LA DETERMINAZIONE DEI FUOCHI

MAURIZIO BRUNETTI

1. I fuochi di un'ellisse

Siano $V_1 \equiv (x_1, y_1)$, $V_2 \equiv (x_2, y_2)$ i vertici di un'ellisse Γ sull'asse maggiore, e $V_3 \equiv (x_3, y_3)$ e $V_4 \equiv (x_4, y_4)$ i vertici restanti.

Il centro C di Γ ha coordinate (x_C, y_C) con

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Nelle nostre ipotesi, la lunghezza del segmento $C\bar{V}_1$ è maggiore di quella di $C\bar{V}_3$.

Il semiasse maggiore ha lunghezza

$$a = \sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2};$$

il semiasse minore ha invece lunghezza

$$b = \sqrt{(x_3 - x_C)^2 + (y_3 - y_C)^2}$$

I fuochi sono i punti sull'asse maggiore che distano da C

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2 - (x_3 - x_C)^2 - (y_3 - y_C)^2}.$$

L'asse maggiore ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_C + (x_2 - x_C)t \\ y = y_C + (y_2 - y_C)t, \end{cases}$$

Agevolmente si prova che i punti che distano c da C sul semiasse maggiore hanno coordinate

$$(x_C + (x_2 - x_C) \cdot \frac{c}{\sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}, y_C + (y_2 - y_C) \cdot \frac{c}{\sqrt{(x_2 - y_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}})$$

e

$$(x_C - (x_2 - x_C) \cdot \frac{c}{\sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}, y_C - (y_2 - y_C) \cdot \frac{c}{\sqrt{(x_2 - y_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}})$$

Ecco perché le coordinate dei fuochi sono $F \equiv (x_F, y_F)$ e $F' \equiv (x'_F, y'_F)$ con

$$F \equiv (x_C + (x_2 - x_C) \cdot \rho, y_C + (y_2 - x_C) \cdot \rho)$$

$$F' \equiv (x_C - (x_2 - x_C) \cdot \rho, y_C - (y_2 - x_C) \cdot \rho)$$

con

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{(x_3 - x_C)^2 + (y_3 - y_C)^2}{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}.$$

2. I fuochi di un'iperbole

Sia ora Γ un'iperbole di cui sono noti i vertici reali $V_1 \equiv (x_1, y_1)$, $V_2 \equiv (x_2, y_2)$ e la direzione di un asintoto $l\underline{i} + m\underline{j}$. Anche stavolta le coordinate del centro C sono

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \text{e} \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

L'asse trasverso r_{CV_2} ha equazione

$$\begin{cases} x = x_C + (x_2 - x_C)t \\ y = y_C + (y_2 - y_C)t, \end{cases}$$

ed è la bisettrice dei due asintoti.

I fuochi sono i punti $F \equiv (x_F, y_F)$ e $F' \equiv (x'_F, y'_F)$ sull'asse trasverso che dal centro C distano $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ dove

$$a = \sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}$$

e il rapporto b/a, se supponiamo $b > 0$, misura la tangente trigonometrica $\operatorname{tg} \alpha$ di uno degli angoli acuti formati da un asintoto e dall'asse trasverso.

Come nel paragrafo precedente le coordinate dei fuochi sono

$$(x_C+(x_2-x_C)\cdot\frac{c}{\sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}, y_C+(y_2-y_C)\cdot\frac{c}{\sqrt{(x_2 - y_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}),$$

$$(x_C-(x_2-x_C)\cdot\frac{c}{\sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}, y_C-(y_2-y_C)\cdot\frac{c}{\sqrt{(x_2 - y_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}})$$

dove stavolta

$$c = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Poiché

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{CV_2} \cdot (l\underline{i} + m\underline{j})|}{\sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2}} = \frac{|l(x_2 - x_C) + m(y_2 - y_C)|}{\sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2}}$$

si ha

$$F \equiv (x_C + (x_2 - x_C) \cdot \sigma, y_C + (y_2 - x_C) \cdot \sigma)$$
$$F' \equiv (x_C - (x_2 - x_C) \cdot \sigma, y_C - (y_2 - x_C) \cdot \sigma)$$

con

$$\sigma = \frac{\sqrt{l^2 + m^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (y_2 - y_C)^2}}{|l(x_2 - x_C) + m(y_2 - y_C)|}.$$

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli "Federico II"
E-mail address: `mbrunett@unina.it`