# ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 2

## SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

*a*) Stabilire la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

(1) $\frac{1}{nx^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$; (2) $x^{\frac{1}{n}}$, $x \in [0,1]$; (3) $\frac{1}{x^2+n}$, $x \in \mathbb{R}$;

(4) $\frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$; (5) $\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$; (6) $x^n - x^{n+2}$, $x \in [0,1]$;

(7) $\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$; (8) $\frac{\log x - x^{n+2}}{x^n}$, $x \in [1,+\infty[$; (9) $\frac{nx}{(1+nx)(x+1)}$, $x \in [0,+\infty[$;

(10) $\frac{2^n x}{1+n2^nx^2}$

*b*) Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

(1) $n^\alpha x e^{-nx^2}$, $x \in [0,1]$; (2) $\sqrt{1+x^2+n^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, (3) $n^\alpha x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$.

*c*) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_n \int_0^1 n^\alpha x e^{-nx^2}\, dx = \int_0^1 \lim_n \left(n^\alpha x e^{-nx^2}\right) dx.$$

Osservare che per alcuni valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale ma la convergenza della successione integranda è solo puntuale.

*d*) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza totale delle seguenti serie:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2+n}{n^4}$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^3}$ (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2}$, $x \geqslant 0$ (5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan x^n}{n^2}$ (6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ (8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$, $x \geqslant 0$.

*e*) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza uniforme delle seguenti serie di potenze:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n \log^2 n} x^n$ (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n} x^n$ (4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}} x^n$

1 Agg. 24 aprile 2015

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n^2} x^n$ (6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ (7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$ (8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] x^n.$

*f*) Se una serie di potenze di centro $x_0 = 0$ non converge nel punto 2, cosa si può dire nel punto $-3$? Cosa si può dire nel punto $-1$?

*g*) Se una serie di potenze di centro $x_0 = 2$ converge nel punto 5 si può affermare che nel punto $\frac{3}{2}$ essa converge? Cosa succede nel punto $-7$?

*h*) La serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x+1)^n$ converge in $-2$ e non converge in 0. Cosa si può dire sul suo raggio di convergenza?

*i*) Sia $x > 0$; dalla serie geometrica si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

e anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots = \frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1}.$$

Sommando si ottiene la seguente formula:

$$\ldots + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0.$$

Dov'è l'errore?

*j*) (1) Verificare che $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in ]-1,1[$.

(2) Verificare che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$, $\forall x \in [-1,1]$.

(3) Dedurre che $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$

*k*) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza totale delle seguenti serie:

(1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n5^n}{2^n \log n} (x-2)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{nx+\sin n}$; (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n!(n+1)} (\arcsin x)^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n (\log x)^n$; (5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[n^2(x^2-1)]^n}{(n+1)^{2n}}$; (6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} e^{nx}$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n + \log n}$; (8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n x^{n^2}$.

*l*) Dimostrare che

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(x-1)^2}$, $x \in ]-1,1[$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = -\frac{x^2+2x+2\log(1-x)}{2x^2}$, $x \in [-1,1[$

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = (1-x)\log(1-x) + x, \quad x \in [-1,1]$.

*m*) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza uniforme delle seguenti serie:

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n(n-1)}(\log x - 1)^n;$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x^2)^{2n}}{2n+1};$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-n}}{n}(\log x)^n;$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} x^n;$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{4n}}{2n+1};$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\frac{n(x-3)^n}{2n^2+1};$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n^2-\log n}\right)(x-2)^n;$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)^{2n}}{(4n-1)^{2n}}(x^2-1)^n$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2-x^2)^n};$

*n*) Determinare l'insieme di convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$ (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 x^n;$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!};$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} x 2^{-nx^2}.$

*o*) Calcolare un valore approssimato di $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ a meno di un errore inferiore a $10^{-3}$.

## TOPOLOGIA DEL PIANO

*a*) Rappresentare graficamente gli insiemi dei punti di $\mathbb{R}^2$ elencati. Stabilire se sono aperti, chiusi e determinare la frontiera, la chiusura, la parte interna; stabilire se hanno punti isolati.

$S_1 = \{(x,y) \colon x^2 + (y-1)^2 \leqslant 4\}$

$S_2 = \{(x,y) \colon x^2 + (y-1)^2 < 9,\ x \geqslant 0\}$

$S_3 = \{(x,y) \colon 1 < |x| < 2,\ 0 \leqslant |y| \leqslant 1\}$

$S_4 = \{(x,y) \colon 2 \leqslant x \leqslant 4\} \cup \{(1,3)\}$

$S_5 = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 < 1,\ y \neq 0\}$

$S_6 = \{(x,y) \colon (2x-1)^2 + (y+2)^2 \leqslant 1, y > -2\}$

$S_7 = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$

$S_8 = \left\{ \left(n, \dfrac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$S_9 = \left\{ \left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right),\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$S_{10} = \{(x,x),\ x \in ]-1,1[\}$

$S_{11} = \{(x,y) \colon y > x^2\}$

$S_{12} = \{(x,y) \colon x \neq 0, y \neq 0\}$

$S_{13} = \{(x,y) \colon 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

$S_{14} = \{(x,y) \colon x < y < 1-x\}$

$S_{15} = \{(x,y) \colon x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$

$S_{16} = \{(x,y) \colon x^3 < y < 8 - x^3\}$

$S_{17} = \{(x,y) \colon x \in \mathbb{Q}\}$

$S_{18} = \left\{ (x,y) \colon \left(\cos \dfrac{\pi}{2} n, \dfrac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$S_{19} = \{(x, x^n),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\}$

$S_{20} = \{(x,y) \colon 2 < x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$

$S_{21} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{\frac{1}{n}}(0,0)$

$S_{22} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (x,y) \colon \left(x - \dfrac{1}{n}\right)^2 + y^2 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \right\}$

*b*) Determinare tra i precedenti insiemi gli aperti connessi, i domini connessi, gli insiemi limitati, i compatti.

*c*) Sia $P$ un punto di frontiera per l'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^2$ che non appartiene ad $S$. Dimostrare che esiste una successione di punti *distinti* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ in $S$ che ha limite $P$.

*d*) Dato un insieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{R}^2$, sia $P \in S$, $Q \notin S$. Dimostrare che $\overline{PQ}$ contiene un punto sulla frontiera di $S$.

*e*) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti $(x,y)$ per cui $|x| < 1$, $|y| < \frac{1}{2}$ e per cui $y < 0$ se $x = \frac{1}{2}$. $S$ contiene solo punti interni? Provarlo.

*a*) Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente.

$$f_1(x,y) = x\log(xy^2) \qquad f_2(x,y) = \arcsin(x^2+y^2) \qquad f_3(x,y) = \cos\frac{x}{y} + \sin\frac{y}{x}$$

$$f_4(x,y) = \log(x-\sqrt{x+y}) \qquad f_5(x,y) = \log(1-x^2+y^2) \qquad f_6(x,y) = \log(x^2-y^2)\sqrt{4-|x|-|y|}$$

$$f_7(x,y) = \log(9x^2+4y^2-36) \qquad f_8(x,y) = \log\frac{1-x^2}{1-y^2} \qquad f_9(x,y) = \sqrt{\frac{\arcsin(x^2+y^2-1)}{xy}}$$

$$f_{10}(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2-2)}{\sqrt{4-x^2-2y^2}} \qquad f_{11}(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2} \qquad f_{12}(x,y) = \sqrt{1-xy}$$

*b*) (1) Provare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

ha derivata direzionale nulla in $(0,0)$ qualunque sia la direzione scelta.

(2) Provare che la funzione $f$ non è continua in $(0,0)$. Dedurre che $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.

*c*) *Esempio di non scambio delle derivate seconde miste*. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Provare che $f$ è derivabile in $\mathbb{R}^2$ e

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

In particolare, $f_x(0,y) = -y$, $f_y(x,0) = x$.

(2) Provare che esistono le derivate miste $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ e calcolarne il valore. Osservare che non sono uguali.

(3) Provare che $f$, $f_x$, $f_y$ sono continue in $(0,0)$.

*d*) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$f_1(x) = e^{xy} - x^2, \quad (x_0,y_0) = (1,0); \qquad f_2(x) = x\cos(xy) - y\sin x, \quad (x_0,y_0) = (\pi,1);$$

$$f_3(x) = \log(x-y^2), \quad (x_0,y_0) = (2,1); \qquad f_4(x) = e^{-x^2-y^2} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

*e*) Esiste una funzione differenziabile $f$ in un punto $(x_0,y_0)$ di un aperto $A$ del piano tale che

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0,y_0) > 0,$$

qualunque sia la direzione $\nu$? Giustificare la risposta.

*f*) Sia f differenziabile in $(0,0)$. Si assuma che le derivate direzionali in $(0,0)$ rispetto a due direzioni distinte sono nulle. Provare che è nulla la derivata direzionale di f in $(0,0)$ rispetto ad ogni altra direzione.

*g*) Provare che $f(x,y) = |xy|$ è differenziabile in $(0,0)$, ma non in $(1,0)$.

*h*) Verificare che il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy} \log\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

*i*) Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione:

$$f(x,y) = (x+y)xy;$$

determinare inoltre gli estremi assoluti della funzione nell'insieme:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1; -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

*j*) Classificare gli eventuali punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

e determinarne gli estremi assoluti nell'insieme

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\, x+y \leqslant 1\}.$$

*k*) Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2;$$

determinare inoltre gli estremi assoluti della funzione nell'insieme:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1; |y| \leqslant 1\}.$$

*l*) Classificare gli eventuali punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$$

e determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0,1,-1)$.

*m*) Determinare gli estremi assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2}\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

nel suo insieme di definizione.

*n*) Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = 2xy - x^2 - y^4$$

nel quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.

*o*) Determinare le coordinate del punto appartenente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ il cui piano tangente è parallelo al piano di equazione $x + y - z = 1$.

*p*) Classificare gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni:

(1) $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$;
(2) $f(x,y) = x^2 y(y-2-x)$;
(3) $f(x,y) = x^4y^2 - x^2y^4$;
(4) $f(x,y) = x^2y(x^2-y-2)$;
(5) $f(x,y) = (e^{x-1}-1)x^2y$;
(6) $f(x,y) = x^2y^2 - y^3 - 3y^2$.
(7) $f(x,y) = e^{x+y}(y^2-2x^2)$;
(8) $f(x,y) = (y^2+1)\sqrt{3-x^2}$;
(9) $f(x,y) = (4xy+x^2)e^{-y^2}$;
(10) $f(x,y) = x^2\left[(x+1)^2 - y^2\right]$.
(11) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$;
(12) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{y^2-1}$;
(13) $f(x,y) = 3y^2 - 3x^2y^2 - y^3$;
(14) $f(x,y) = y^2 + (e^x-1)y + 1$.

*q*) Sia assegnata la seguente funzione:

$$f(x,y) = x^2(y^2 - e^{2x}).$$

a) Classificare gli eventuali punti stazionari di $f$.

b) Rappresentare graficamente l'insieme di livello $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 0\}$. È possibile scrivere $\Gamma$ come grafico di funzione in un intorno del punto $(0,1)$?

c) Determinare il versore normale $\nu$ alla linea di livello $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 0\}$ nel punto $(1,e)$ in modo che $\nu$ punti verso il basso.

*r*) Verificare, usando la definizione, che la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$. Ottenere lo stesso risultato dimostrando che le derivate parziali $f_x$ e $f_y$ sono continue in $(0,0)$. Infine, provare ancora lo stesso risultato applicando i teoremi sulle funzioni positivamente omogenee.

*s*) Determinare un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ in modo che il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ sia ortogonale al vettore $(1,0,1)$.

## FUNZIONI IMPLICITE – ESTREMI VINCOLATI

*a*) Determinare i punti di minima distanza dall'origine sulla curva

$$x^2 + xy = 1.$$

*b*) Determinare i punti stazionari di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sul vincolo $x^3 + y^3 = 1$. Ci sono minimi o massimi assoluti sul vincolo?

*c*) Determinare gli estremi assoluti di

$$f(x, y) = x + 3y$$

sul vincolo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

*d*) Trovare i punti di minima e massima distanza dall'origine della circonferenza di equazione

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

*e*) Determinare gli estremi vincolati della funzione $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2 - xy}$ lungo la retta $x + y = z$.

*f*) Sia $y = f(x)$ l'equazione di una curva regolare, e sia $P = (x_0, y_0)$ un punto non appartenente ad essa. Detto $Q = (x, f(x))$, provare che se la lunghezza $\overline{PQ}$ è minima o massima, la retta per P e Q è ortogonale alla curva.

*g*) Determinare il punto Q sulla retta $y = mx + q$ alla minima distanza dal punto $P = (x_0, y_0)$. Mostrare inoltre che

$$\overline{PQ} = \frac{|mx_0 + q - y_0|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

*h*) Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trovare quello di perimetro massimo.

*i*) Tra tutte le ellissi di semiassi $x, y$ tali che $x^2 + y^2 = 5$, trovare quella di area massima (ricordare che l'area $A$ di un'ellisse di semiassi $x, y$ è $\pi xy$).

*j*) Tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio unitario, determinare quello di area massima.

*k*) Determinare gli estremi vincolati di

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

sul vincolo $x^4 + y^4 = 1$.

*l*) Determinare i punti di minima distanza dal punto $(1, 0)$ sulla curva di equazione

$$y = |x|x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*m*) Nelle ipotesi del teorema del Dini se esistono continue le derivate $F_{xx}$, $F_{xy}$, $F_{yy}$ si verifichi che la derivata seconda della funzione implicita $f(x)$ è espressa da

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

*n*) Considerata la funzione $f(x,y) = 2x^2y - x^4 + 3y^2 - 4y$,

a) dimostrare che il livello $f(x,y) = 0$ è una curva regolare;

b) scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva nell'origine;

c) detta $g(x)$ la funzione implicitamente definita dall'equazione $f(x,y) = 0$ in un intorno dell'origine, calcolare $g'(0)$ e $g''(0)$.

*o*) Scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $0$ e ordine $3$ della funzione implicitamente definita dalla seguente equazione

$$y^3 + (x^2+1)y - x^2 = 0$$

in un intorno dell'origine.

*p*) Verificare che l'equazione $x^2 + \log(1+xy) + ye^{2y} = 0$ definisce implicitamente una funzione $g(x)$ in un intorno dell'origine. Dimostrare che o è punto di estremo relativo per $g$ e determinarne la natura.

*q*) Dimostrare che esiste un intorno $I$ del punto $0$ in cui è definita una e una sola soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} e^{y'(x)-1} + (1+y^2(x))y'(x) - y(x) - 2 = 0, & x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $0$ e ordine $2$ della soluzione.

*r*) Disegnare l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xe^y + y = 1\}$. Dire in quali punti $(x,y) \in A$ si può esprimere localmente la $y$ in funzione della $x$. Si provi che in $(0,1)$ ciò è possibile e si verifichi che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $y(x)$ è

$$y(x) = 1 - ex + e^2x^2 + o(x^2).$$

*s*) Sia assegnato l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\}$ con

$$g(x,y) = (x-1)^3 - y^2.$$

a) Si disegni l'insieme $A$.

b) Si determini il minimo di $f(x,y) = x^2 + y^2$ su $A$ e si verifichi che esso non può essere ricavato col metodo dei moltiplicatori di Lagrange; giustificare questo fatto.

c) Si concluda che i punti di massimo e di minimo per una funzione $f$ soggetti al vincolo $g(x,y) = 0$ vanno cercati tra i punti $(x,y)$ per cui esiste $\lambda$ tale che

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0, \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

e tra quelli per cui

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0, \\ g_y(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

*t*) Provare che se $p, q \geqslant 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, allora posto $f(x, y) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^p}{p}$ risulta

$$f(x, y) \geqslant 1 \text{ su } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y > 0,\ xy = 1\}.$$

Dedurre che per $x, y \geqslant 0$

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

## CURVE E INTEGRALI CURVILINEI DI FUNZIONI

*a*) Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

(1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin^2 x \arctan x}{y^2(1+x^2)\sqrt{1+\cos^2 x}}\,ds$, $\gamma$ curva il cui sostegno è il grafico della funzione $y = \sin x$, $x \in [0,1]$;

(2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y \log x}{\sqrt{1+2x^2}}\,ds$, $\gamma = \partial D$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [1,e],\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1+x^2}\}$

(3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2 + e^{\sqrt[3]{y}}}{(x+2)^2\sqrt{x^2+9\log^4 x}}\,ds$, $\gamma\colon \begin{cases} x = e^t \\ y = t^3 \end{cases}$ $t \in [0, \log 2]$.

(4) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(x+y^2)\sqrt{4x+1}}\,ds$, $\gamma$ è la curva di equazione $x-(y-1)^2 = 0$ ed ha estremi $(1,0)$, $(0,1)$.

(5) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\arctan^2 \frac{y}{x}}{\sqrt{1+\arctan^2 \frac{y}{x}}}\,ds$, $\gamma$ è la curva il cui sostegno ha equazione, in coordinate polari, $\rho = \vartheta$, $\vartheta \in [0,1]$.

*b*) Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide $\gamma\colon \begin{cases} x = R(t-\sin t), \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}$, $t \in [0,\pi]$.

*c*) Calcolare il baricentro dell'arco di curva $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x \in ]-1,1[$.

*d*) Calcolare le coordinate del baricentro della curva $y = (7^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 7$.

*e*) Studiare la regolarità della curva

$$\gamma(t) = (t - \cos t, 1 + \sin 2t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale a $\gamma$ nel punto $(-1,1)$.

*a*) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \geqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}(x-1);\ 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

*b*) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T y e^{y^2+x}\,dx\,dy,$$

dove $T = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2y^2; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

*c*) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T (2y-x)e^{x-y^2}\,dx\,dy,$$

dove $T = \{(x,y) : -1 \leqslant y \leqslant 1; y^2-2 \leqslant x \leqslant y^2+2\}$.

*d*) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T x e^{y^2}\,dx\,dy,$$

dove $T = \{(x,y) : x^2 \leqslant y \leqslant x^{2/3}; -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

*e*) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{x}{y}\log(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

dove $T = \{(x,y) : 0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4; 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}y\}$.

*f*) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy,$$

dove il dominio T è espresso in coordinate polari

$$T = \{(\rho,\theta) : 0 < \rho < \theta; 0 \leqslant \theta < \frac{3}{2}\pi\}.$$

*g*) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$$

dove $T = \{(x,y) : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2y\}$.

*h*) Determinare il volume dell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 2,\ 2x^2+2y^2+z^2 \leqslant 8\}.$$

*i*) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

dove T è il solido giacente all'interno del cilindro $x^2+y^2=y$, sotto il piano $z=4$ e sopra il paraboloide $z=1-x^2-y^2$.

*j*) Calcolare il flusso uscente del campo del campo vettoriale $F(x,y,z)=(-y,x,3z)$ attraverso la semisfera $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

*k*) Calcolare il flusso del campo $F=(xy,xy,z)$ attraverso la superficie $z=1-x^2-y^2$ orientata in modo che la terza componente del versore normale sia non negativa.

*l*) Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z)=(y,x,z\sqrt{x^2+y^2})$ attraverso la superficie che delimita il cilindro $x^2+y^2-2x\leqslant 0$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

*m*) Calcolare il volume del solido:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 4; y-z+1\geqslant 0; z\geqslant -4\}.$$

*n*) Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{z^2}{\sqrt{1-x^2}}\,d\sigma$$

dove $\Sigma$ è la superficie definita dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=\sin v \\ y=u-v \\ z=\cos v. \end{cases}$$

dove $(u,v)\in D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant v\leqslant u; 0\leqslant u\leqslant 1\}$.

*o*) Sia Q il quadrato di vertici $(0,0),(0,1),(1,1),(0,1)$ e sia $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ nulla su $\partial Q$. Dimostrare che

$$\iint_Q \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy=0$$

*p*) Sia $\Omega=\{(x,y) : 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$, con $f\in C^1(0,1)$ tale che $f(0)=0$ e $f(1)=1$. Verificare che

$$\iint_\Omega y f'(x) dx dy=\frac{1}{6}$$

*q*) Esprimere

$$\int_0^2\left(\int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

scambiando l'ordine di integrazione.

*r*) Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x(u,v)=u^2,\quad y(u,v)=\sqrt{2}uv,\quad z(u,v)=v,\quad (u,v)\in D,$$

dove $D=\{(u,v)\colon 1<u^2+v^2<2, u<v\}$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z)=(1,0,1)$ attraverso la superficie S orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva.

*s*) Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x(u,v) = e^u \cos v, \quad y(u,v) = e^u \sin v, \quad z(u,v) = e^u v, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1].$$

*t*) Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x, y^2, xz)$ lungo la curva $\gamma$ che è il bordo della porzione di superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel primo ottante, con orientamento indotto dalla normale esterna.

*u*) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare l'arco di asteroide $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi]$ attorno all'asse delle ascisse.

*v*) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (z, 0, x^2)$ uscente dalla porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$. Calcolare inoltre il flusso dello stesso campo $F$ uscente dalla superficie sferica centrata nell'origine e raggio 1.

*w*) Calcolare l'area dell'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\, (x^2+y^2)^3 \leqslant 4x^2y^2 \right\}.$$

*a*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = \left(\log(1+x^2) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dx + \left(\log(1+y^2) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*b*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = -\frac{2y}{2x^2+y^2}\,dx + \frac{2x}{2x^2+y^2}\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*c*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\right)\,dx + \left(\frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\right)\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*d*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y}{x}}\right)\,dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1+y}}\right)\,dy$$

e, se possibile, calcolare la primitiva che si annulla in $(1,1)$.

*e*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}dx - \frac{x^2y}{x^4+y^4}dy$$

e, se possibile, calcolarne la primitiva che si annulla in $(1,0)$.

*f*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\,dx + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*g*) Studiare la forma differenziale

$$\omega = 2x\log(x^2+y^2)\,dx + (2y\log(x^2+y^2) + e^{-y})\,dy$$

e, se possibile, calcolarne la primitiva che si annulli in $(1,2)$.

*h*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = \left(\sqrt{(x^2+y^2)} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dx + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*i*) Studiare la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \arccos\frac{x}{2}\,dy,$$

e calcolarne l'integrale di linea lungo la semicirconferenza $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, x^2+y^2=1\}$, orientata nel verso positivo delle ordinate.

*j*) Studiare la forma differenziale:

$$\omega = y\log(1-xy)\,dx + x\log(1-xy)\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva che si annulli in $(0,0)$.

*k*) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{x^2(x^2-3y^2)}{(x^2-y^2)^2}\,dx + \frac{2yx^3}{(x^2-y^2)^2}\,dy$$

e, se possibile, determinare la primitiva che si annulli in $(1,0)$.

*l*) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{y}{(x-1)^2} + \frac{x}{1+x^2+y^2}\right)dx - \left(\frac{1}{x-1} - \frac{y}{1+x^2+y^2}\right)dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*m*) Studiare la seguente forma differenziale:

$$\omega = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{3y^2+x^2+2y}{(x^2+y^2)(y+1)}\,dy$$

e, se possibile, calcolare la primitiva nulla in $(0,1)$.

*n*) Studiare la seguente forma differenziale:

$$\omega = \left(\frac{2x^3}{x^4+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^3}\right)dx + \left(\frac{y}{x^4+y^2} - \frac{3y^2}{2(x-1)^2+2y^3}\right)dy,$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*o*) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\right)dx + y\left(\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\right)dy$$

e, se possibile, calcolarne la primitiva che vale 1 nel punto di coordinate $(\pi,0)$.

*p*) Studiare la forma differenziale

$$\omega = x^y\frac{y}{x}\,dx + x^y\log x\,dy$$

e calcolarne l'integrale curvilineo esteso all'arco $y = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ orientato nel verso delle $x$ crescenti.

*q*) Determinare una funzione $g(y)$ in modo che risulti esatta la forma differenziale:

$$\omega = g(y)\,dx + xe^{g(y)}\,dy$$

e, se possibile, calcolarne una primitiva.

*r*) Calcolare

$$\int_{+\partial D} (x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

*s*) Studiare la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{2}{2x-3y}dx - \frac{3}{2x-3y}dy + 3z^2dz$$

e, se possibile, determinarne la primitiva che si annulla nel punto $(2,1,0)$.

*t*) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

lungo la curva $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(a, b > 0)$, orientata nel verso delle $t$ crescenti.

*u*) Determinare una funzionee $f \in C^1([0,+\infty[)$ in modo che la forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

sia localmente esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per tale scelta di $f$, determinare una primitiva locale di $\omega$.

*v*) Determinare per quali funzioni $u(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ la seguente forma differenzale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2+1}dx + u(x,y)dy$$

risulta esatta in $\mathbb{R}^2$.

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI

*a*) Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

(a) $y'' + 3y' + 2y = 2e^x + 3e^{-2x}$;

(b) $y' + \dfrac{2}{x^2-1}y = 2x + 2$;

(c) $2y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$;

(d) $y' + \dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$;

(e) $y'' + 6y' + 10y = e^x(8\sin x + 16\cos x)$;

(f) $y'' + 2y' + y = x^2 + \cos x$.

(g) $y' + y\cot x = 2\sin x$ nell'int. $]0, \pi/2[$;

(h) $y'' - y' = e^x + x^2$;

(i) $y'' + y = \log(\cos x)$

(j) $y'' - 2y' + 5y = e^x(4x - 1)$;

(k) $y'' + y = 6\sin 2x$.

(l) $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

(m) $y' + \dfrac{y}{x^2-1} = \sqrt{x+1}$.

*b*) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' - \frac{y}{1+e^x} = e^{-x}, \\ y(0) = 1; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x, \\ y'(0) = y(0) = 0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - y' = 2te^t, \\ y(0) = 1, y'(0) = -2; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' + 2x(y')^2 = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} e^{x+y}y' + x = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y' = \frac{2x}{1+x^2}y + x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y' + xy = \frac{e^{-x^2/2}}{x^2+1}, \\ y(0) = 1; \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y'' + 4y = \frac{1}{1+\sin 2x}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

*c*) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y-x^2} \\ y(0) = a, \end{cases}$$

provare che, se $a \neq 0$, esso ammette un'unica soluzione $y(x)$ in un intorno del punto $x = 0$. Calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.

*d*) Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si può dire che la soluzione è definita in tutto $\mathbb{R}$?