:  $T_y = \int_A \tau_{zy} dA$

Momento torcente:  $M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$

Momento flettente X:  $M_x = \int_A \sigma_z y dA$

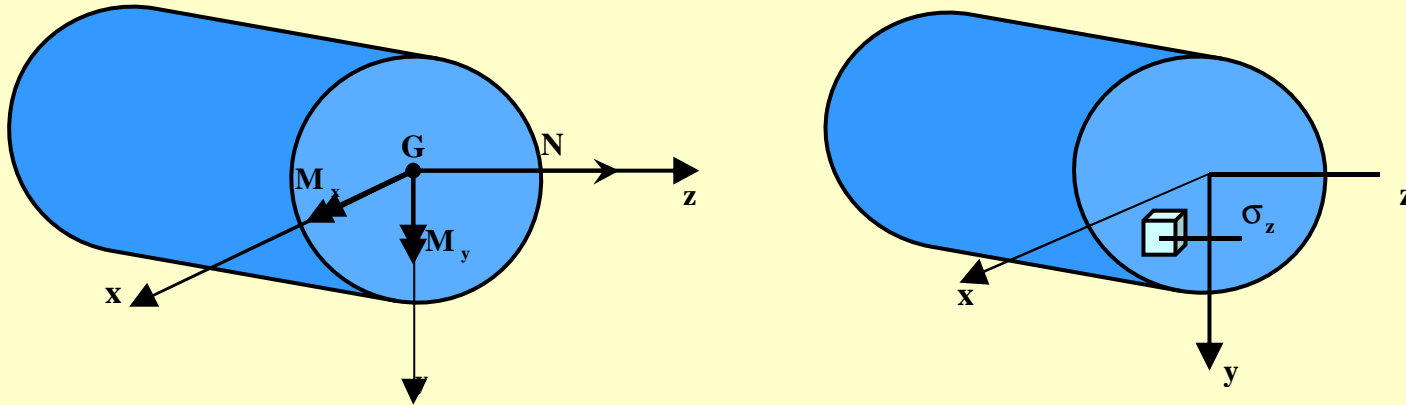
Momento flettente Y:  $M_y = - \int_A \sigma_z x dA$

## **SOLIDO DI SAINT VENANT: SFORZO NORMALE E FLESSIONE**

La particolarità del problema di Saint-Venant consente di determinare in modo semplice le soluzioni del problema dell'equilibrio elastico.

Nel caso di Sforzo Normale e Momento Flettente si è in uno stato di sforzo tensionale monoassiale.

$$\sigma_z \neq 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



Applicando il **metodo di soluzione alle tensioni** del problema dell'equilibrio elastico, si ha:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \text{equazione indefinita di equilibrio:}$$
$$\underline{\underline{\mathbb{R}D_s = 0}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0$$

La soluzione sarà del tipo:  $\sigma_z = ax + by + c$

# SOLIDO DI SAINT VENANT: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

➤ Componenti speciali della tensione, soluzione del problema:

$$\sigma_z = ax + by + c; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

➤ Componenti speciali della deformazione conseguenti:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z = \frac{1}{E} [ax + by + c]; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

➤ Componenti dello spostamento, a meno di moti rigidi, in quanto il corpo non è vincolato, soluzione delle equazioni indefinite di equilibrio:

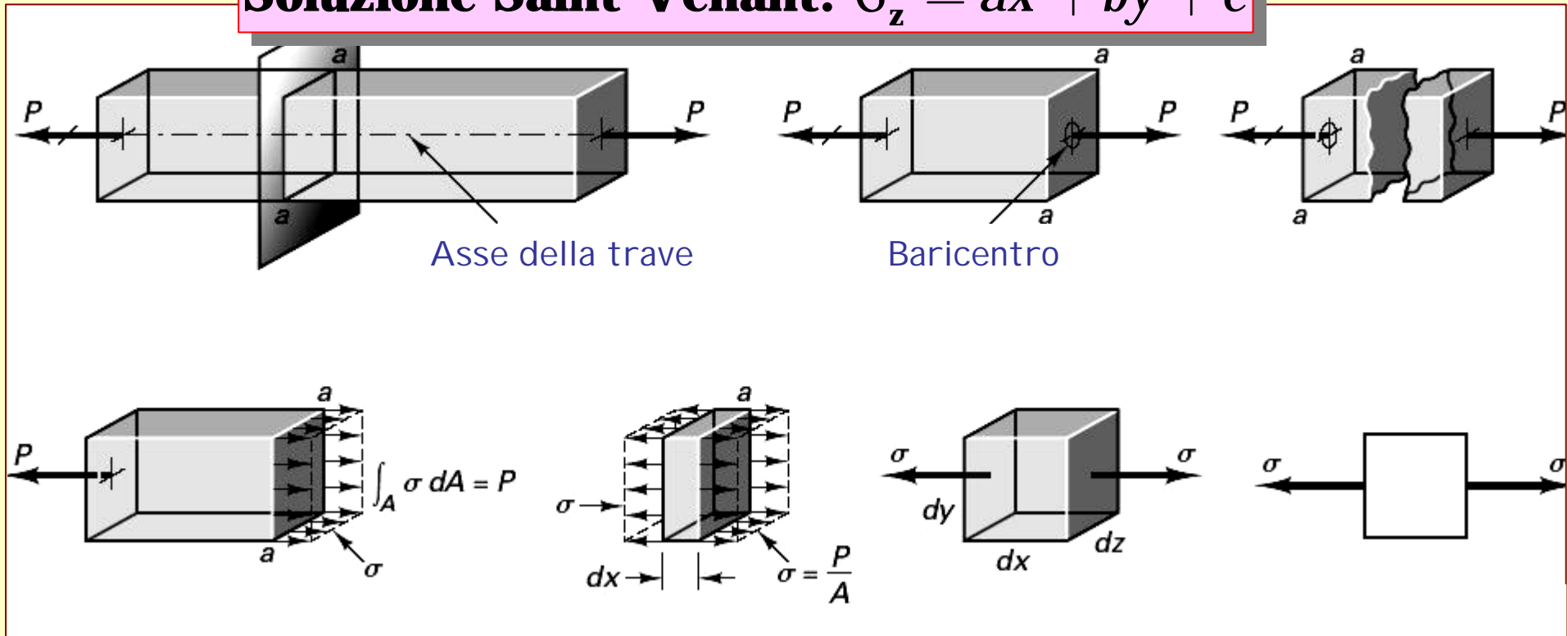
$$u_x = -\frac{a}{2E} z^2 - \frac{\nu}{E} \left[ \frac{a}{2} (x^2 - y^2) + bxy + cx \right]$$

$$u_y = -\frac{b}{2E} z^2 - \frac{\nu}{E} \left[ axy + \frac{b}{2} (y^2 - x^2) + cy \right]$$

$$u_z = \frac{1}{E} (ax + by + c) z$$

# SFORZO NORMALE CENTRATO

**Soluzione Saint Venant:  $\sigma_z = ax + by + c$**



$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A (ax + by + c) dA = aS_y + bS_x + cA = P$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A (ax + by + c) y dA = aI_{xy} + bI_x + cS_x = 0$$

$$M_y = -\int_A \sigma_z x dA = -\int_A (ax + by + c) x dA = -aI_x - bI_{xy} - cS_y = 0$$

$$c = \frac{P}{A}$$

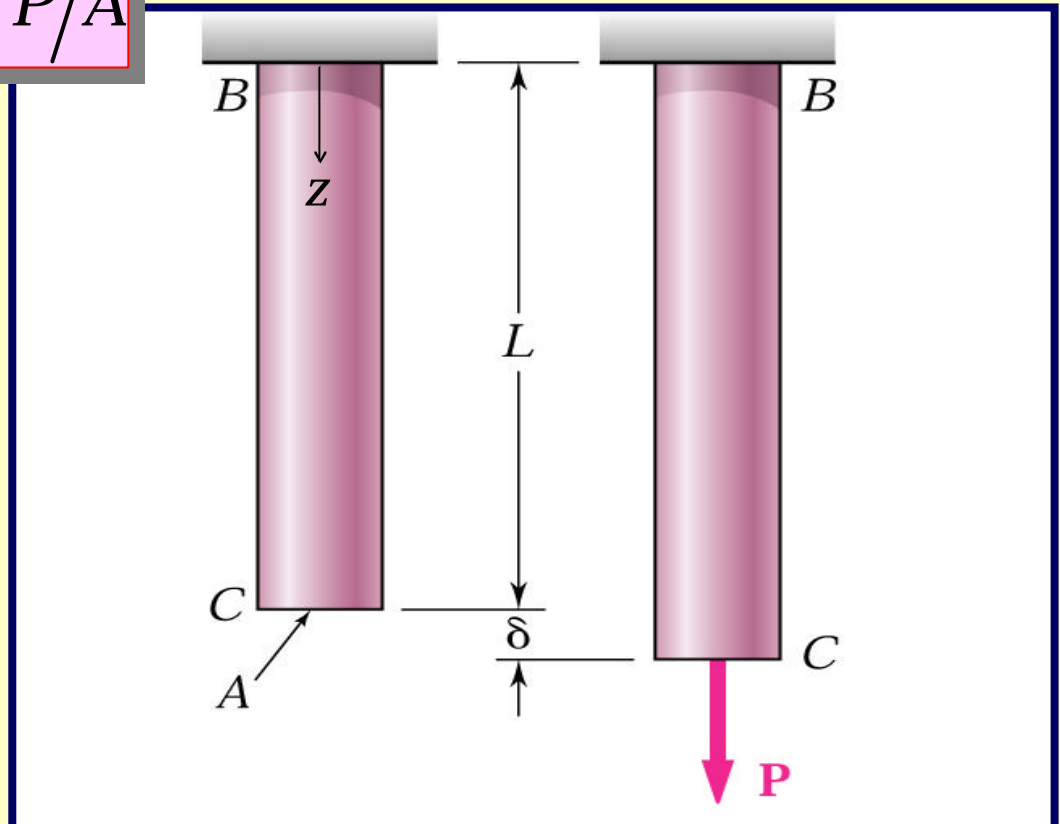
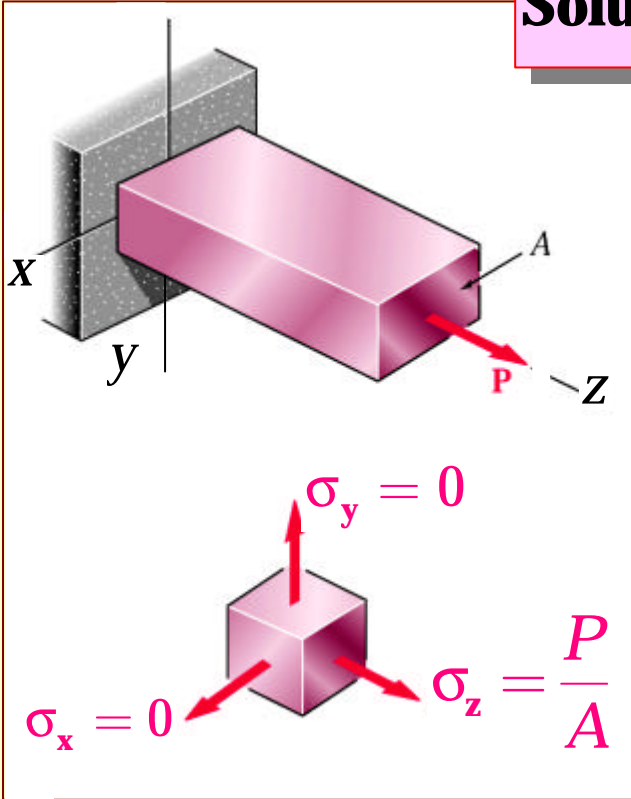
$$\rightarrow a = 0$$

$$b = 0$$

**Soluzione:  $\sigma_z = P/A$**

# SFORZO NORMALE CENTRATO

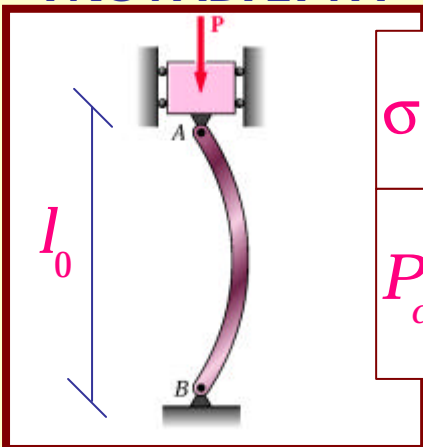
**Soluzione:**  $\sigma_z = P/A$



$$u_z(x, y, z) = \frac{1}{E} (ax + by + c)z; \quad a = 0, b = 0, c = \frac{P}{A}$$

$$\delta = u_z(x, y, L) = \frac{1}{E} (ax + by + c)L = \frac{PL}{EA}$$

## INSTABILITA'

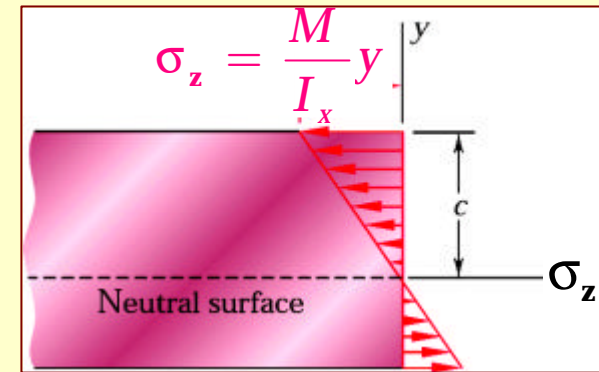
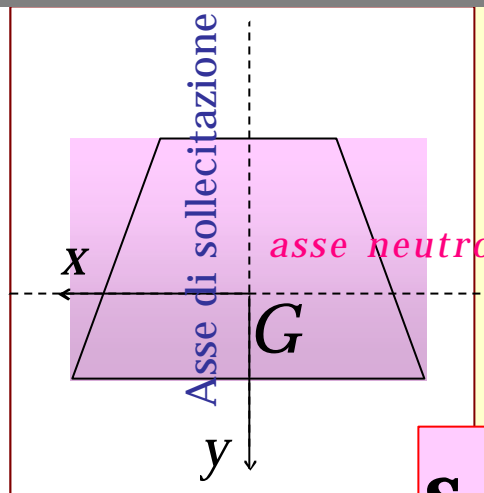
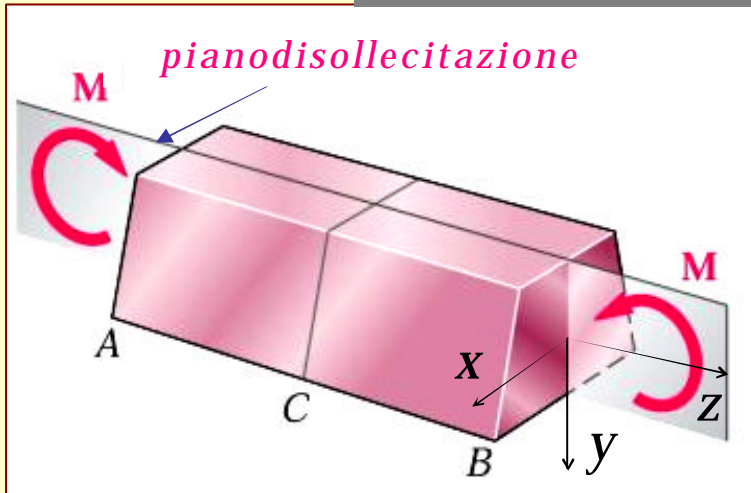


$$\sigma_{z,crit} = \frac{P_{crit}}{A}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_0^2}$$

# FLESSIONE RETTA

**Soluzione Saint Venant:  $\sigma_z = ax + by + c$**



**Soluzione:  $\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$**

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \int_A \sigma_z dA = \int_A (ax + by + c) dA = aS_y + bS_x + cA = 0 \\
 \mathbf{M}_x &= \int_A \sigma_z y dA = \int_A (ax + by + c) y dA = aI_{xy} + bI_x + cS_x = M \\
 \mathbf{M}_y &= -\int_A \sigma_z x dA = -\int_A (ax + by + c) x dA = -aI_x - bI_{xy} - cS_y = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 c &= 0 \\
 b &= \frac{M}{I_x} \\
 a &= 0
 \end{aligned}$$

# FLESSIONE RETTA

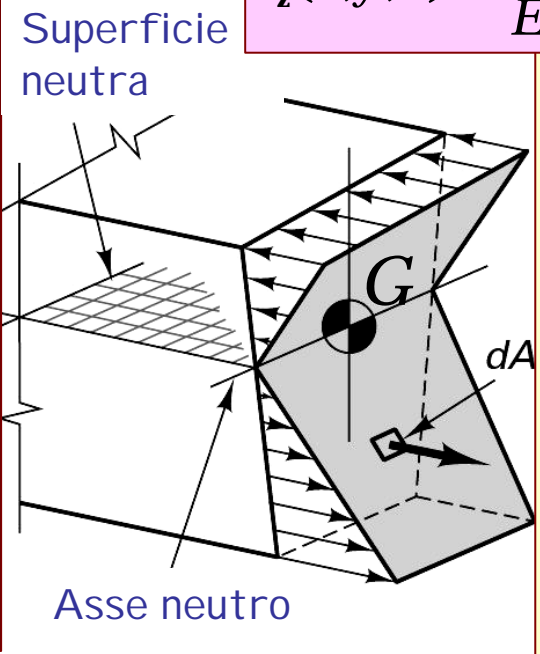
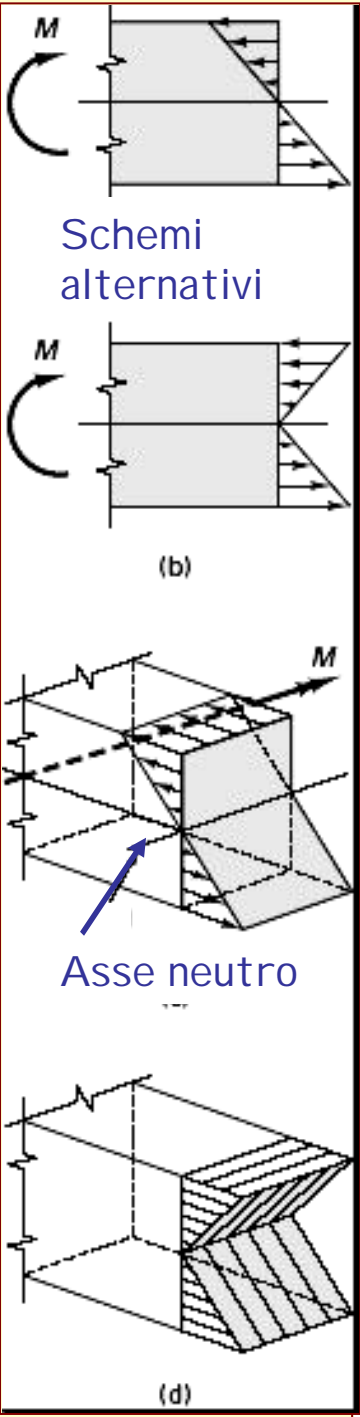
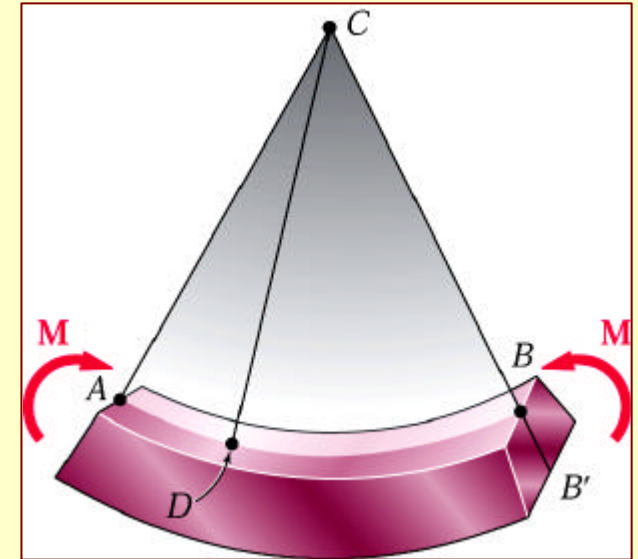
**Soluzione:**  $\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$

## Comp. spostamento

$$u_x(x,y,z) = -\frac{\nu M}{EI_x} xy$$

$$u_y(x,y,z) = -\frac{M}{2EI_x} z^2 - \frac{\nu M}{2EI_x} (y^2 - x^2)$$

$$u_z(x,y,z) = \frac{M}{EI_x} yz$$



## Comp. deformazioni

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{\nu M}{EI_x} y$$

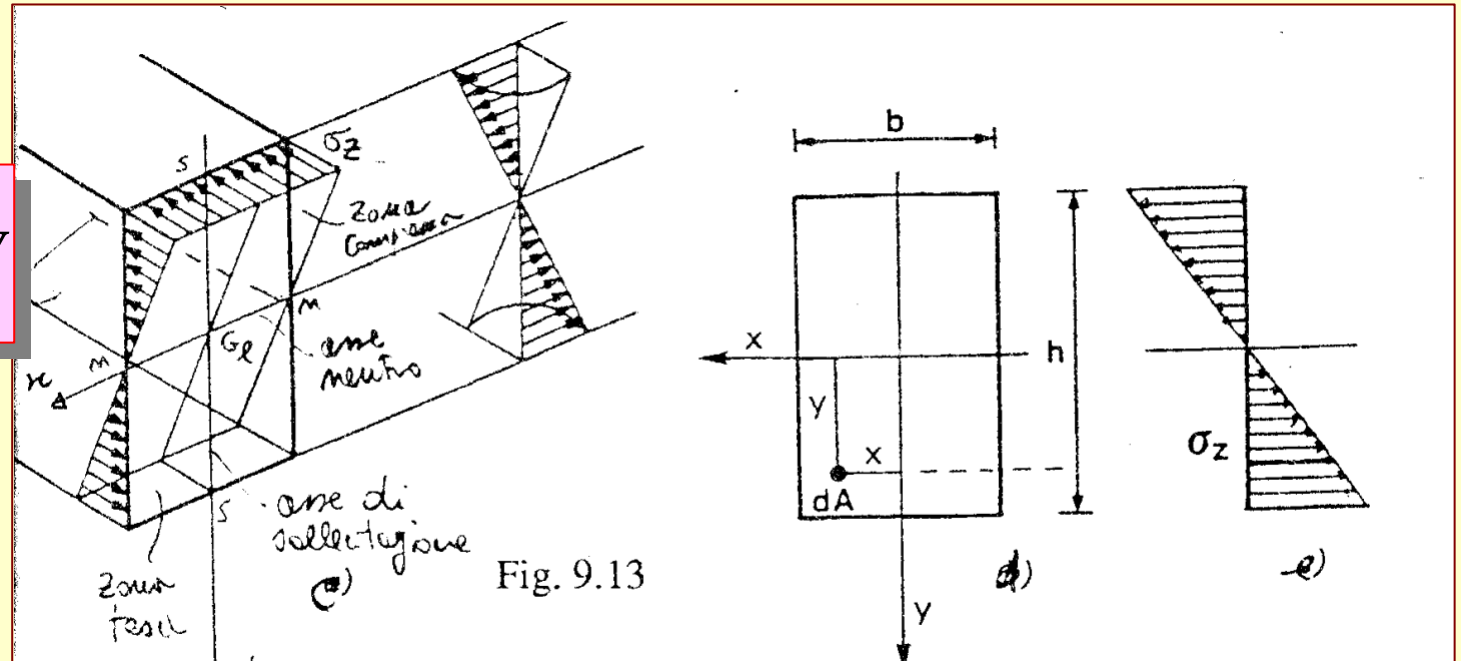
$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{\nu M}{EI_x} y$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial z} = \frac{M}{EI_x} y$$

# FLESSIONE RETTA

Rappresentazione piana delle tensioni normali nella flessione retta e valori di estremo

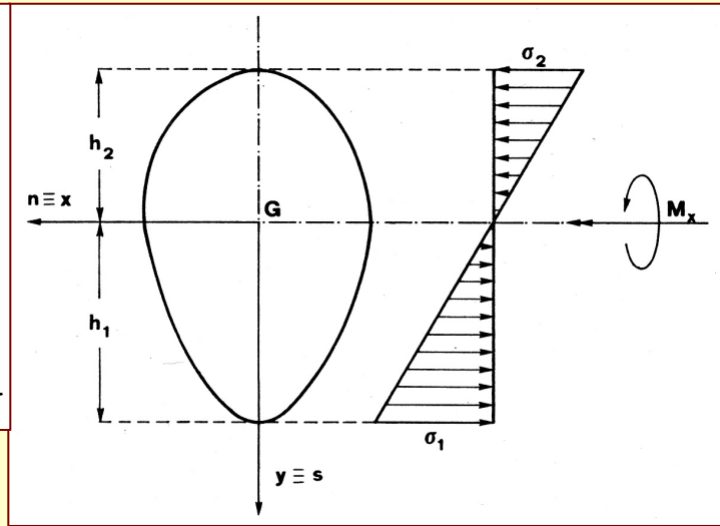
**Soluzione:**  $\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$



$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} h_1 = \frac{M}{W_{x_1}};$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M}{I_x} h_2 = -\frac{M}{W_{x_2}}.$$

$W_{x_1}, W_{x_2}$  moduli di resistenza



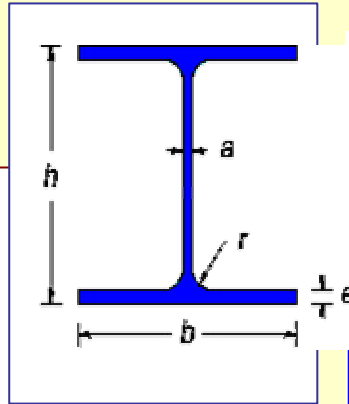
# FLESSIONE RETTA

**Soluzione:**  $\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} h_1 = \frac{M}{W_{x_1}}$$

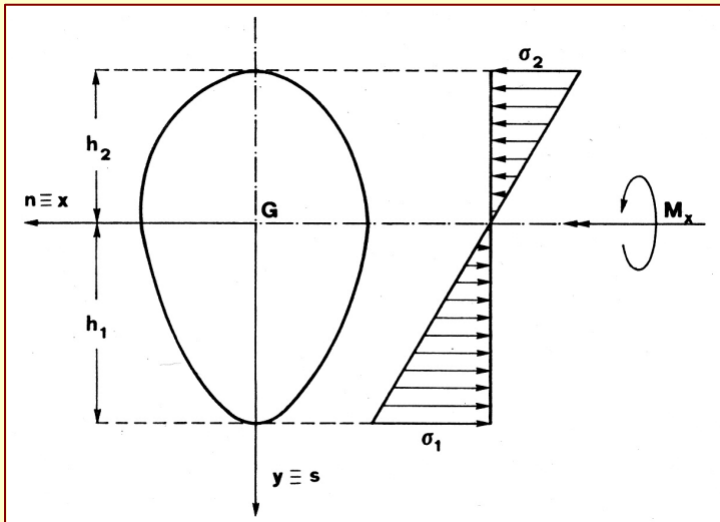
$$\sigma_{\min} = -\frac{M}{I_x} h_2 = -\frac{M}{W_{x_2}}$$

$W_{x_1}, W_{x_2}$  **moduli di resistenza**

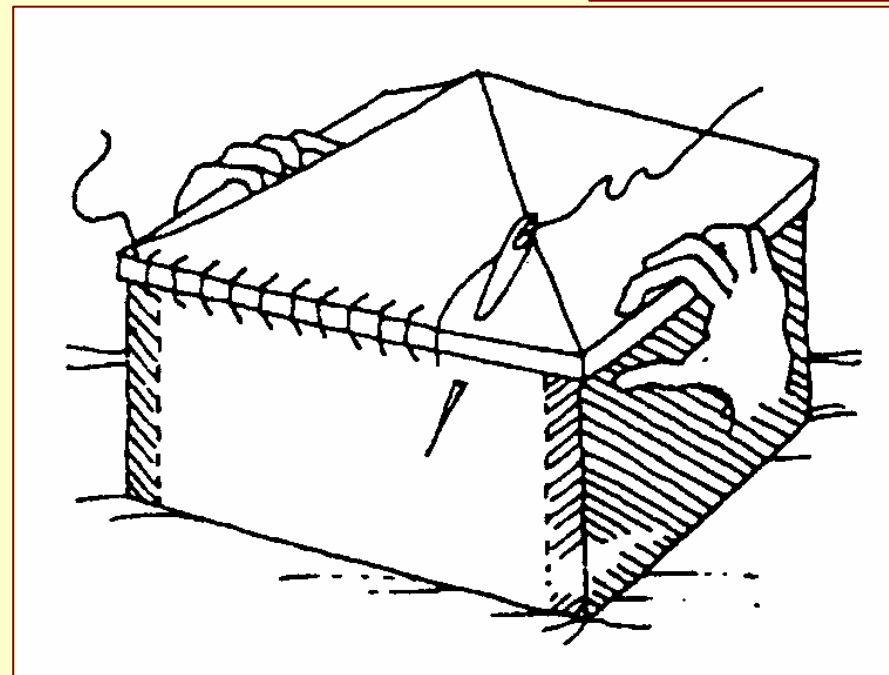
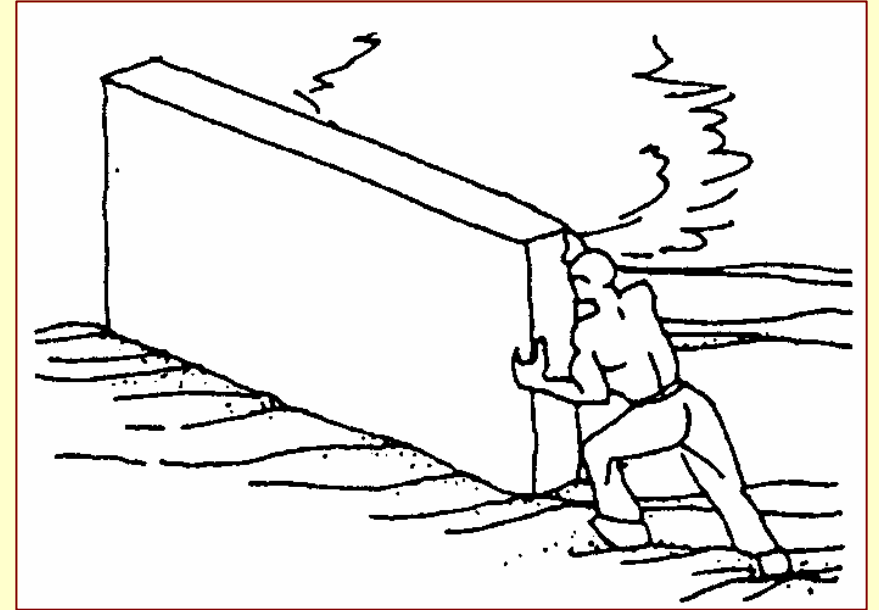
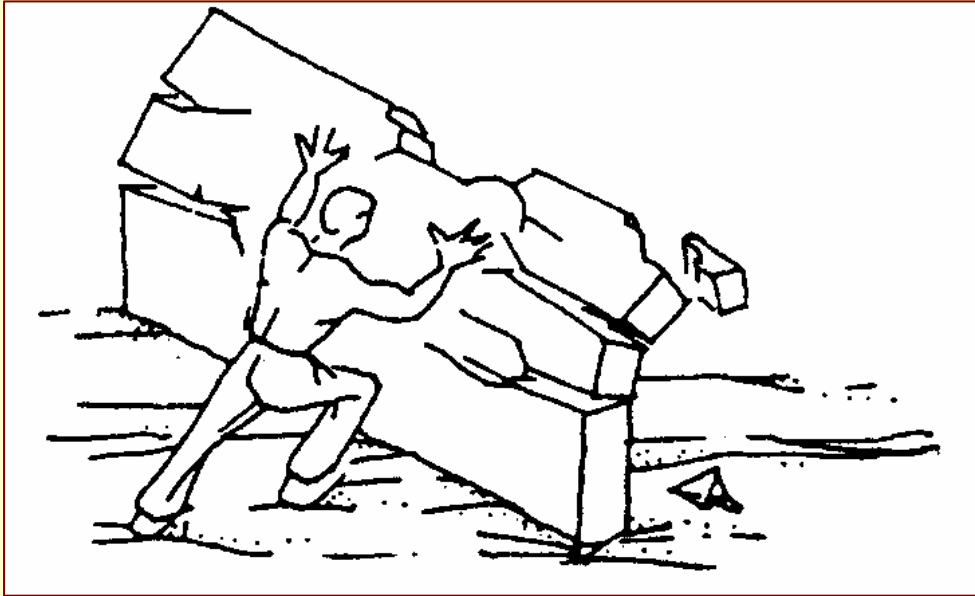


sigla HEA	b mm	h mm	a mm	e mm	r mm	Peso kg/m	Sezion e cm <sup>2</sup>	Momenti di inerzia		Moduli di resistenza		Raggi di inerzia	
								J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	J <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	i <sub>y</sub> cm

100	100	96	5,0	8,0	12	16,7	21,24	349,2	133,8	72,76	26,76	4,06	2,51
120	120	114	5,0	8,0	12	19,9	25,34	606,2	230,9	106,3	38,48	4,89	3,02
140	140	133	5,5	8,5	12	24,7	31,42	1.033	389,3	155,4	55,62	5,73	3,52
160	160	152	6,0	9,0	15	30,4	38,77	1.673	615,6	220,1	76,95	6,57	3,98
180	180	171	6,0	9,5	15	35,5	45,25	2.510	924,6	293,6	102,7	7,45	4,52
200	200	190	6,5	10,0	18	42,3	53,83	3.692	1.326	388,6	133,6	8,28	4,98
220	220	210	7,0	11,0	18	50,5	64,34	5.410	1.955	515,2	177,7	9,17	5,51
240	240	230	7,5	12,0	21	60,3	76,84	7.763	2.769	675,1	230,7	10,05	6,00
260	260	250	7,5	12,5	24	68,2	86,82	10.450	3.668	836,4	282,1	10,97	6,50
280	280	270	8,0	13,0	24	76,4	97,26	13.670	4.763	1.013	340,2	11,86	7,00
300	300	290	8,5	14,0	27	88,3	112,5	18.260	6.310	1.260	420,6	12,74	7,49

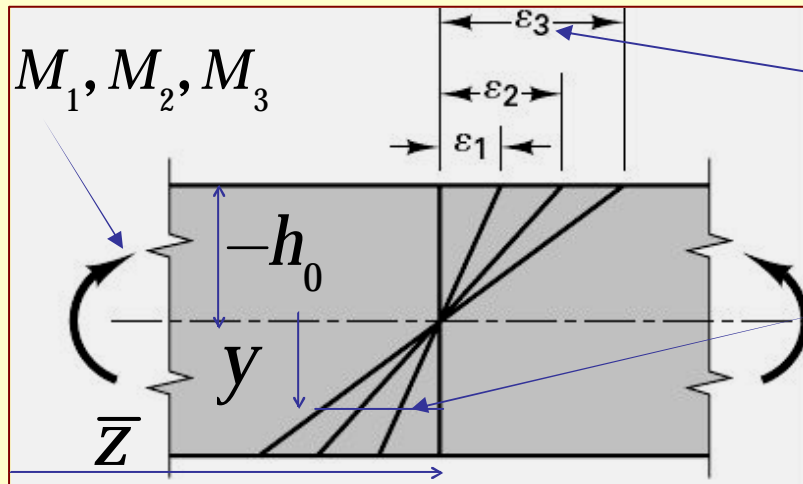
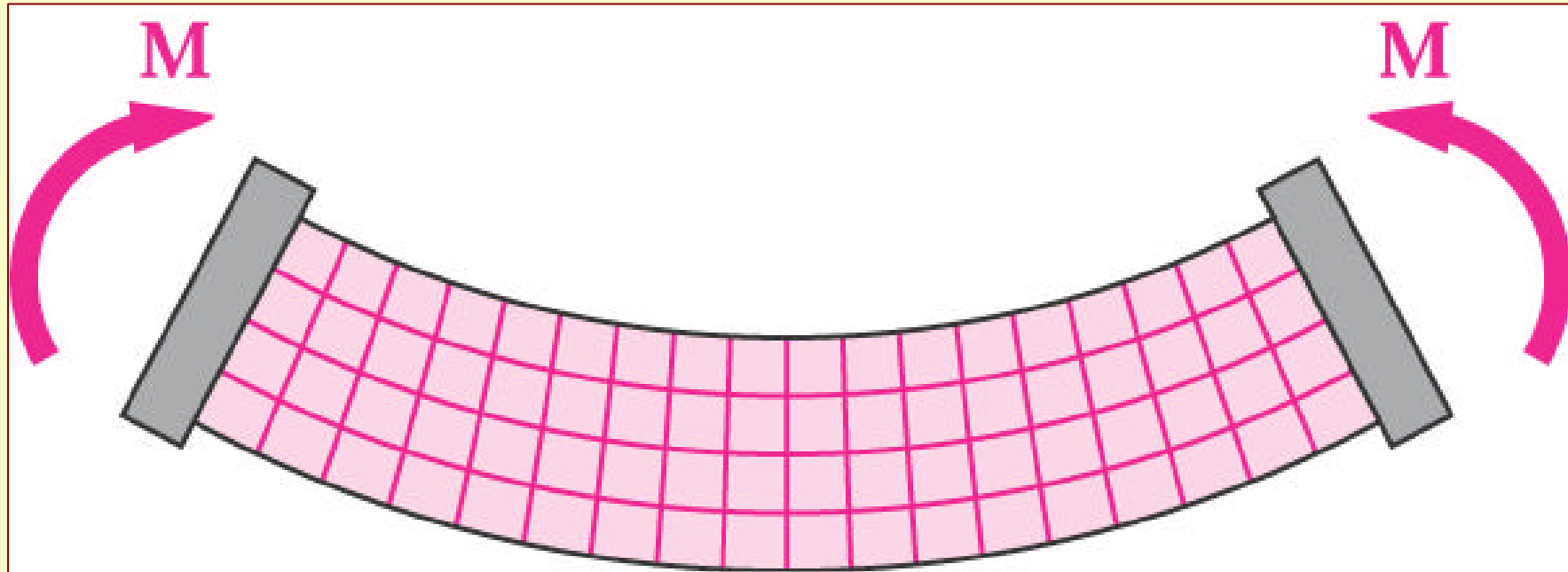


# FLESSIONE RETTA



# FLESSIONE RETTA

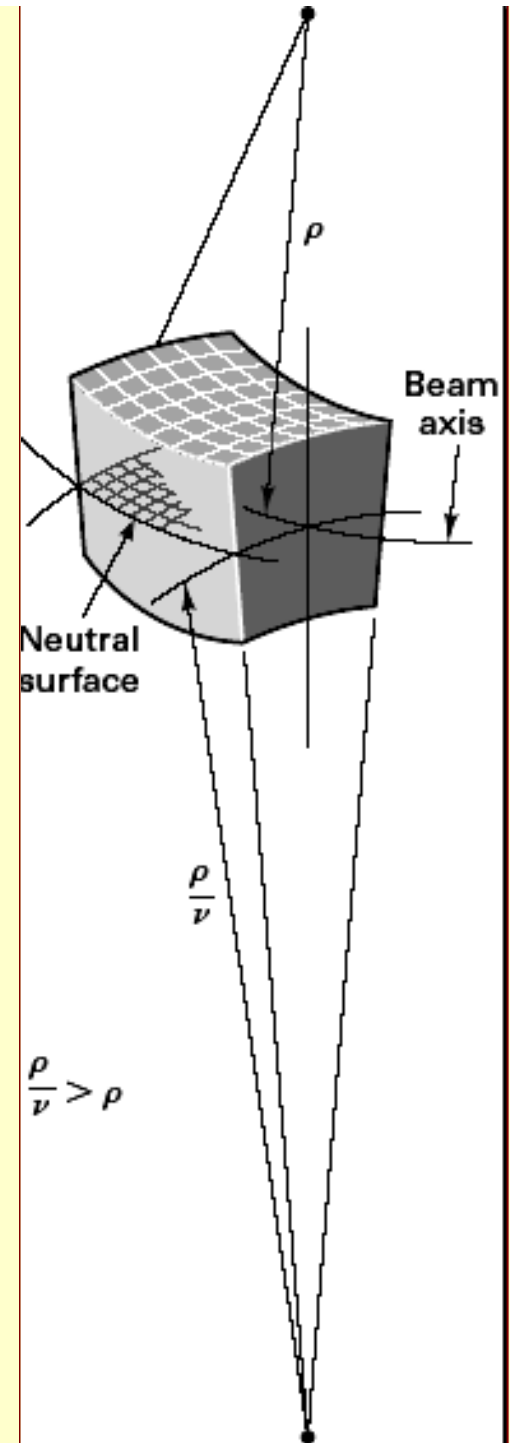
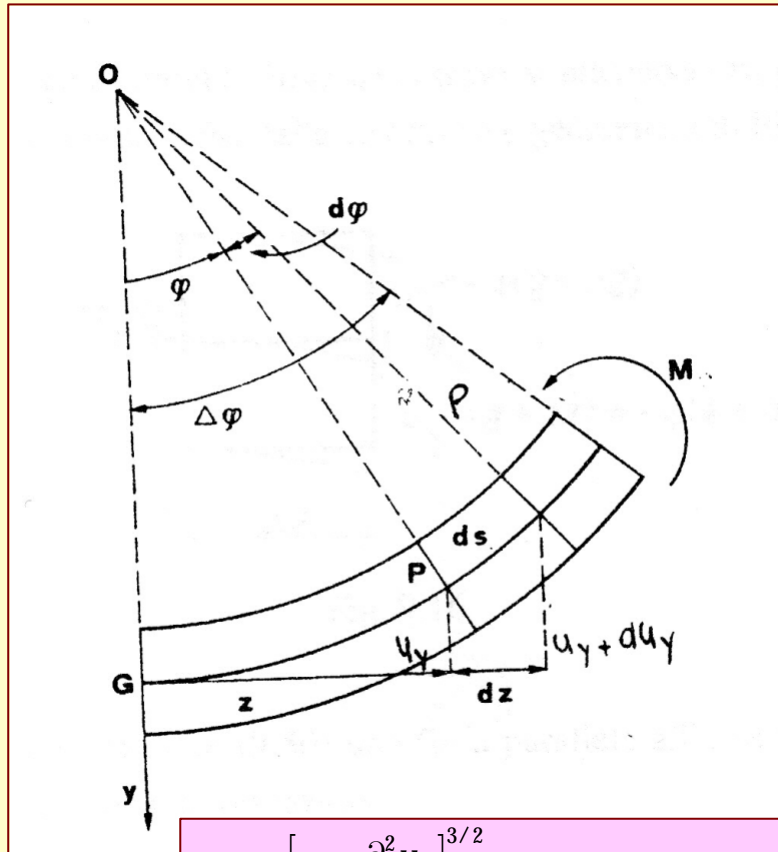
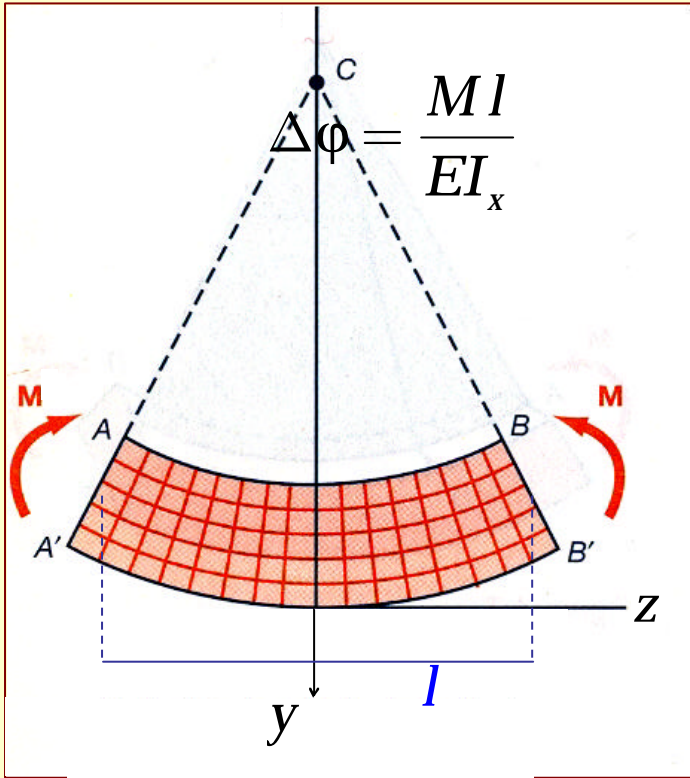
Nella flessione le sezioni trasversali si mantengono sempre piane



$$\epsilon_3 = \left. \frac{\partial u_z(y, z)}{\partial z} \right|_{\substack{y=-h_0 \\ z=\bar{z}}} = -\frac{M_3 h_0}{EI_x}$$

$$u_z(x, y, z) = u_z(y) = \frac{M_3}{EI_x} y \bar{z}$$

# FLESSIONE RETTA



**Comp. spostamento linea d'asse**

$$u_x(0, 0, z) = 0$$

$$u_y(0, 0, z) = -\frac{M}{2EI_x} z^2$$

$$u_z(0, 0, z) = 0$$

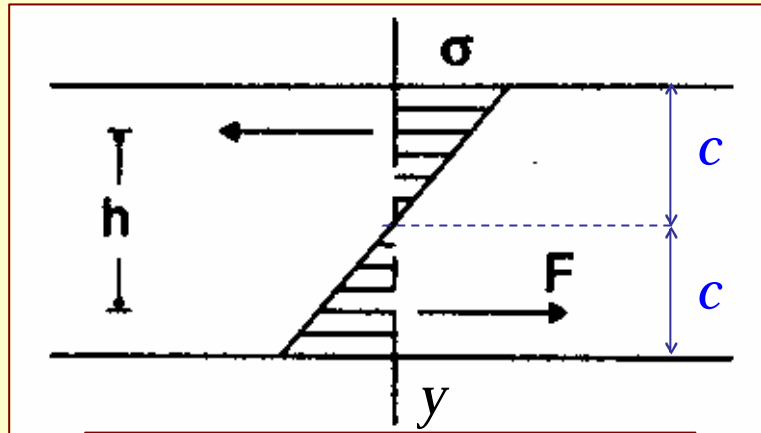
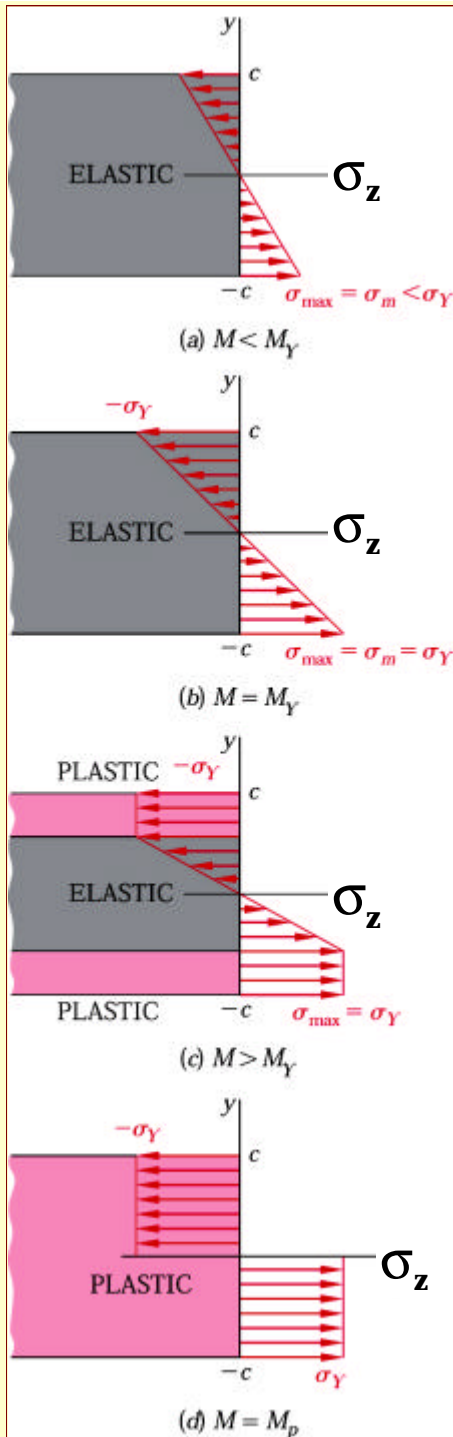
$$\rho = -\frac{\left[1 + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} \ll 1 \quad \text{ipotesi piccoli spostamenti}$$

$$\rho = -\frac{1}{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}} = \frac{1}{\frac{M}{EI_x}} \Rightarrow \kappa = \frac{M}{EI_x}$$

$$\frac{\rho}{v} > \rho$$

# FLESSIONE RETTA (Coppia interna e Plasticità)

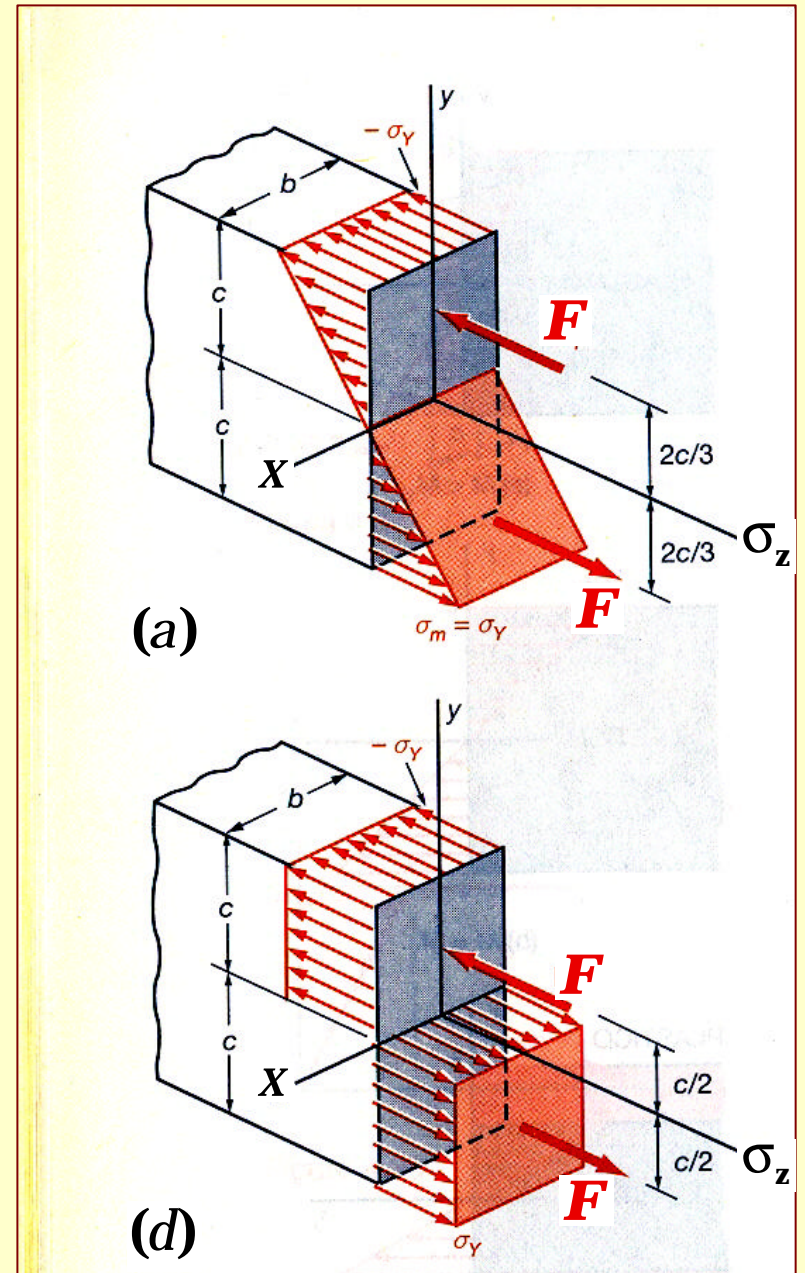
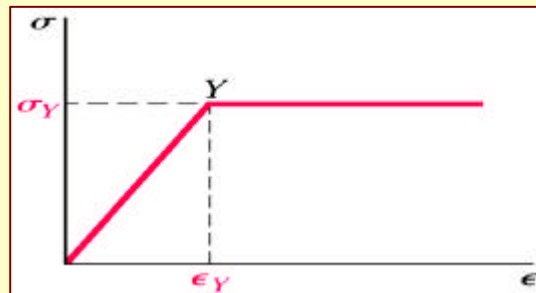


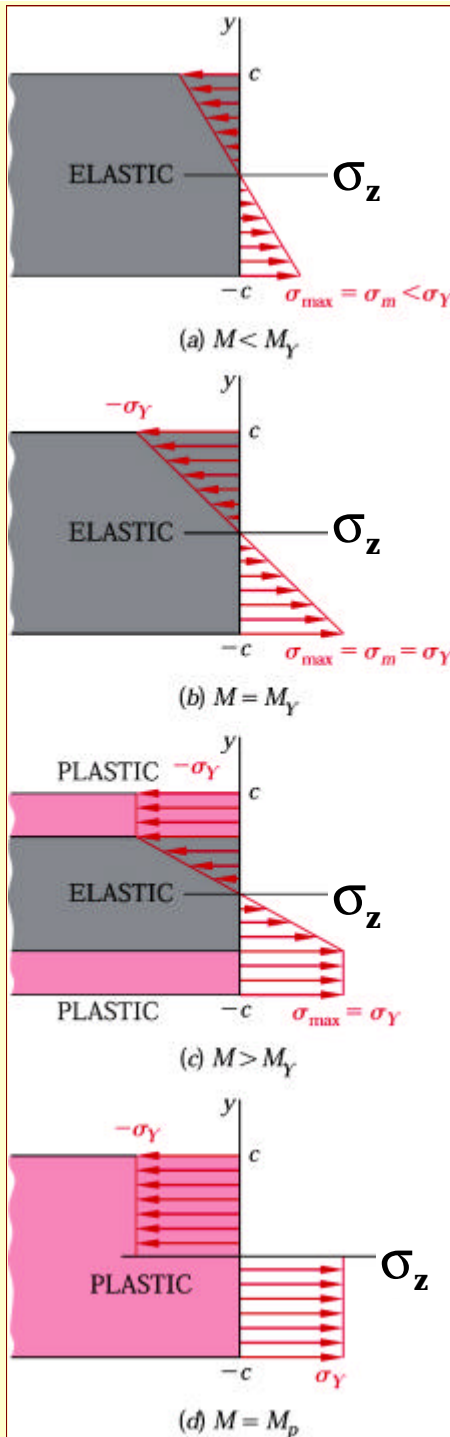
**Coppia interna:**  $Fh \equiv M$

$$F = \int_{A_1} \sigma_z y dA = \int_{A_2} \sigma_z y dA$$

**Sezione rettangolare:**

$$F = \frac{Mc b}{I_x 2} = \frac{M b}{W_x 2}$$

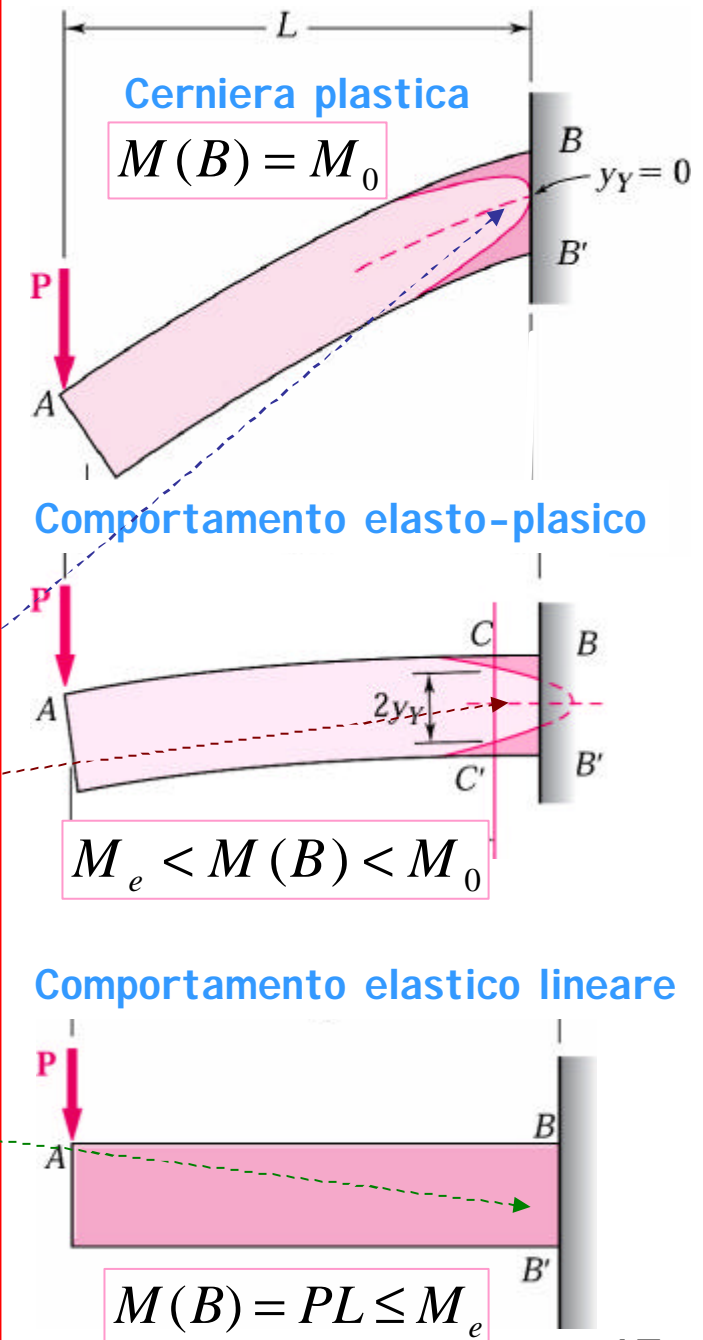
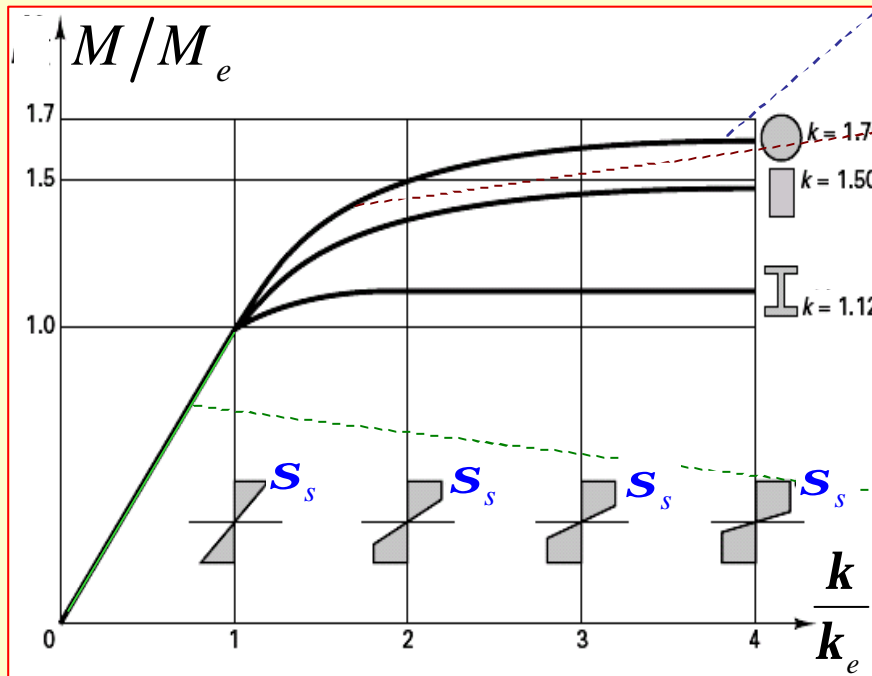




## FLESSIONE RETTA (Plasticità)

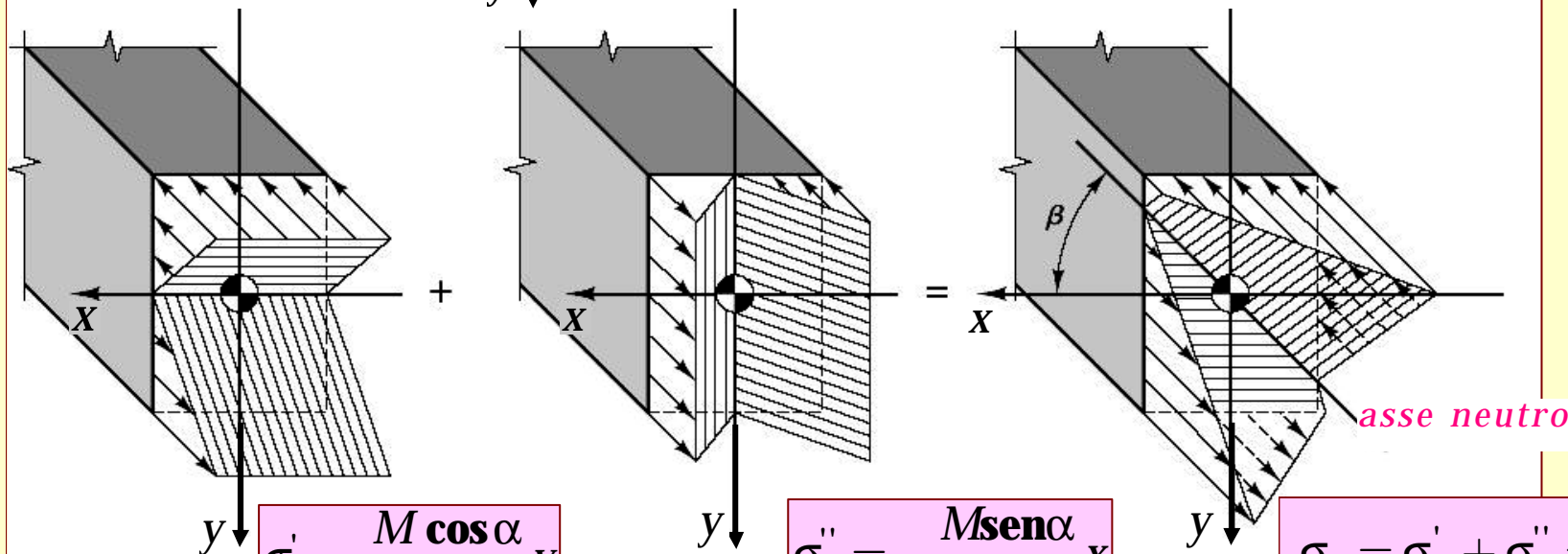
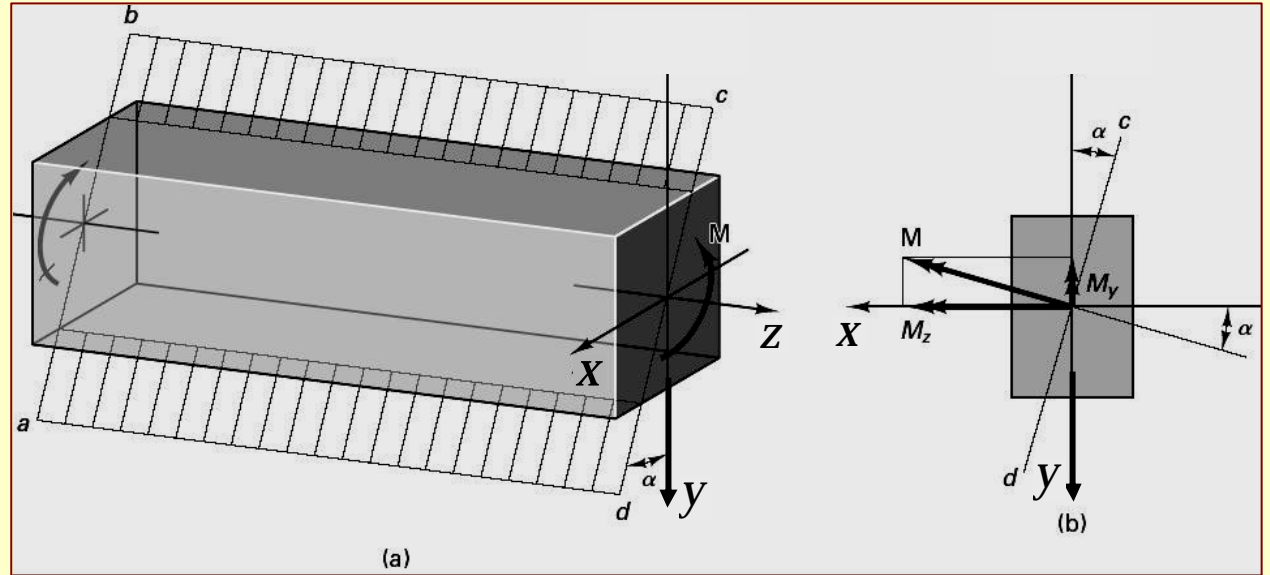
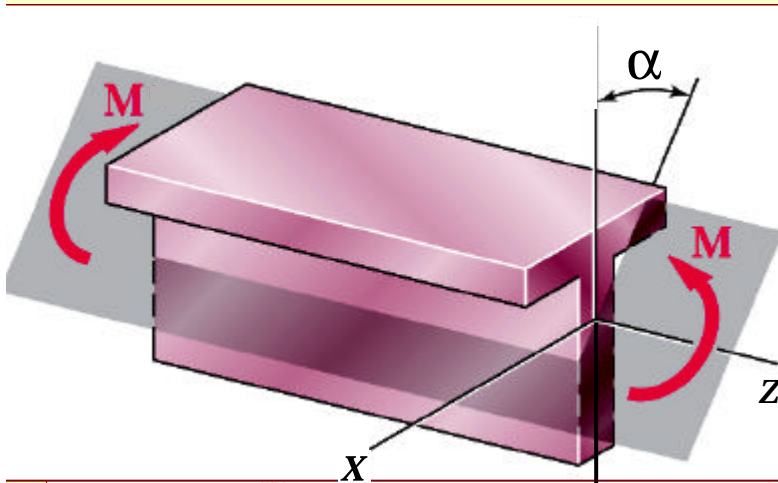
Quando nella trave di Bernoulli-Eulero si supera, nella sezione inflessa, il momento limite elastico la sezione si plasticizza.

Quando poi la sezione è interamente plasticizzata si forma la **cerniera plastica**. Si hanno così rotazioni a momento costante sino alla rottura che avviene quando oltre il momento anche la curvatura raggiunge il valore limite.



# FLESSIONE DEVIATA

x e y assi centrali d'inerzia



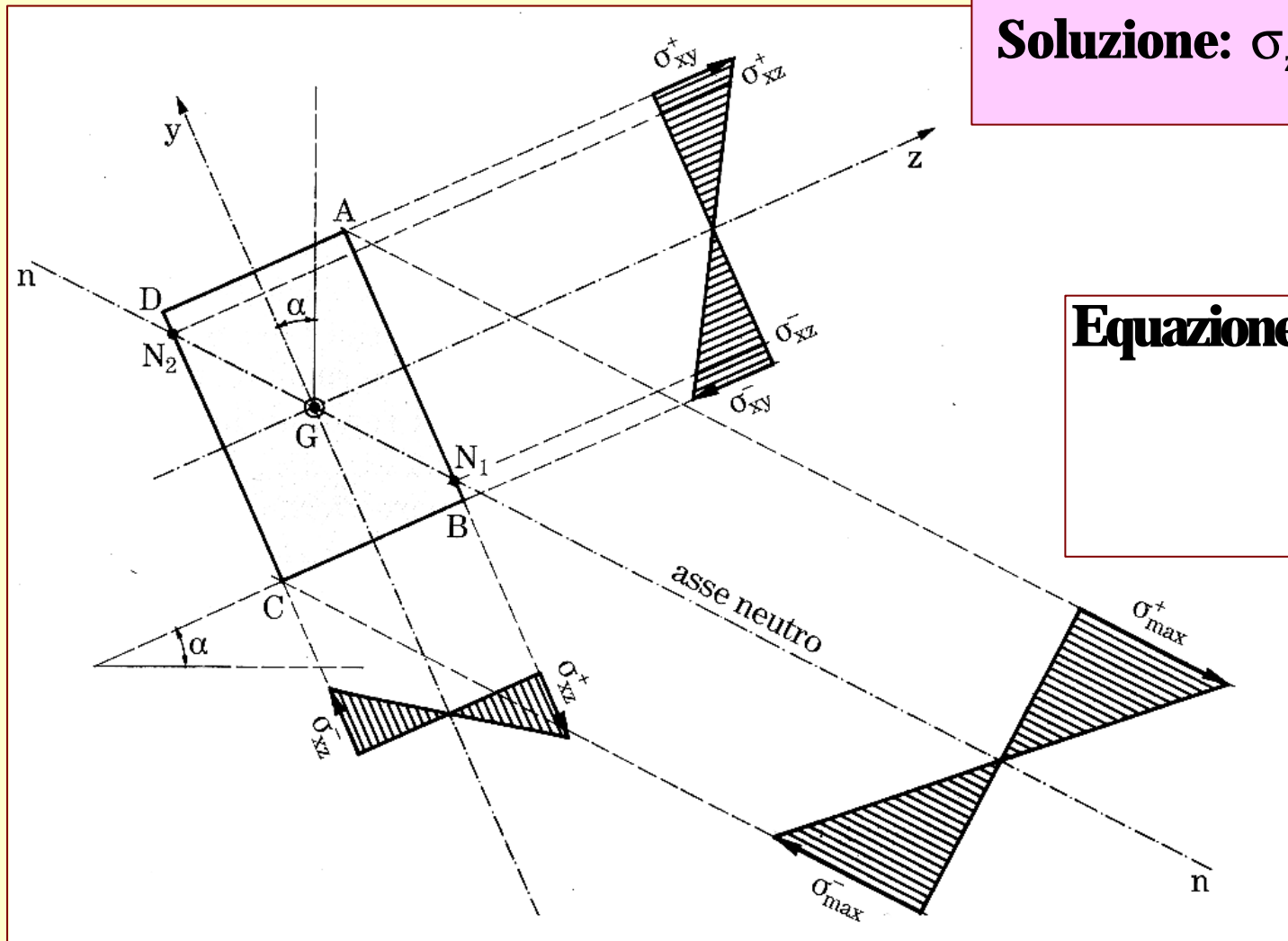
$$\sigma'_z = \frac{M \cos \alpha}{I_x} y$$

$$\sigma''_z = -\frac{M \sin \alpha}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{M \cos \alpha}{I_x} y - \frac{M \sin \alpha}{I_y} x$$

# FLESSIONE DEVIATA

Rappresentazione piana delle tensioni normali nella flessione deviata con x ed y assi centrali d'inerzia



**Soluzione:** 
$$\sigma_z = \frac{M \cos \alpha}{I_x} y - \frac{M \sin \alpha}{I_y} x$$

**Equazione asse neutro ( $\sigma_z(x,y)=0$ )**

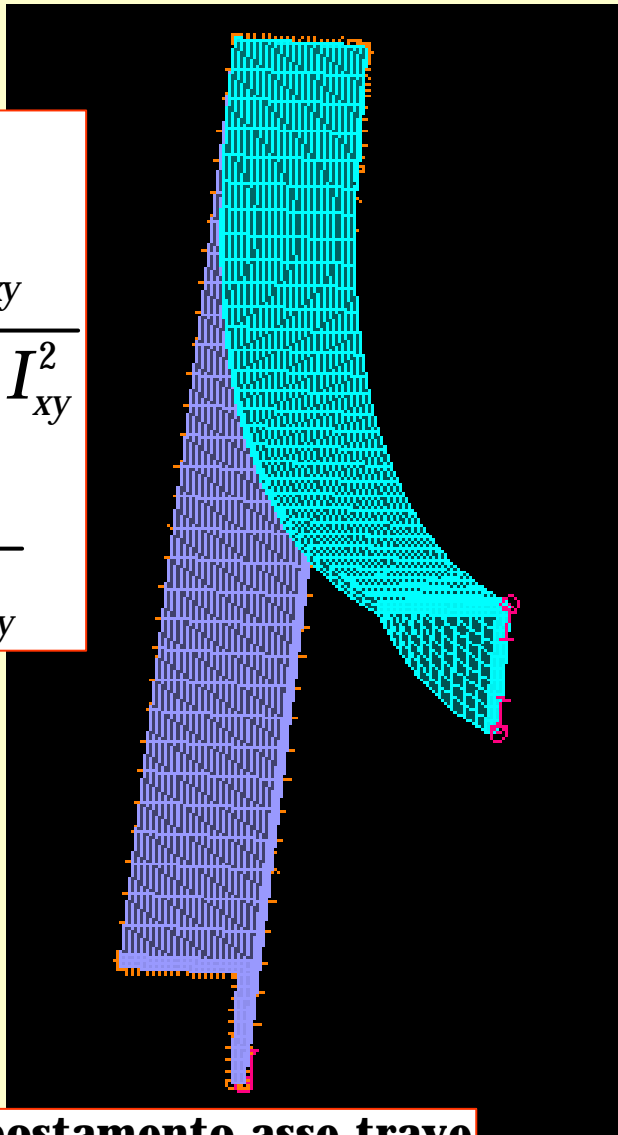
$$y = \frac{I_x \tan \alpha}{I_y} x$$

# FLESSIONE DEVIATA- x e y assi baricentrici qualunque

$$M \equiv M_x$$

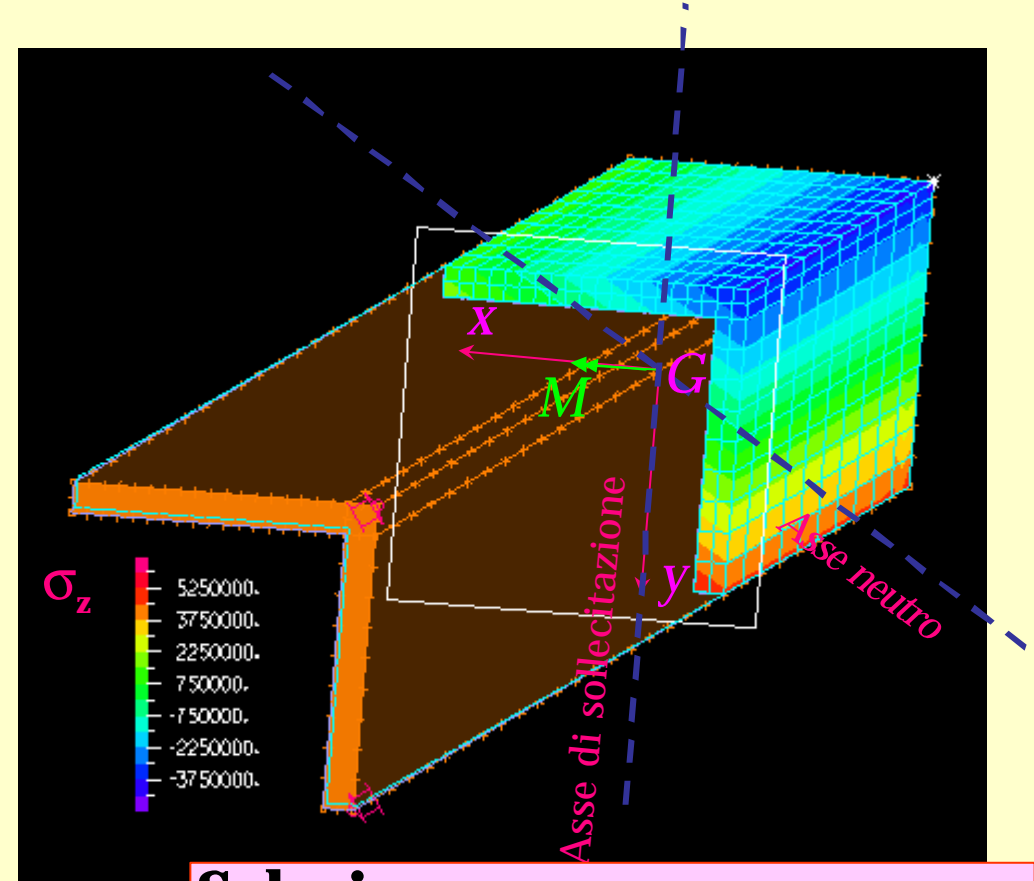
$$a = -\frac{M I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$b = \frac{M I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$



**Componenti spostamento asse trave**

$$u_x = -\frac{a}{2E} z^2; u_y = -\frac{b}{2E} z^2; u_z = 0$$



**Soluzione:**

$$\sigma_z = \frac{M I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{M I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x$$

**Equazione asse neutro:**  $y = \frac{I_{xy}}{I_y} x$