

TRAVATURE IPERSTATICHE - Calcolo di componenti di spostamento

Esempio 1

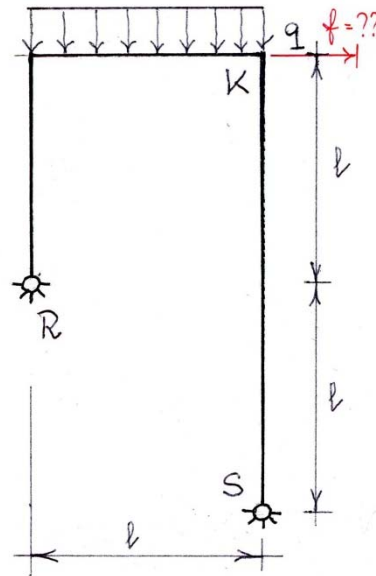


Figura 1

Calcolare la componente orizzontale f dello spostamento del punto K dovuta al carico q uniformemente distribuito sul traverso (figura 1).

Il calcolo di una componente di spostamento di una travatura mediante il metodo dei lavori virtuali richiede la conoscenza delle deformazioni generalizzate della stessa; nel caso di una travatura iperstatica per determinare tali deformazioni generalizzate è necessario conoscere preliminarmente le incognite iperstatiche. Si mette in evidenza l'incognita iperstatica (figura 2).

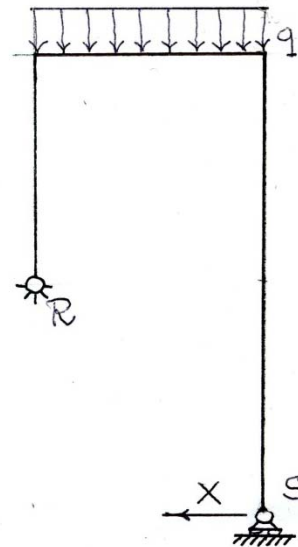


Figura 2

Si calcolano, a meno del valore incognito dell'iperstatica, le deformazioni generalizzate della travatura data (nel caso specifico ci si limita alle deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ ed estensionali $d\varepsilon$).

Preliminarmente si determinano, per effetto del solo carico esterno q distribuito uniformemente sul traverso, le reazioni vincolari (figura 3), il diagramma del momento flettente M_0 (riportato dalla parte delle fibre tese in figura 4) ed il diagramma dell'azione assiale N_0 (figura 5).

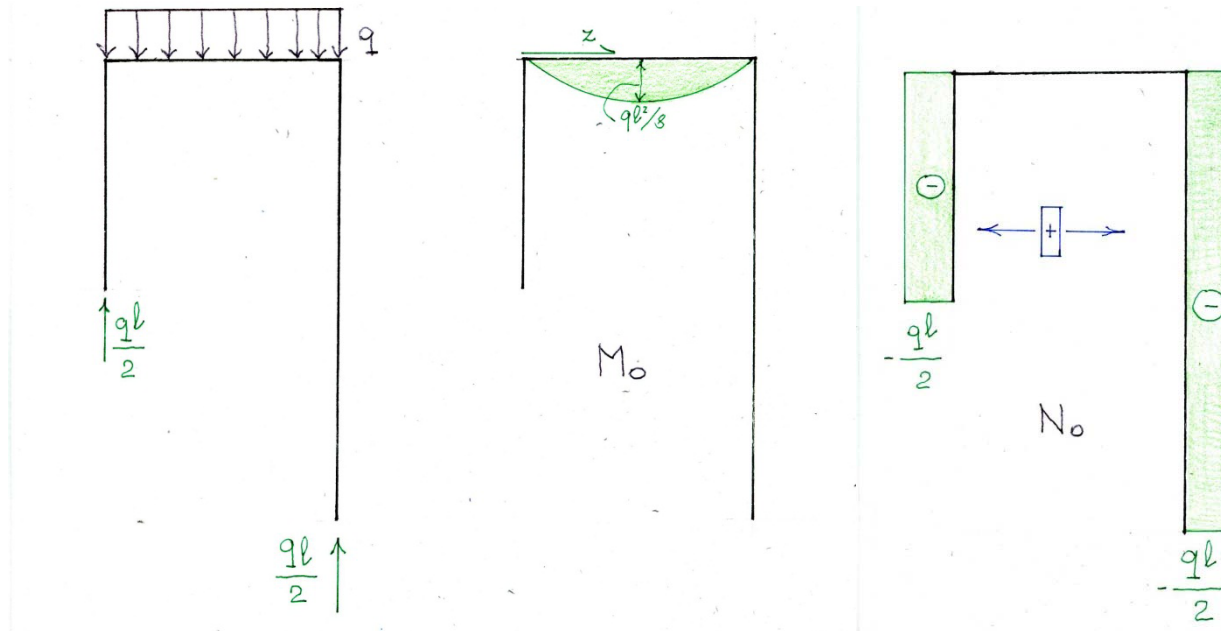


Figure 3, 4 e 5

Successivamente si determinano, per effetto della sola incognita iperstatica X posta eguale ad 1 (figura 6), le reazioni vincolari (figura 7), il diagramma del momento flettente M' (riportato dalla parte delle fibre tese in figura 8) ed il diagramma dell'azione assiale N' (figura 9).

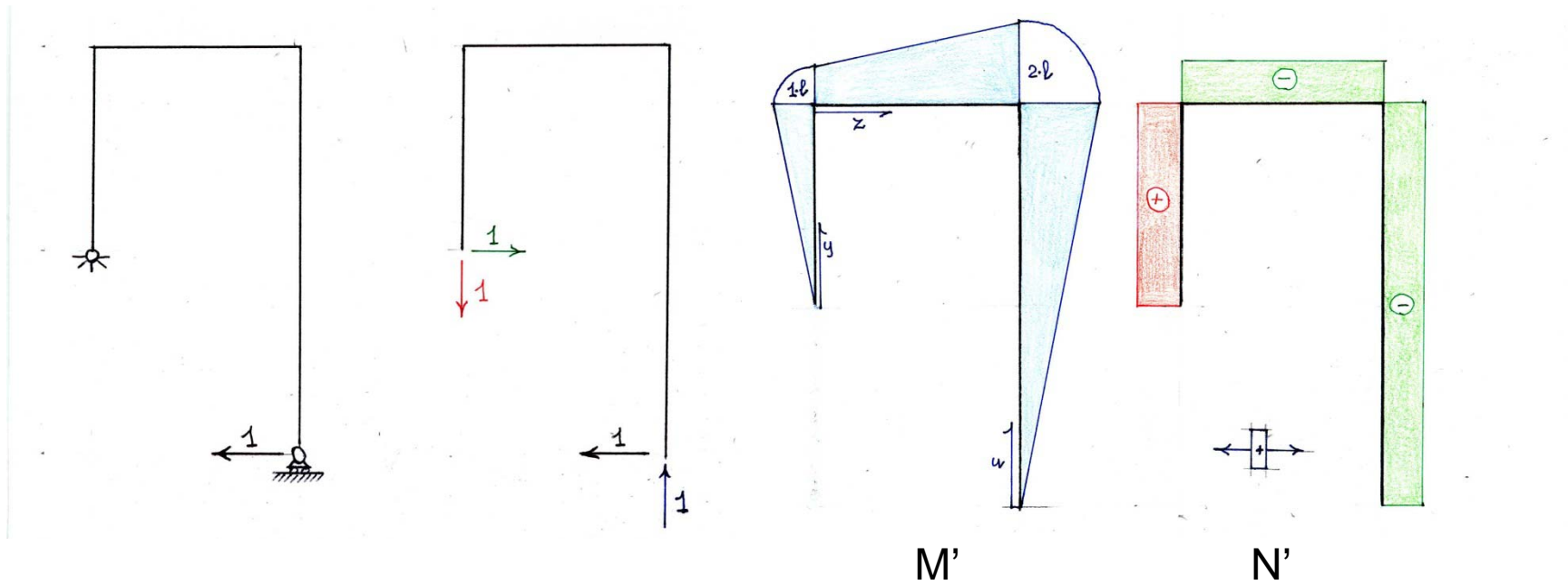


Figure 6, 7, 8 e 9

Le azioni interne totali risultano dunque:

$$M = M_0 + X M' , \quad N = N_0 + X N' .$$

Le deformazioni generalizzate sono:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds = \frac{M_0 + X M'}{EI} ds$$

$$d\varepsilon = \frac{N}{EA} ds = \frac{N_0 + X N'}{EA} ds$$

Ai fini del calcolo del valore dell'incognita iperstatica lo scorrimento del carrello S (figura 2) dovuto al carico esterno distribuito q ed alla incognita iperstatica X deve essere nullo. Per determinare lo scorrimento del carrello S col metodo dei lavori virtuali si adotta la situazione equilibrata di figura 6 e 7, con le relative azioni interne M' ed N' .

Si calcola il lavoro virtuale esterno L_e compiuto dalle forze in equilibrio della figura 7 per gli spostamenti della struttura data (figura 1 e 2); si ha:

$$L_e = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0.$$

Il lavoro virtuale interno L_i , eguale al lavoro virtuale esterno L_e , è compiuto dal momento flettente M' della condizione equilibrata (figura 8) per le deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ della struttura data e dall'azione assiale N' della condizione equilibrata (figura 9) per le deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$ della struttura data. Si ha:

$$L_i = \int (M' d\varphi + N' d\varepsilon)$$

Sostituendo le espressioni di $d\varphi$ e di $d\varepsilon$, i due termini che costituiscono il lavoro interno, nell'ipotesi che EI ed EA siano costanti lungo la linea d'asse, diventano:

$$\int M' d\varphi = \int M' \frac{M_0 + X M'}{EI} ds =$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \int M' M_0 ds + X \int (M')^2 ds \right\}$$

$$\int N' d\varepsilon = \int N' \frac{N_0 + X N'}{EA} ds =$$

$$= \frac{1}{EA} \left\{ \int N' N_0 ds + X \int (N')^2 ds \right\}$$

L'equazione che fornisce l'incognita iperstatica diventa:

$$0 = \frac{1}{EI} \int M' M_0 ds + \frac{1}{EA} \int N' N_0 ds +$$

$$+ X \left\{ \frac{1}{EI} \int (M')^2 ds + \frac{1}{EA} \int (N')^2 ds \right\}$$

Si sviluppano in dettaglio i coefficienti dell'equazione, avendo cura di mettere in evidenza il segno dei momenti flettenti e dell'azione assiale.

$$\int (M')^2 ds = \int_0^l y^2 dy + \int_0^l (l+x)^2 dx + \int_0^{2l} u^2 du =$$

$$= \frac{l^3}{3} + l^3 + l^3 + \frac{l^3}{3} + \frac{8l^3}{3} = \frac{16}{3} l^3$$

$$\int (N')^2 ds = \int_0^l 1 dy + \int_0^l 1 dx + \int_0^{2l} 1 du = 4l$$

$$\int M' M_0 ds = \int_0^l -(l+x) \left(\frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) dx =$$

$$= -\frac{q}{2} \int_0^l (l+x)(l-x)x dx = -\frac{ql^4}{8}$$

$$\int N' N_0 ds = \int_0^l 1 \left(-\frac{ql}{2} \right) dy + \int_0^{2l} (-1) \left(-\frac{ql}{2} \right) dw$$

$$= \frac{ql^2}{2}$$

Si ottiene dunque:

$$0 = -\frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^2}{2EA} + X \left\{ \frac{16}{3} \frac{l^3}{EI} + \frac{4l}{EA} \right\}$$

Si riconosce che, detto ρ il raggio giratore della sezione ($I = A \rho^2$), quando le travi sono snelle, ossia $l / \rho > 10$, i termini che dipendono dalla deformabilità estensionale sono trascurabili rispetto a quelli che dipendono dalla deformabilità flessionale. L'equazione che fornisce l'incognita iperstatica si riduce a:

$$0 = - \frac{q l^4}{8 E I} + X \frac{16}{3} \frac{l^3}{E I}$$

Da qui si ottiene:

$$\bar{X} = \frac{3}{128} q l$$

Per la determinazione della componente di spostamento cercata si adotta la condizione di carico indicata in figura 10. In figura 11 sono riportate le reazioni vincolari e nelle figure 12 e 13 sono rappresentati i diagrammi del momento flettente M'' e dell'azione assiale N'' .

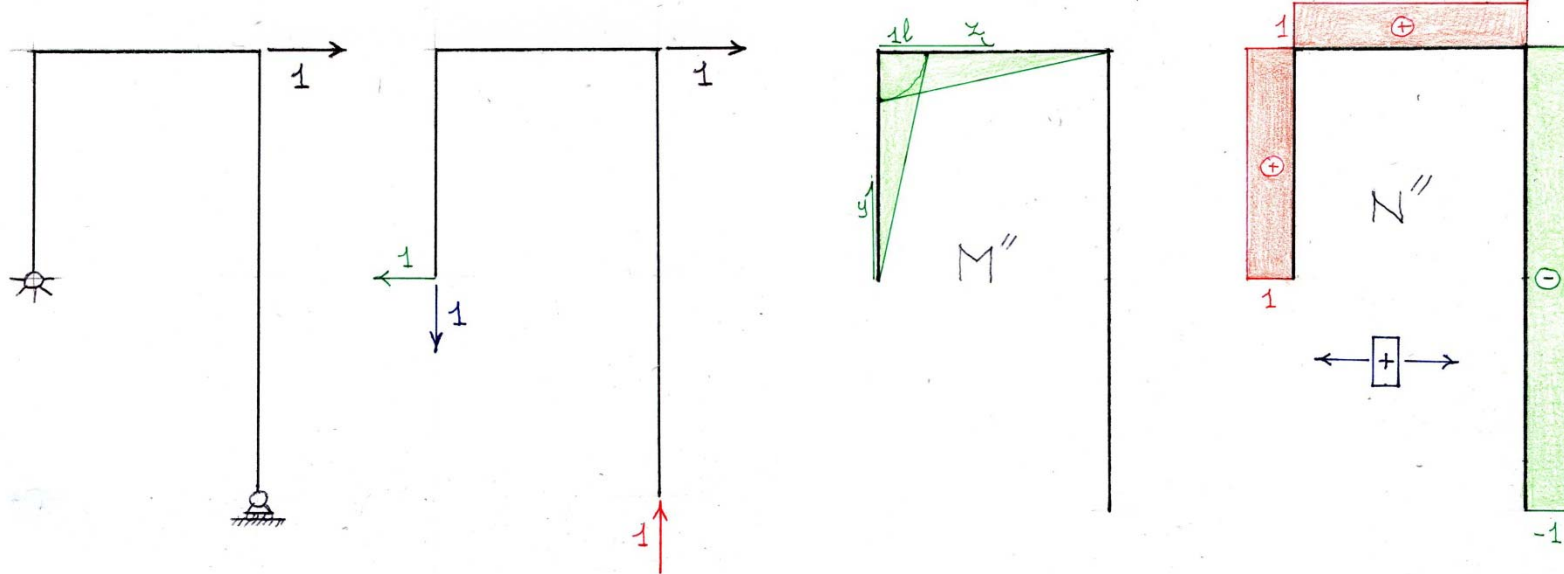


Figure 10, 11, 12 e 13

Si calcola il lavoro virtuale esterno L_e compiuto dalle forze in equilibrio della figura 11 per gli spostamenti della struttura data (figura 1 e 2); si ha:

$$L_e = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times f.$$

Il lavoro virtuale interno L_i , eguale al lavoro virtuale esterno L_e , è compiuto dal momento flettente M'' della condizione equilibrata (figura 12) per le deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ della struttura data e dall'azione assiale N'' della condizione equilibrata (figura 13) per le deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$ della struttura data:

$$L_e = L_i$$

$$L_i = \int (M'' d\varphi + N'' d\varepsilon) = 1f$$

Ricordando che a questo punto è noto il valore dell'incognita iperstatica:

$$\bar{X} = \frac{3}{128} ql$$

si sviluppano i vari termini, sostituendo le espressioni di $d\varphi$ e di $d\varepsilon$, sempre nell'ipotesi che EI ed EA siano costanti lungo la linea d'asse.

$$\int M'' d\varphi = \int M'' \frac{M_0 + \bar{X} M'}{EI} ds$$

$$\int N'' d\varepsilon = \int N'' \frac{N_0 + \bar{X} N'}{EA} ds$$

In dettaglio si ha allora quanto segue.

$$f = \left\{ \frac{1}{EI} \int M'' M_0 ds + \frac{1}{EA} \int N'' N_0 ds + \right. \\ \left. + \bar{X} \left[\frac{1}{EI} \int M'' M' ds + \frac{1}{EA} \int N'' N' ds \right] \right\}$$

I vari termini che qui compaiono sono ottenuti nel seguito:

$$\int M'' M_0 ds = \int_0^l (l-x) \left(\frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{q}{2} \cdot \int_0^l x (l-x)^2 dx = \frac{ql^4}{24}$$

$$\int N'' N_0 ds = \int_0^l 1 \left(-\frac{ql}{2} \right) dy + \int_0^{2l} (-1) \left(-\frac{ql}{2} \right) du =$$

$$= \frac{ql^2}{2}$$

$$\int M'' M' ds = \int_0^l -y^2 dy + \int_0^l (l-x)(-l-x) dx =$$

$$= -l^3$$

$$\int N'' N' ds = \int_0^l 1 dy + \int_0^l (-1) dx + \int_0^{2l} 1 du = 2l$$

Sempre nell'ipotesi che le travi sono snelle, ossia $l/\rho > 10$, i termini che dipendono dalla deformabilità estensionale sono trascurabili rispetto a quelli che dipendono dalla deformabilità flessionale.

$$f = \frac{1}{EI} \left\{ \int M'' M_0 ds + \bar{X} \int M'' M' ds \right\}$$

Introducendo i valori sopra riportati si ottiene finalmente:

$$f = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{ql^4}{24} + \frac{3}{128} ql(-l^3) \right\} = \frac{7}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

Esempio 2

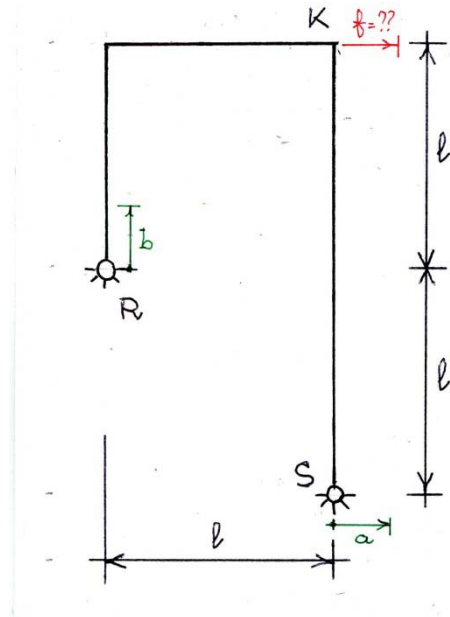


Figura 14

Calcolare la componente orizzontale f dello spostamento del punto K per effetto dei cedimenti a e b delle cerniere S ed R.

Il calcolo di una componente di spostamento di una travatura mediante il metodo dei lavori virtuali richiede la conoscenza delle deformazioni generalizzate della stessa; nel caso di una travatura iperstatica per determinare tali deformazioni generalizzate è necessario conoscere preliminarmente le incognite iperstatiche. Si mette in evidenza l'incognita iperstatica (figura 15).

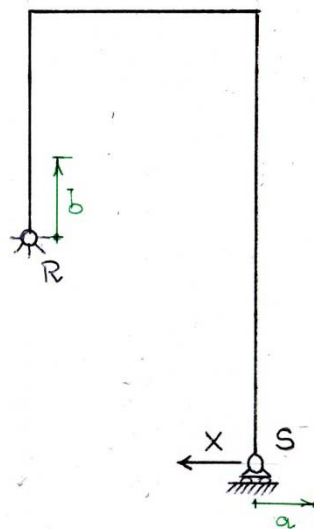


Figura 15

Si calcolano, a meno del valore incognito dell'iperstatica, le deformazioni generalizzate della travatura data (nel caso specifico ci si limita alle deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ ed estensionali $d\varepsilon$).

A questo scopo si determinano, per effetto della sola incognita iperstatica X posta eguale ad 1 (figura 16), le reazioni vincolari (figura 17), il diagramma del momento flettente M' (riportato dalla parte delle fibre tese in figura 18) ed il diagramma dell'azione assiale N' (figura 19).

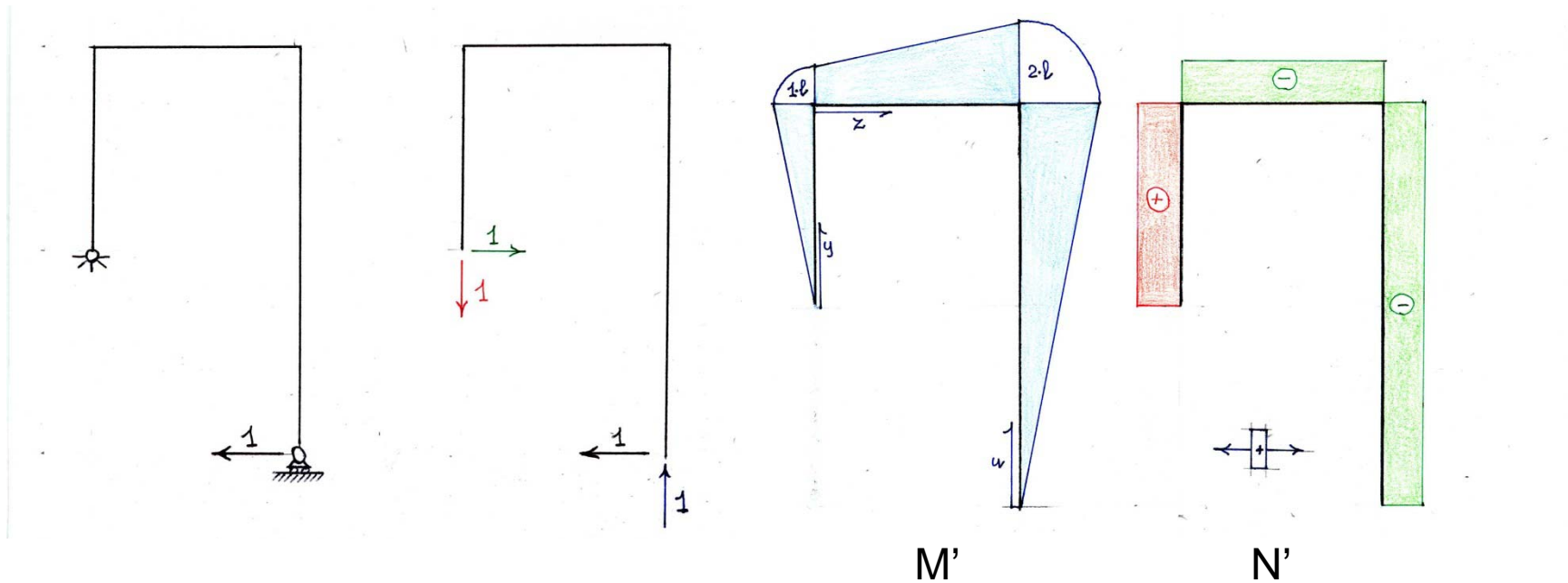


Figure 16, 17, 18 e 19

Le azioni interne totali risultano dunque: $M = X M'$, $N = X N'$.

Le deformazioni generalizzate sono:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds = \frac{X M'}{EI} ds \quad d\varepsilon = \frac{N}{EA} ds = \frac{X N'}{EA} ds$$

Ai fini del calcolo del valore dell'incognita iperstatica lo scorrimento del carrello S (figura 15) dovuto alla incognita iperstatica X ed al cedimento b della cerniera R deve essere diretto verso destra ed assumere il valore a . Per determinare lo scorrimento del carrello S col metodo dei lavori virtuali si adotta la situazione equilibrata delle figure 16 e 17, con le relative azioni interne M' ed N' .

Si calcola il lavoro virtuale esterno L_e compiuto dalle forze in equilibrio della figura 17 per gli spostamenti della struttura data (figure 14 e 15); si ha:

$$L_e = -1 \times b + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times a.$$

Il lavoro virtuale interno L_i , eguale al lavoro virtuale esterno L_e , è compiuto dal momento flettente M' della condizione equilibrata (figura 18) per le deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ della struttura data e dall'azione assiale N' della condizione equilibrata (figura 19) per le deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$ della struttura data. Si ha:

$$L_i = \int (M' d\varphi + N' d\varepsilon)$$

Sostituendo le espressioni di $d\varphi$ e di $d\varepsilon$, i due termini che costituiscono il lavoro interno, nell'ipotesi che EI ed EA siano costanti lungo la linea d'asse, diventano:

$$\int M' d\varphi = \int \frac{X(M')^2}{EI} ds = \frac{X}{EI} \int (M')^2 ds$$

$$\int N' d\varepsilon = \int \frac{X(N')^2}{EA} ds = \frac{X}{EA} \int (N')^2 ds$$

Eguagliando lavoro esterno L_e e lavoro interno L_i si ottiene l'equazione che fornisce l'incognita iperstatica:

$$-1(a+b) = X \left\{ \frac{1}{EI} \int (M')^2 ds + \frac{1}{EA} \int (N')^2 ds \right\}$$

Dall'esempio precedente si ha:

$$\int (M')^2 ds = \frac{16}{3} l^3 \quad \int (N')^2 ds = 4l$$

e l'equazione assume la forma:

$$\begin{aligned} -1(a+b) &= \frac{Xl}{E} \left(\frac{16}{3} \frac{l^2}{I} + \frac{4}{A} \right) = \\ &= \frac{Xl}{EA} \left(\frac{16}{3} \frac{l^2}{\rho^2} + 4 \right) \end{aligned}$$

Per le travi snelle il rapporto $l/\rho > 10$; pertanto si può trascurare il termine

$$\frac{4l}{EA} \quad \text{rispetto al termine} \quad \frac{16l^3}{EI} .$$

L'incognita iperstatica risulta dunque:

$$\bar{X} = -\frac{3}{16} (a+b) \frac{EI}{l^3}$$

Per la determinazione della componente di spostamento cercata si adotta la condizione di carico indicata in figura 20. In figura 21 sono riportate le reazioni vincolari e nelle figure 22 e 23 sono rappresentati i diagrammi del momento flettente M'' e dell'azione assiale N'' .

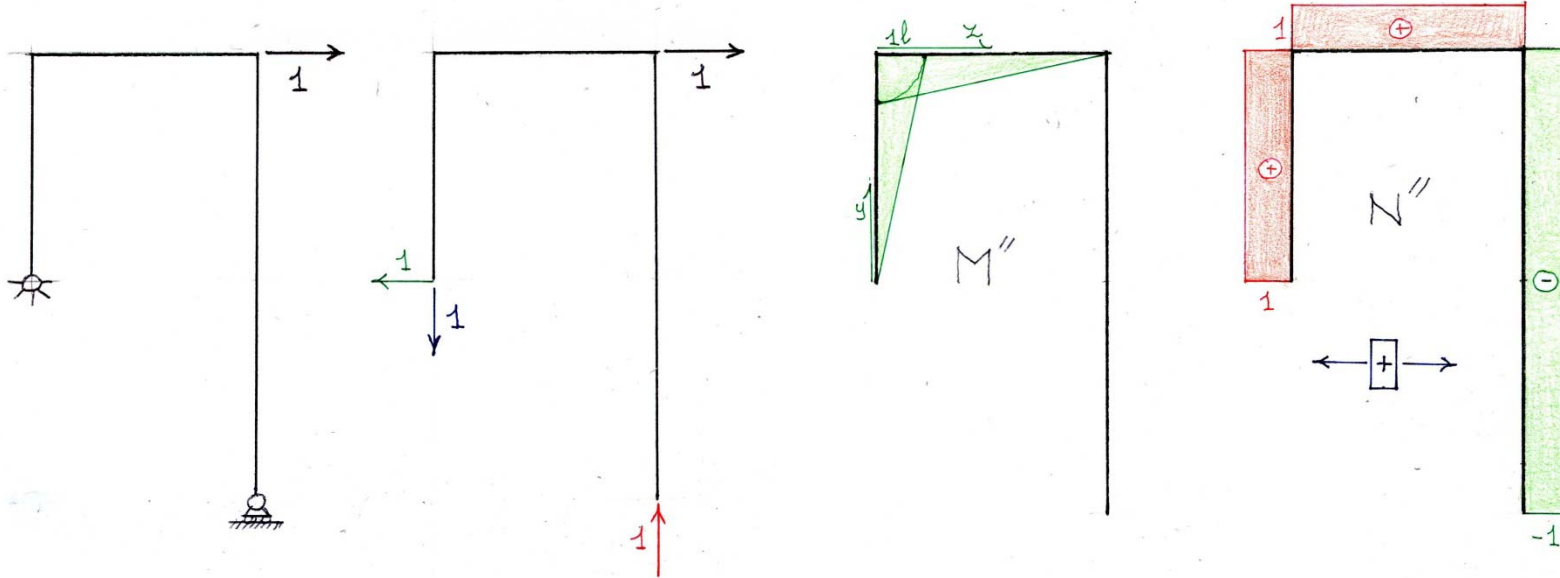


Figure 20, 21, 22 e 23

Si calcola il lavoro virtuale esterno L_e compiuto dalle forze in equilibrio della figura 21 per gli spostamenti della struttura data (figura 14 e 15); si ha:

$$L_e = 1 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times b + 1 \times f.$$

Il lavoro virtuale interno L_i , eguale al lavoro virtuale esterno L_e , è compiuto dal momento flettente M'' della condizione equilibrata (figura 22) per le deformazioni generalizzate

flessionali $d\varphi$ della struttura data e dall'azione assiale N'' della condizione equilibrata (figura 23) per le deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$ della struttura data:

$$L_e = L_i$$
$$L_i = \int (M'' d\varphi + N'' d\varepsilon) = 1f - 1b$$

Ricordando che a questo punto è noto il valore dell'incognita iperstatica:

$$\bar{X} = -\frac{3}{1b} (a+b) \frac{EI}{l^3}$$

si sviluppano i vari termini, sostituendo le espressioni di $d\varphi$ e di $d\varepsilon$, sempre nell'ipotesi che EI ed EA siano costanti lungo la linea d'asse.

$$\int M'' d\varphi = \int M'' \frac{\bar{X} M'}{EI} ds$$

$$\int N'' d\varepsilon = \int N'' \frac{\bar{X} N'}{EA} ds$$

In dettaglio si ha allora quanto segue.

$$f = b + \bar{X} \left[\frac{1}{EI} \int M'' M' ds + \frac{1}{EA} \int N'' N' ds \right]$$

I vari termini che qui compaiono sono ottenuti nel seguito:

$$\int M'' M' ds = \int_0^l -y^2 dy + \int_0^l (l-x)(-l-x) dx =$$

$$= -l^3$$

$$\int N'' N' ds = \int_0^l 1 dy + \int_0^l (-1) dx + \int_0^{2l} 1 du = 2l$$

Sempre nell'ipotesi che le travi sono snelle, ossia $l/\rho > 10$, i termini che dipendono dalla deformabilità estensionale sono trascurabili rispetto a quelli che dipendono dalla deformabilità flessionale.

$$f = b + \frac{\bar{x}}{EI} \int M'' M' ds$$

Introducendo i valori sopra riportati si ottiene finalmente:

$$f = b + \frac{-3}{16} (a+b) \frac{EI}{l^3} \frac{1}{EI} (-l^3) =$$
$$= b + \frac{3}{16} (a+b)$$

Esempio 3

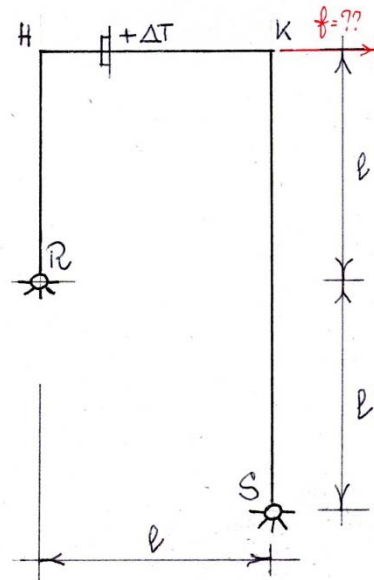


Figura 24

Calcolare la componente orizzontale f dello spostamento del punto K per effetto della variazione termica uniforme ΔT sul solo traverso HK.

Il calcolo di una componente di spostamento di una travatura mediante il metodo dei lavori virtuali richiede la conoscenza delle deformazioni generalizzate della stessa; nel caso di una travatura iperstatica per determinare tali deformazioni generalizzate è necessario conoscere preliminarmente le incognite iperstatiche.

Si mette in evidenza l'incognita iperstatica (figura 25).

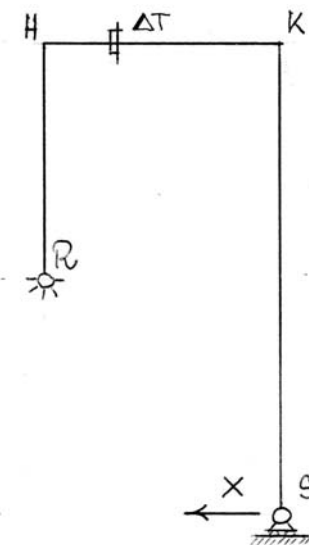


Figura 25

Si calcolano, a meno del valore incognito dell'iperstatica, le deformazioni generalizzate della travatura data, somma di quelle elastiche (dovute alle azioni interne) e di quelle termiche (nel caso specifico ci si limita alle deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ ed estensionali $d\varepsilon$).

A questo scopo si determinano, per effetto della sola incognita iperstatica X posta eguale ad 1 (figura 26), le reazioni vincolari (figura 27), il diagramma del momento flettente M' (riportato dalla parte delle fibre tese in figura 28) ed il diagramma dell'azione assiale N' (figura 29).

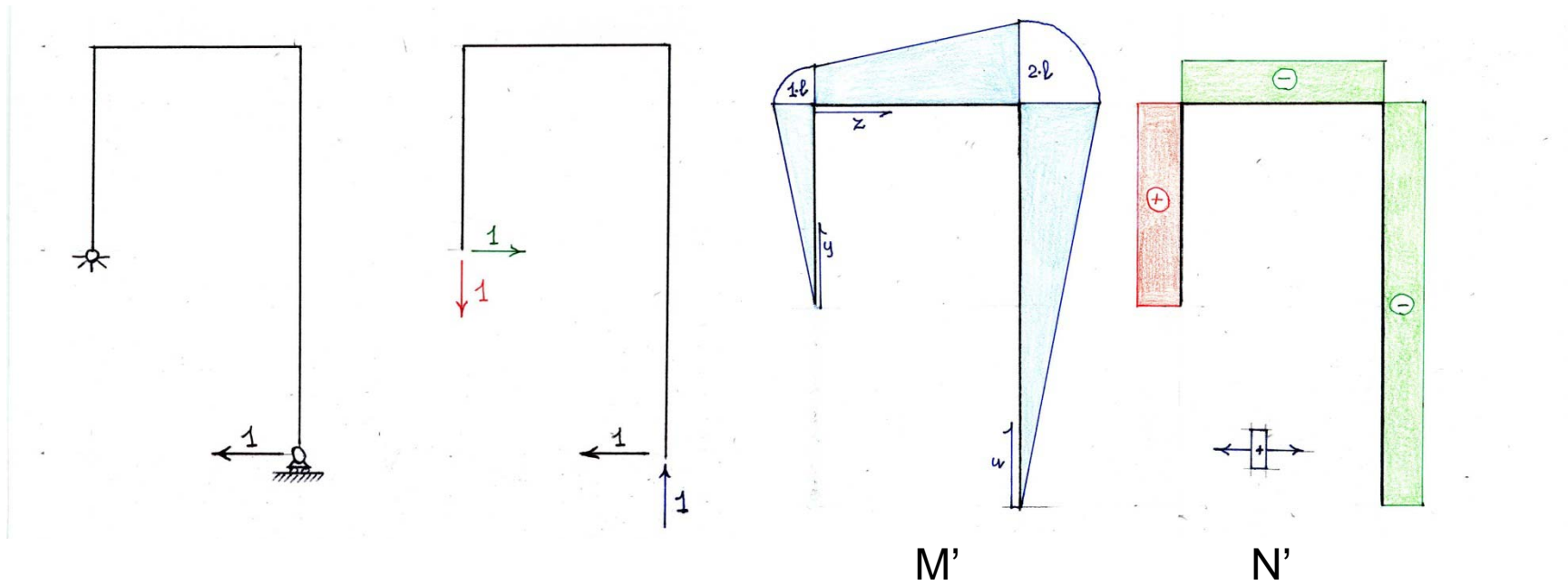


Figure 26, 27, 28 e 29

Le azioni interne totali risultano dunque: $M = X M'$, $N = X N'$.

Le deformazioni generalizzate sono:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds = \frac{X M'}{EI} ds$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_t = \frac{N}{EA} ds + \alpha \Delta T ds = \left(\frac{XN'}{EA} + \alpha \Delta T \right) ds$$

Si osserva che, nel caso specifico, le variazioni termiche influenzano le sole deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$.

Ai fini del calcolo del valore dell'incognita iperstatica lo scorrimento del carrello S (figura 25) dovuto alla incognita iperstatica X ed alla variazione termica uniforme ΔT sul traverso HK deve essere nullo.

Per determinare lo scorrimento del carrello S col metodo dei lavori virtuali si adotta la situazione equilibrata delle figure 26 e 27, con le relative azioni interne M' ed N' .

Si calcola il lavoro virtuale esterno L_e compiuto dalle forze in equilibrio della figura 27 per gli spostamenti della struttura data (figure 24 e 25); si ha:

$$L_e = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 0.$$

Il lavoro virtuale interno L_i , eguale al lavoro virtuale esterno L_e , è compiuto dal momento flettente M' della condizione equilibrata (figura 28) per le deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ della struttura data e dall'azione assiale N' della condizione equilibrata (figura 29) per le deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$ della struttura data. Si ha:

$$L_i = \int (M' d\varphi + N' d\varepsilon)$$

Sostituendo le espressioni di $d\varphi$ e di $d\varepsilon$, i due termini che costituiscono il lavoro interno, nell'ipotesi che EI ed EA siano costanti lungo la linea d'asse, diventano:

$$\int M' d\varphi = \int \frac{X(M')^2}{EI} ds = \frac{X}{EI} \int (M')^2 ds$$

$$\int N' d\varepsilon = \int N' \left(\frac{X N'}{EA} + \alpha \Delta T \right) ds = \frac{X}{EA} \int (N')^2 ds + \int N' \alpha \Delta T ds$$

Eguagliando lavoro esterno L_e e lavoro interno L_i si ottiene l'equazione che fornisce l'incognita iperstatica:

$$0 = X \left\{ \frac{1}{EI} \int (M')^2 ds + \frac{1}{EA} \int (N')^2 ds \right\} + \int N' \alpha \Delta T ds$$

Dall'esempio 1 precedente si ha:

$$\int (M')^2 ds = \frac{16}{3} l^3 \quad \int (N')^2 ds = 4l$$

Inoltre:

$$\int N' \alpha \Delta T ds = -\alpha \Delta T l$$

e l'equazione assume la forma:

$$\frac{\alpha l}{E} \left(\frac{16}{3} \frac{l^2}{I} + \frac{4}{A} \right) - \alpha \Delta T l = 0$$

$$\frac{\alpha l}{EA} \left(\frac{16}{3} \frac{l^2}{I} + 4 \right) = \alpha \Delta T l$$

Per le travi snelle il rapporto $l/\rho > 10$; pertanto si può trascurare il termine

$$\frac{4l}{EA} \quad \text{rispetto al termine} \quad \frac{16l^3}{EI} .$$

L'incognita iperstatica risulta dunque:

$$\bar{X} = \frac{3}{16} \frac{\alpha \Delta T E I}{l^2}$$

Per la determinazione della componente di spostamento cercata si adotta la condizione di carico indicata in figura 30. In figura 31 sono riportate le reazioni vincolari e nelle figure 32 e 33 sono rappresentati i diagrammi del momento flettente M'' e dell'azione assiale N'' .

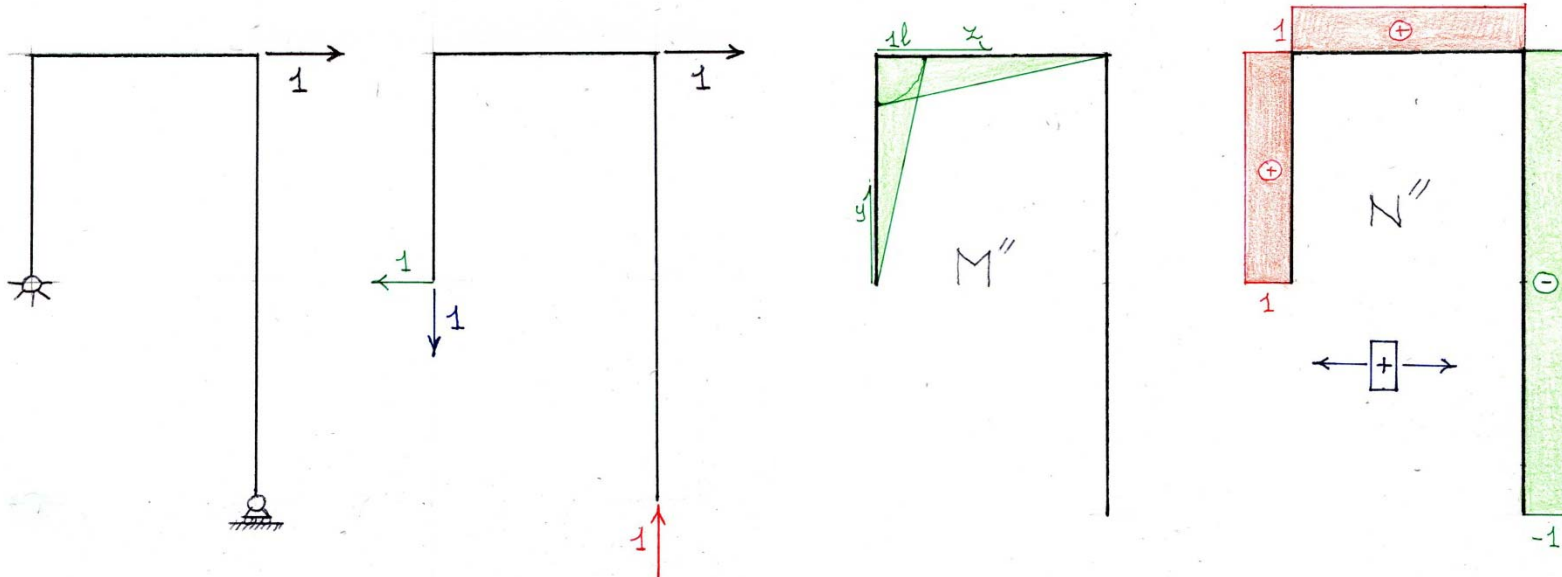


Figure 30, 31, 32 e 33

Si calcola il lavoro virtuale esterno L_e compiuto dalle forze in equilibrio della figura 31 per gli spostamenti della struttura data (figura 24 e 25); si ha:

$$L_e = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times f.$$

Il lavoro virtuale interno L_i , eguale al lavoro virtuale esterno L_e , è compiuto dal momento flettente M'' della condizione equilibrata (figura 32) per le deformazioni generalizzate flessionali $d\varphi$ della struttura data e dall'azione assiale N'' della condizione equilibrata (figura 33) per le deformazioni generalizzate estensionali $d\varepsilon$ della struttura data:

$$L_e = L_i$$
$$L_i = \int (M'' d\varphi + N'' d\varepsilon) = 1 f$$

Ricordando che a questo punto è noto il valore dell'incognita iperstatica:

$$\bar{X} = \frac{3}{16} \frac{\alpha \Delta T E I}{l^2}$$

si sviluppano i vari termini, sostituendo le espressioni di $d\varphi$ e di $d\varepsilon$, sempre nell'ipotesi che EI ed EA siano costanti lungo la linea d'asse.

$$\int M'' d\varphi = \int M'' \frac{\bar{X} M'}{EI} ds$$

$$\int N'' d\varepsilon = \int N'' \left(\frac{\bar{X} N'}{EA} + \alpha \Delta T \right) ds$$

In dettaglio si ha allora quanto segue.

$$\delta = \bar{X} \left\{ \frac{1}{EI} \int M'' M' ds + \frac{1}{EA} \int N'' N' ds \right\} + \int N'' \alpha \Delta T ds$$

I vari termini che qui compaiono sono ottenuti nel seguito:

$$\int M'' M' ds = \int_0^l -y^2 dy + \int_0^l (l-x)(-l-x) dx =$$

$$= -l^3$$

$$\int N'' N' ds = \int_0^l 1 dy + \int_0^l (-1) dx + \int_0^{2l} 1 du = 2l$$

$$\int N'' \alpha \Delta T ds = \int_0^l 1 \alpha \Delta T ds = \alpha \Delta T l$$

Sempre nell'ipotesi che le travi sono snelle, ossia $l/\rho > 10$, i termini che dipendono dalla deformabilità estensionale elastica sono trascurabili rispetto a quelli che dipendono dalla deformabilità flessionale.

$$f = \int N'' \alpha \Delta T ds + \frac{\bar{X}}{EI} \int M'' M' ds$$

Introducendo i valori sopra riportati si ottiene finalmente:

$$\frac{3}{16} \frac{\alpha \Delta T EI}{l^2} \left(-\frac{l^3}{EI} \right) + \alpha \Delta T l = f$$

$$\left(-\frac{3}{16} + 1 \right) \alpha \Delta T l = \frac{13}{16} \alpha \Delta T l = f$$