Il Principio dei lavori virtuali

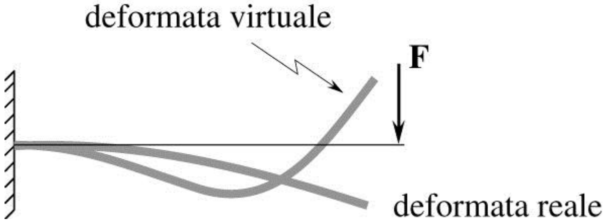
Il P.L.V. rientra nella classe di quei principi energetici che indicano che i sistemi evolvono nel senso di minimizzare l'energia associata ad ogni stato di possibile configurazione.

Il principio vuole determinare la condizione di equilibrio attraverso la connessione tra posizione (cinematica) e campi di forza applicati.

Spostamenti virtuali: dato un qualunque sistema, generalmente vincolato, rappresentano tutti i possibili stati (deformazioni) che non violino la compatibilità dei vincoli. In genere si considerano tali spostamenti infinitesimi, ossia piccole perturbazioni rispetto allo stato iniziale

ESEMPIO:

- *Per un corpo nello spazio, gli spostamenti virtuali sono dati dalle infinito^2 possibili direzioni di avanzamento,*
- *Per un veicolo in moto piano su un piazzale, gli spostamenti virtuali sono dati dalle infinito^1 possibili direzioni di spostamento (un solo angolo la definisce),*
- *Per un treno sui binari, gli spostamenti virtuali sono 1, 2 se si distinguono i due versi di possibile avanzamento (ma se differenti il sistema diventa non lineare)*



Per una trave deformabile, ogni punto può spostarsi come vuole, essendo descritto da una **funzione continua**

Il fatto che la funzione sia continua, indica che la compatibilità del campo di spostamenti non è solo con i vincoli esterni ma anche espressa come compatibilità di spostamenti di punti contigui (assenza di strappi e/o compenetrazioni) in inglese: *cinematic condition.*

Forze equilibrate: Un qualunque sistema di forze applicato ad un corpo è in equilibrio se, come già visto, la somma di tutti i contributi si annulla e si annullano anche tutti i momenti qualunque sia il polo scelto per il loro calcolo.

Il lavoro virtuale: lavoro compiuto da un sistema di forze associato a spostamenti virtuali.

ENUNCIATO (Lagrange 1736-1783):

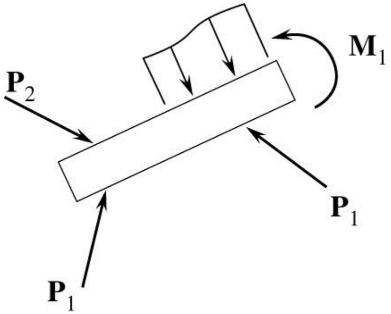
Condizione Necessaria e Sufficiente perché un sistema materiale sia in equilibrio, è che sia nullo il lavoro virtuale delle forze attive associato a qualunque spostamento virtuale compatibile

In pratica il principio asserisce che ad un sistema perfettamente equilibrato e nella sua deformazione vera, se si perturba infinitesimamente la sua condizione, le forze esterne applicate non compiono lavoro – il sistema non cambia stato energetico – L'energia totale è in una condizione di stazionarietà.

Il P.L.V. è di validità ancor più generale e può essere applicato:

- A corpi rigidi o deformabili
- A strutture staticamente determinate o indeterminate (iso, iper, ipostatiche o labili
- In presenza di non linearità di forze o spostamenti
- In presenza di vincoli cedevoli – ossia vincoli con rigidezza finita
- In presenza di effetti legati alle dilatazioni termiche
- In presenza di stati di tensioni residue – ossia tensioni interne alla struttura

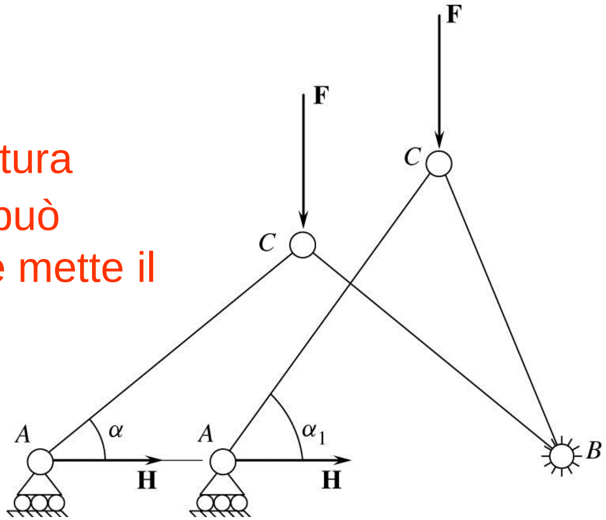
Applicazione a corpi rigidi



Il principio consente di studiare l'equilibrio di un corpo sollecitato, senza scrivere esplicitamente le condizioni di equilibrio (3 nel piano)

Ad esempio, nel disegno a fianco che rappresenta una struttura labile, se si suppone che F e l'angolo α siano assegnati, si può cercare il valore di H che annulla il lavoro virtuale (ossia che mette il sistema in equilibrio).

In modo duale si può cercare, se sono assegnati F e H, il valore dell'angolo α che dà la configurazione di equilibrio, annullando il lavoro virtuale



Se i corpi sono assimilabili a rigidi, gli stati di tensioni interni non entrano nel calcolo del P.L.V. in quanto non essendoci apprezzabile deformazione interna, il lavoro degli sforzi interni è sempre nullo.

Applicazione a corpi deformabili

In questo caso invece si ha apprezzabile deformazione interna, per cui l'accoppiamento di stati di tensione e deformazione interna foniscono un contributo energetico (lavoro delle forze interne) che va computato nell'applicazione del P.L.V.

Attenzione va posta al fatto che il lavoro delle forze interne è di segno negativo, in quanto rappresenta un'energia ceduta dal sistema, pertanto il P.L.V., nell'asserire l'annullarsi del lavoro complessivamente compiuto si traduce nella:

Lavoro compiuto dalle forze attive (concentrate, distribuite) quando si applica un campo di spostamenti virtuale s*

$$\boxed{L_{est} = L_{\text{int}}}$$

Energia ceduta dallo stato tensionale interno quando si esplica una deformazione virtuale ε*

Per una trave, si avrà:

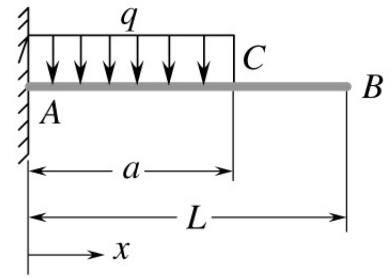
Gli asterischi * indicano spostamenti (o deformazioni virtuali)

$$L_{est} = \sum_{Forze\ concentrate} \left(N_i \Delta u_i^* + T_i \Delta \eta_i^* \right) + \sum_{Momenti\ concentrati} M_i \Delta \vartheta_i^* + \int q(x)\, \eta^*(x)\, dx$$

||

$$L_{\text{int}} = A \int_{Fnorm} \sigma(x)\, \varepsilon^*(x)\, dx + A \int_{Ftaglio} \tau_{med}(x)\, \gamma_{med}^*(x)\, dx + \int_{Mflett} M_f(x) \frac{d^2\eta(x)}{dx^2}^*(x)\, dx + \int_{Mtorc} M_t(x) \frac{d\phi^*(x)}{dx} dx$$

STRUTTURE MONODIMENSIONALI ISOSTATICHE



Esempio: Calcolo freccia massima nel punto B

Si comincia a calcolare il momento flettente applicato lungo x

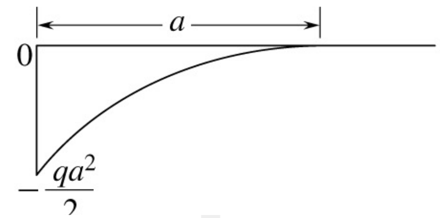
$$\boxed{0 \le x \le a}$$

$$T(x) = q(a-x)$$

$$M(x) = q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

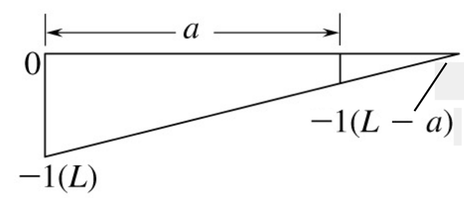
$$M(a) = 0 = q\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) + C \Rightarrow C = -q\frac{a^2}{2}$$

$$M(x) = -\frac{q}{2}(a-x)^2$$



Per determinare lo spostamento in B si introduce un nuovo carico fittizio, unitario, proprio in B, anche di questa si calcola l’andamento del momento flettente

$$M(x) = -1(L-x)$$



A questo punto si applica il principio dei lavori virtuali, prendendo come deformata virtuale quella associata al carico distribuito q, e considerando il carico delle forze esterne individuate dal solo carico esplorativo 1

Lo spostamento del punto B è l'incognita δ

Lavoro della forza esterna: $\boxed{L_{ext} = 1 \cdot \delta}$

Il lavoro delle forze interne è dato dall'azione del momento della forza unitaria che agisce sulla curvatura derivante dalla deformata dovuta al carico q

$$L_{\text{int}} = \int_0^a M\big|_{Funit} \cdot \Gamma\big|_q \, dx = \frac{1}{E\ J} \int_0^a -(L-x)\left[-\frac{q}{2}(a-x)^2\right] dx$$

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{E\ J} \int_0^a \left[\frac{q}{2}\left(La^2 - a^2x + Lx^2 - x^3 - 2aLx + 2ax^2\right)\right] dx =$$

$$L_{\text{int}} = \frac{q}{2E\ J}\left(a^3L - \frac{a^4}{2} + \frac{a^3L}{3} - \frac{a^4}{4} - a^3L + \frac{2}{3}a^4\right)$$

$$\delta$$

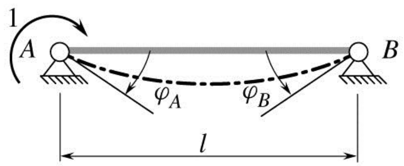
$$L_{\text{int}} = \frac{q}{2E\ J}\left(\cancel{a^3L} - \frac{a^4}{2} + \frac{a^3L}{3} - \frac{a^4}{4} - \cancel{a^3L} + \frac{2}{3}a^4\right) = \boxed{\frac{qa^3}{24\ E\ J}(4L-a)}$$

Per la rotazione nel punto B si applica in esso un momento unitario

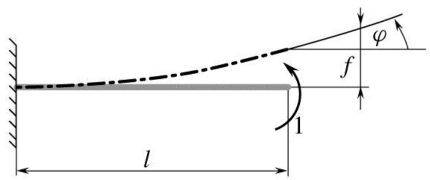
$$L_{\text{int}} = \frac{1}{E\ J} \int_0^a -1 \cdot \left[-\frac{q}{2}(a-x)^2\right] dx$$

$$\vartheta = \frac{qa^3}{6\ E\ J}$$

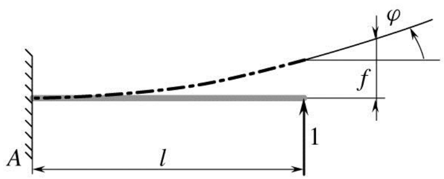
Da calcoli del tutto analoghi si possono ricavare tutte le soluzioni che sono presenti nella tabella sottostante



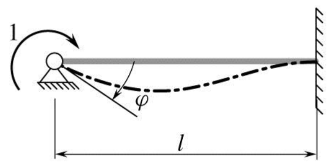
$$\varphi_A = \frac{1}{3EJ} \qquad \varphi_B = \frac{1}{6EJ}$$



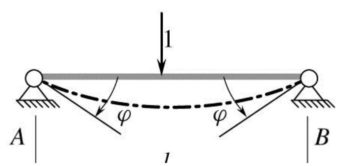
$$\varphi = \frac{1}{EJ} \qquad f = \frac{L^2}{2EJ}$$



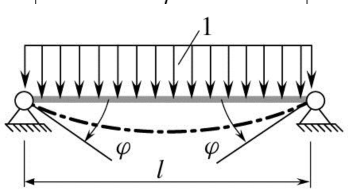
$$\varphi = \frac{L}{2EJ} \qquad f = \frac{L^2}{3EJ}$$



$$\varphi = \frac{1}{4EJ}$$



$$\varphi = \frac{L}{16EJ}$$



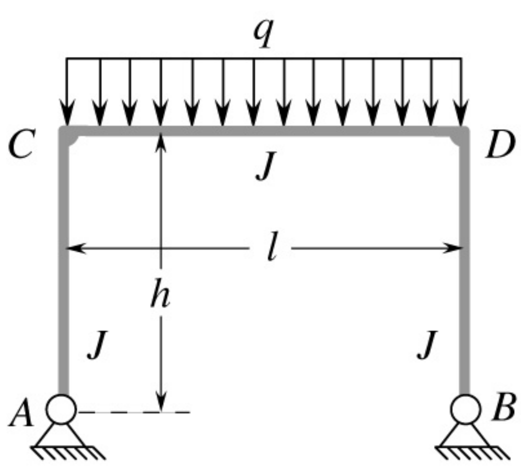
$$\varphi = \frac{L^2}{24EJ}$$

STRUTTURE MONODIMENSIONALI IPERSTATICHE

Il P.L.V. si presta anche ad essere applicato, come detto, alle strutture iperstatiche, ossia quelle che presentano *n* vincoli sovrabbondanti. *Il metodo, denominato METODO DELLE FORZE, si compone dei seguenti passi:*

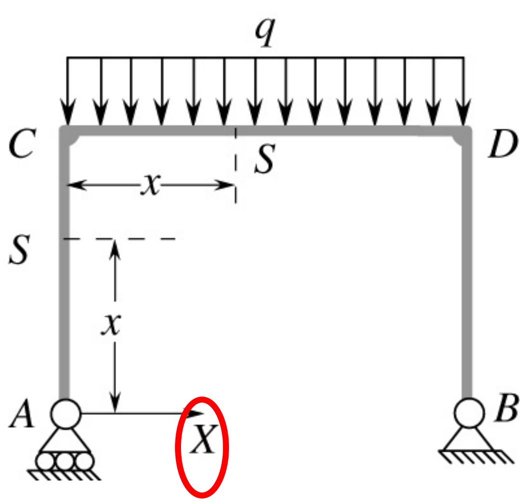
- Si eliminano n g.d.l. in modo da rendere la struttura isostatica
- Ciascuno dei g.d.l. eliminati viene sostituito da una forza di reazione incognita, si introducono così n incognite
- Si scrive il P.L.V. n volte, considerando un carico fittizio esplorativo e unitario corrispondente a ciascuno dei vincoli eliminati (uno alla volta)
- Si ricava un sistema di n equazioni con n incognite

Esempio 1: Risoluzione di un problema 1 volta iperstatico

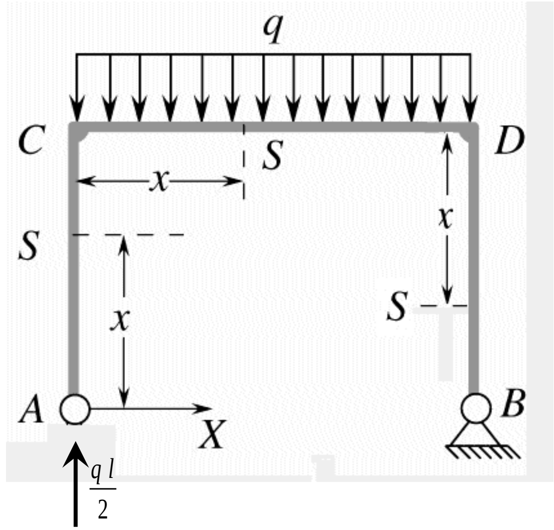


Si decide di eliminare un vincolo orizzontale in A, facendola divenire una cerniera

$$R_A = R_B = \frac{q\,l}{2}$$



Considerando i momenti flettenti come positivi se mettono in tensione le fibre interne, si ha, nei tratti verticali ed orizzontale:



$$\begin{cases} M_1 = -X \cdot x \\ M_2 = \dfrac{q\,l}{2}\,x - \dfrac{q\,x^2}{2} - X \cdot h \\ M_3 = \cancel{\dfrac{q\,l^2}{2}} - \cancel{\dfrac{q\,l^2}{2}} - X\,(h - x) \end{cases}$$

Ora si considera una forza fittizia unitaria (*X=1*) la quale però non darà lavoro esterno (L_{est}=0) in quanto sappiamo che ad essa si associa il vincolo

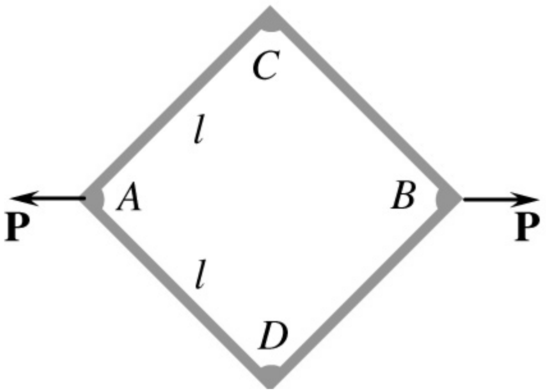
$$\begin{cases} M_1 = -1 \cdot x \\ M_2 = -1 \cdot h \\ M_3 = -1(h - x) \end{cases}$$

Si fa ora l'associazione tra il lavoro esterno compiuto da questa unica forza (nulla) e il lavoro compiuto da questa forza sulla deformazione virtuale pari a quella calcolata in precedenza (con l'incognita X al suo interno)

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{E\ J}\left[\int_0^h (-1\cdot x)(-X \cdot x)\,dx + \int_0^l (-1\cdot h)\left(\frac{q\,l}{2}\,x - \frac{q\,x^2}{2} - X \cdot h\right)dx + \int_0^h -1(h-x)(-X\,(h-x))\,dx + \right]$$

$$0 = L_{\text{int}} = \frac{Xh^3}{3} + \left(-\frac{qhl^3}{12} + Xh^2 l\right) + \frac{Xh^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = \frac{q\,l^3}{4h(2h+3l)}}$$

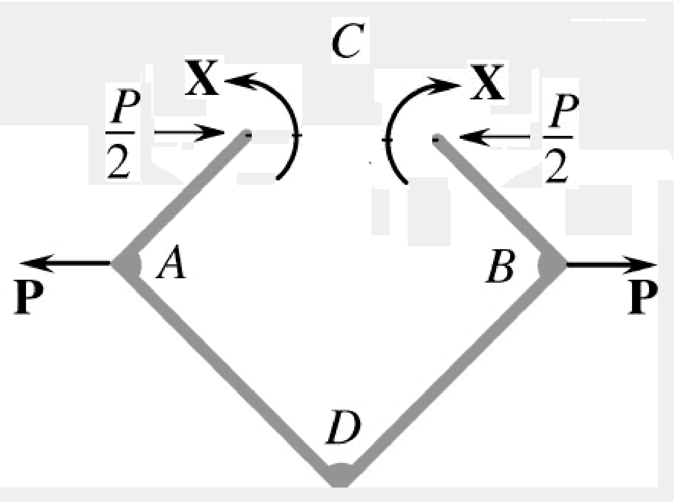
Esempio 2: Strategia per la risoluzione di un problema 3 volte iperstatico



Questo problema si presenta 3 volte iperstatico all'interno dell'anello in chiuso in quanto si può dissaldare in C eliminando 2 traslazioni e una rotazione interna, senza rendere labile l'anello stesso

Innanzitutto, per simmetria, si può dichiarare che la reazione verticale deve essere necessariamente nulla

Sempre per simmetria, si scopre che la reazione orizzontale non è affatto incognita in quanto si suddivide ugualmente sui due snodi alto e basso



Unica vera incognita è il momento X che andrà risolta al solito modo, prendendo un momento esplorativo unitario associato alla deformazione che si ha dall'insieme dei carichi comprensivo di X (anche in questo caso il lavoro delle forze esterne è nullo in quanto il vincolo blocca lo spostamento)