8.2) - LA SIMILITUDINE

Si è detto, al paragrafo precedente, dell'utilità dello studio delle turbine in similitudine. Si accenna in questo paragrafo al significato di *similitudine*, e si forniscono alcune definizioni di carattere generale.

8.2.a) - Significato di similitudine

Per poter impostare una teoria della similitudine che permetta di realizzare quanto espresso nel paragrafo precedente è necessario dapprima definire il significato di similitudine, cioè quando due turbomacchine in genere si possono dire *simili* e quando esse *funzionano in condizioni* di similitudine.
Le definizioni dalle quali, come si vedrà, verranno tratte conseguenze di tipo generale, riguardano sia la geometria sia il modo di funzionare delle macchine, e sono le seguenti:

a) - La similitudine geometrica

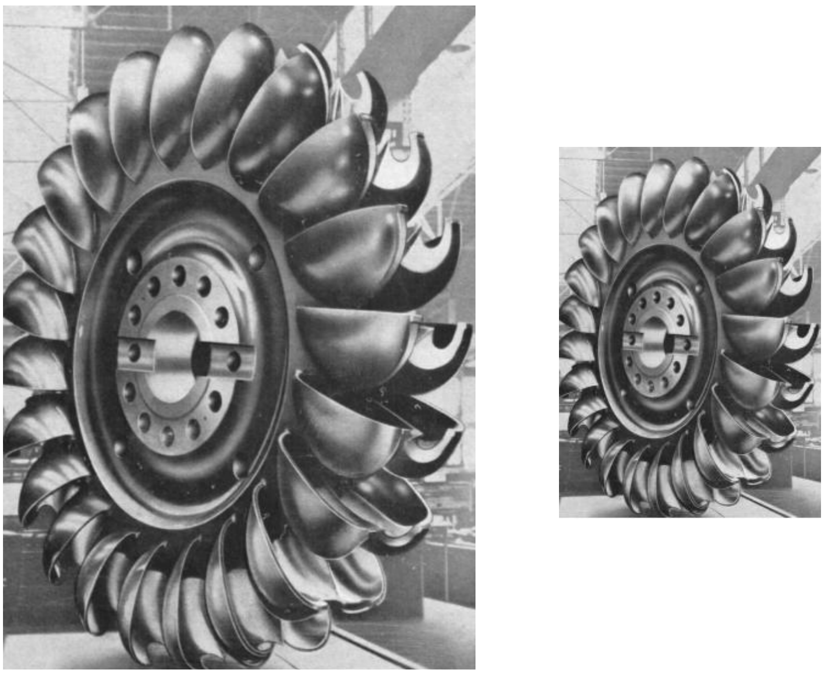
Due turbine (o due turbomacchine in genere) si dicono *geometricamente* simili se (fig. 8.1):

- tutte le grandezze lineari omologhe stanno fra loro nello stesso rapporto, cioè se si verificano *contemporaneamente* le relazioni:

$$\frac{\mathbf{D}_2}{\mathbf{D}_2'} = \frac{\mathbf{D}_1}{\mathbf{D}_1'} = \frac{\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2'} = \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1'} = \ldots = \lambda \qquad (8.1)$$

avendo indicato con l'apice le grandezze relative al modello e con λ il valore del rapporto fra due grandezze lineari omologhe;
- se hanno lo stesso numero di pale (condizione insita nella precedente);
- se si ha l'uguaglianza degli angoli di ingresso e di uscita:

$$\alpha_1 = \alpha_1' \qquad \beta_2 = \beta_2' \qquad (8.2)$$



Due ruote Pelton geometricamente simili.
Fig. 8.1

In altre parole due turbine sono geometricamente simili se sono ricavabili dallo stesso disegno, variando solo la scala; così, ad esempio, le due ruote Pelton riportate in fig. 8.1 (che in realtà sono la stessa foto in due ingrandimenti diversi) sono geometricamente simili. La similitudine geometrica, per essere effettivamente completa, dovrebbe estendersi anche alla rugosità delle superfici ed ai giochi. Questi ultimi fatti sono però di difficilissima realizzazione; se ne dovrà quindi tenere conto nell'analisi definitiva.

b) - La similitudine cinematica

Due turbomacchine geometricamente simili si dicono *funzionare in similitudine cinematica* quando le velocità corrispondenti in punti corrispondenti stanno fra loro in un rapporto costante.
Ad esempio, le due giranti geometricamente simili di fig. 8.1 funzionano in condizioni di similitudine cinematica se si verifica contemporaneamente, in ogni coppia corrispondente di punti x, x':

$$\frac{\mathbf{w}_x}{\mathbf{w}'_x} = \frac{\mathbf{u}_x}{\mathbf{u}'_x} = \frac{\mathbf{c}_x}{\mathbf{c}'_x} = \ldots = \alpha \qquad (8.3)$$

avendo indicato con α il valore di detto rapporto.
In particolare, in queste condizioni di funzionamento si verificherà ancora:

$$\frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}'_1} = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}'_1} = \frac{\mathbf{c}_1}{\mathbf{c}'_1} = \frac{\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}'_2} = \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}'_2} = \frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{c}'_2} = \alpha \qquad (8.4)$$

e quindi i triangoli di velocità all'ingresso ed all'uscita di due giranti geometricamente simili, funzionanti in modo da rispettare la (8.4), sono fra loro simili.
In queste condizioni è rispettata la similitudine *cinematica*.

c) - La similitudine dinamica

Un ulteriore parametro, il grado di reazione **R**, deve rimanere uguale fra la macchina industriale e quella modello.
Questa condizione è la cosiddetta *similitudine dinamica*.
Generalmente però non è possibile mantenere costanti alcuni parametri, quali il numero di Reynolds per le due macchine (vedi par. 8.2.b), i coefficienti di efflusso, ecc.
Si tiene conto di ciò con opportune formule correttive dei risultati ottenuti, di natura generalmente semiempirica (vedi par. 8.6).

8.2.b) - Il numero di Reynolds

In tutto quanto si dirà nei successivi paragrafi, si riterrà il numero di Reynolds uguale per le due macchine funzionanti in similitudine; questo fatto però è di difficilissima realizzazione. Nel par. 8.6 si illustreranno le correzioni da apportare ai risultati attenuti a voler tener conto del fatto che questa condizione non si realizza completamente.

8.5) - LE FAMIGLIE DI TURBINE

8.5.a) - Il numero di giri caratteristico

Se infatti si considerano le espressioni che permettono di ricavare la portata ed il salto sotto cui deve funzionare la macchina modello perché sia in similitudine cinematica con la macchina industriale (8.7) e (8.9), con semplici passaggi si ottiene:

$$\frac{\mathbf{Q_v}}{\mathbf{Q_v'}}=\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D'}}\right)^3\cdot\left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n'}}\right) \qquad \frac{H_t}{H_t'}=\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D'}}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n'}}\right)^2$$

Eliminando il termine **(D/D')**:

$$\frac{\mathbf{Q_v}}{\mathbf{Q_v'}}=\left(\frac{\mathbf{H_t}}{\mathbf{H_t'}}\right)^{3/2}\cdot\left(\frac{\mathbf{n'}}{\mathbf{n}}\right)^2$$

Separando quindi i termini relativi alle due macchine (la turbina industriale e quella modello) si ha:

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{Q_v}^{1/2}}{\mathbf{H_t}^{3/4}} = \mathbf{n'}\cdot\frac{\mathbf{Q_v'}^{1/2}}{\mathbf{H_t'}^{3/4}}$$

Ciò significa che per due macchine geometricamente simili, che funzionano in condizioni di similitudine cinematica, la grandezza:

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{Q_v}^{1/2}}{\mathbf{H_t}^{3/4}} \tag{8.19}$$

resta costante; la circostanza inoltre che detta grandezza è indipendente dai rapporti λ e α scelti, indica che essa resta costante per ogni macchina geometricamente simile ad una macchina data, purché funzionante, con questa, in condizioni di similitudine cinematica.

Invertendo il concetto, è possibile dire che due macchine, simili geometricamente, funzionano in condizioni di similitudine quando il parametro (8.19) ha, per entrambe, lo stesso valore.

La grandezza (8.19) può quindi essere assunta come un parametro *caratteristico* di quel gruppo di turbine. Il parametro (8.19) prende il nome di *numero di giri caratteristico* e viene generalmente indicato con $\mathbf{n_c}$.

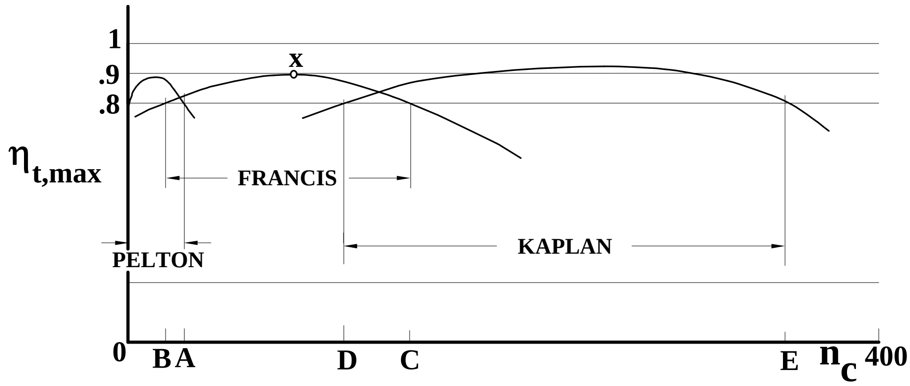
È quindi:

$$\mathbf{n_c} = \mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{Q_v}^{1/2}}{\mathbf{H_t}^{3/4}} \tag{8.20}$$

con: - **n** espresso in **giro/min**;
- $\mathbf{Q_V}$ espresso in $\mathbf{m^3/s}$;
- $\mathbf{H_t}$ espresso in **m**.

Il numero di giri caratteristico $\mathbf{n_c}$ (che, come si vede chiaramente, *non è adimensionale, e quindi è legato, nel suo valore numerico, alle unità di misura scelte per le varie grandezze che lo costituiscono)* è cioè indicativo di un gruppo di macchine, geometricamente simili, funzionanti in similitudine cinematica.

Operando quindi sperimentalmente su una macchina qualsiasi, caratterizzata da un determinato valore di $\mathbf{n_c}$, è possibile dire che ogni turbina, geometricamente simile alla data, con lo stesso $\mathbf{n_c}$ avrà lo stesso rendimento di quella sperimentata, *a prescindere dalla sua dimensione*.

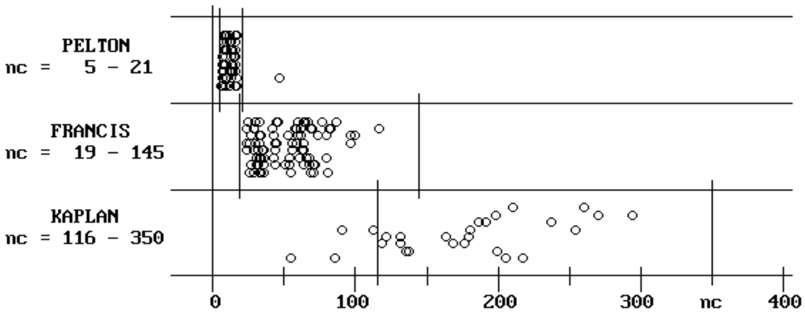


Andamento qualitativo di $\eta_{t,max}$ ottenibile in funzione di $\mathbf{n_c}$.

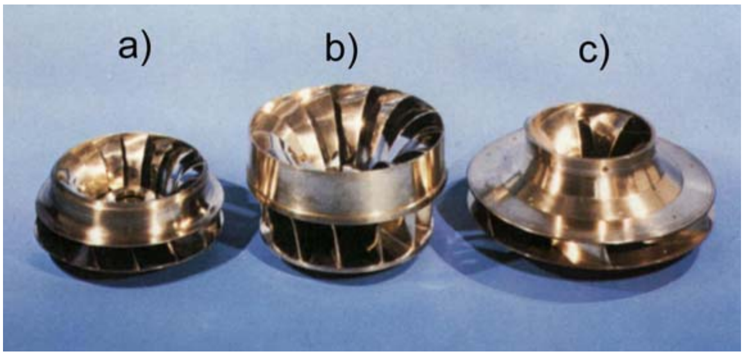
Fig. 8.8

T A B E L L A 8.4

MACCHINA	n_s $n_s = 3.40\ n_c$	n_c	Grado di reazione
Pelton ad 1 getto	**-- ÷ 30**	**3 ÷9**	**0**
Pelton a 2 getti	**20 ÷ 60**	**7 ÷14**	**0**
Pelton a più getti[1]	**30 ÷ 90**	**9 ÷22**	**0**
Francis lente	**65 ÷ 120**	**19 ÷ 35**	**0.3**
Francis medie	**120 ÷ 200**	**35 ÷ 85**	**0.4**
Francis veloci	**200 ÷ 300**	**58 ÷ 87**	**0.5**
Francis ultraveloci	**300 ÷ 500**	**87 ÷ 45**	**0.6**
Kaplan	**400 ÷ 1200**	**116 ÷ 350**	**0.7**



Numero di giri caratteristico di macchine attualmente in esercizio.
Fig. 8.10



Giranti di turbina Francis
a) – Girante normale; b) – Girante veloce; c) – Girante lenta.
Fig. 8.18

$$Q = c_1 \sin(\alpha_1) \pi D^2 \left(\frac{l}{D} \right) =$$

$$= c_1 \sin(\alpha_1) 2\pi \frac{u^2}{\omega^2} \left(\frac{l}{D} \right) =$$

$$= \frac{c_1^3}{\omega^2} 2\pi \left(\frac{l}{D} \right) \left(\frac{u}{c_1} \right)^2 \sin(\alpha_1) =$$

$$= \frac{(gH)^{3/2} [2(1-R)]^{3/2}}{\omega^2} 2\pi \left(\frac{l}{D} \right) \left(\frac{u}{c_1} \right)^2 \sin(\alpha_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\omega^2 \frac{Q}{(gH)^{3/2}}}_{N_s^2} = \underbrace{2\pi \left(\frac{l}{D} \right)}_{\substack{\textit{similitudine} \\ \textit{geometrica}}} \underbrace{\left(\frac{u}{c_1} \right)^2 \sin(\alpha_1)}_{\substack{\textit{similitudine} \\ \textit{cinematica}}} \underbrace{[2(1-R)]^{3/2}}_{\substack{\textit{similitudine} \\ \textit{dinamica}}}$$

$$N_s = \omega \frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} = \frac{\Phi^{1/2}}{\Psi^{3/4}}$$

$$D_s = D \frac{(gH)^{1/4}}{Q^{1/2}}; \Phi = \frac{Q}{\omega D^3}; \ \Psi = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$$

Turbina	n [giro/min]	Q [m^3/s]	H [m]	P [kW]
Pelton S. Fiorano 2	600	11.35	1404	140000
Pelton Lago Delio	500	19.85	732	126800
Francis Presenzano	428.6	60	470	250000
Francis Sao Paulo	85.7	464	48	194000
Kaplan Sao Paulo	78.3	600	24.4	103000
Kaplan Clavesana	214	20	7.5	1300

Turbina	Ns	Ns1	Nc	Nc1	Ds
Pelton S. Fiorano 2	0.166	0.0265	8.8	32.2	18
Pelton Lago Delio	0.299	0.0476	15.8	57.8	9.5
Francis Presenzano	0.621	0.0989	32.9	120	4.5
Francis Sao Paulo	1.91	0.304	101	369	2.1
Kaplan	3.30	0.525	175	638	1.5
Kaplan Clavesana	3.99	0.635	211	771	1.3

$$N_s = \omega \frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \qquad N_{s1} = \frac{n}{60} \frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

$$N_c = n \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \qquad N_{c1} = 3.65 n \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}}$$

Turbina	Ds	D [m]	V0 [m/s]	U [m/s]	U/V0	Φ	Ψ
Pelton S. Fiorano 2	18	2.8	166	88	0.530	0.017	3.55
Pelton Lago Delio	9.5	2.3	120	60	0.502	0.063	3.98
Francis Presenzano	4.5	4.23	96	95	0.989	0.035	0.932
Francis Sao Paulo	2.1	9.71	31	44	1.42	0.112	0.486
Kaplan	1.5	9.34	22	38	1.75	0.181	0.331
Kaplan Clavesana	1.3	1.98	12	22	1.83	0.231	0.304

Table 3.2 Specific Speeds

Turbomachine	Specific speed range
Pelton wheel	0.03–0.3
Francis turbine	0.3–2.0
Kaplan turbine	2.0–5.0
Centrifugal pumps	0.2–2.5
Axial-flow pumps	2.5–5.5
Centrifugal compressors	0.5–2.0
Axial-flow turbines	0.4–2.0
Axial-flow compressors	1.5–20.0

Esempio 1) Modello in scala di Turbina Francis

Turbina	Ns	Ns1	Nc	Nc1	Ds
Francis Presenzano	0.621	0.0989	32.9	120	4.5

Turbina	n [giro/min]	Q [m^3/s]	H [m]	P [kW]
Francis Presenzano	428.6	60	470	250000
Modello	**3000**	0.420	231	760
Modello	**428.6**	0.060	4.7	2.21

Turbina	Ds	D [m]	V0 [m/s]	U [m/s]	U/V0	Φ	Ψ
Francis Presenzano	4.5	4.23	96	95	0.989		
Modello	4.5	**0.423**	67.2	66.4	0.989		
Modello	4.5	**0.423**	9.6	9.5	0.989		

$$D_s = D\frac{(gH)^{1/4}}{Q^{1/2}} = D_{\text{mod}}\frac{(gH_{\text{mod}})^{1/4}}{Q_{\text{mod}}^{1/2}}$$

$$N_s = \omega\frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} = \omega_{\text{mod}}\frac{Q_{\text{mod}}^{1/2}}{(gH_{\text{mod}})^{3/4}}$$

$$H_{\text{mod}}^{1/2} = \frac{\omega_{\text{mod}} D_{\text{mod}}}{N_s D_s}$$

$$Q_{\text{mod}}^{1/2} = \begin{cases} \dfrac{N_s}{\omega_{\text{mod}}}(gH_{\text{mod}})^{3/4} \\[2ex] \dfrac{D_{\text{mod}}}{D_s}(gH_{\text{mod}})^{1/4} \end{cases}$$