Curve e forme differenziali lineari

(1) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2y^2+4}dx + \frac{x}{x^2y^2+4}dy$$

e calcolarne l'integrale lungo la curva $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, y \ge 0, x^2+y^2 = 1\}$.

(2) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right) dx + \left(2y - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) dy$$

e, se possibile, determinare una sua primitiva.

(3) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = -ydx + xdy$$

lungo la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos t(1+\sin t) \\ y(t) = 1+\sin t, \qquad t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

orientata nel verso indotto dalla rappresentazione parametrica.

(4) Studiare al variare dei parametri reali a, b, c, d la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{ax+by}{\sqrt{4-x^2y^2}}dx + \frac{cx+dy}{\sqrt{4-x^2y^2}}dy.$$

(5) Studiare la seguente forma differenzilae

$$\omega = \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2-y^2}} + 1\right) dx - \frac{y}{\sqrt{4x^2-y^2}}dy,$$

e calcolarne l'integrale lungo l'arco di circonferenza $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 1, x^2+y^2 = 3\}$, orientato in senso antiorario.

(6) i) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{y-2x}{x^2+y^2}dx - \frac{2y+x}{x^2+y^2}dy.$$

ii) Mostrare che ω è esatta in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y < |x|\}$.

(7) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}dx - \frac{x^2y}{x^4+y^4}dy$$

e, se possibile, calcolarne la primitiva che si annulla in $(1,0)$.

(8) Posto $\omega = ydx - xdy$ e $\gamma_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; y = x^\alpha\}$, con $\alpha > 0$, verificare che

$$-1 < \int_{+\gamma_\alpha} \omega < 1.$$

(9) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{1}{x} + x\sqrt{\frac{y}{1+x^2}}\right) dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{y}}dy.$$

Calcolarne l'integrale curvilineo lungo l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, $x \in [1, 2]$, orientato nel verso crescente delle x.

(10) Data la forma differenziale

$$\omega_k = \frac{x^k}{x^2+y^2}dx + \frac{y^k}{x^2+y^2}dy$$

i) determinare eventuali valori di k in corrispondenza dei quali ω_k è chiusa;
ii) dire se le seguenti implicazioni sono vere o false:
ω_k chiusa $\Rightarrow \omega_k$ esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;
ω_k chiusa $\Rightarrow \omega_k$ esatta in $\{x > 0, y > 0\}$.
iii) verificare che ω_k è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e calcolarne una primitiva.

(11) Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \cos t + (2 - t)\sin t \\ y(t) = \sin t + (2 - t)\cos t, \qquad t \in [0, 2]. \end{cases}$$

(12) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = \sqrt{z}dx + xdy + ydz$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t^2)$, $t \in [0, \pi/2]$.

(13) Determinare le coordinate del baricentro dell'arco di curva $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x \in]-1, 1[$.

(14) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma differenziale

$$\omega = \left(\alpha xz + \frac{yz}{x}\right) dx + \left(z \log x - \frac{\alpha^2 y}{2} \log z\right) dy + \left(x^\alpha + y \log x - \frac{y^2}{z}\right) dz$$

è esatta; calcolare per tali valori di α la primitiva di ω che si annulla nel punto $(1, 1, 1)$.

(15) Calcolare le coordinate del baricentro della curva $y = (7^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ con $0 \le x \le 7$.