Dinamica dei sistemi

SISTEMI DI PUNTI

Centro di Massa (CM)

- Dati n corpi approssimabili come punti materiali, il CM è identificato dal seguente vettore :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Velocità del CM

- Velocità del CM è la derivata del vettore che ne individua la posizione

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

- <u>La QM di un sistema è uguale alla QM del CM</u>, considerato come un punto materiale di massa *M* e velocita` ***v***$_{CM}$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

Forze interne ed esterne

- Per ogni punto *i* del sistema diciamo $\boldsymbol{F}_i$ la forza totale agente sul punto
- Questa è la somma di due termini, uno dovuto alle forze interne al sistema e uno dovuto a quelle esterne

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,I} + \vec{F}_i^{\,E}$$

- Sia le forze interne che esterne possono essere conservative o dissipative

Risultante delle forze interne

- La risultante di tutte le forze interne di un sistema e` nulla

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,I} = 0$$

- Infatti, ad una forza agente sul punto *i* e dovuta al punto *j*

$$\vec{f}_{ij}^{\,I}$$

- corrisponde la forza uguale e opposta

$$\vec{f}_{ji}^{\,I}$$

- La risultante della coppia è zero e quindi la somma delle risultanti è 0

Accelerazione del CM

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

- 2ª legge della dinamica per il punto *i*

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,I} + \vec{F}_i^{\,E}$$

- e quindi

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{\,I} + \vec{F}_i^{\,E} \right) = \vec{F}^{\,I} + \vec{F}^{\,E} = \vec{F}^{\,E}$$

Prima equazione della dinamica dei sistemi

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\,E}$$

- Il CM si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

Conservazione della QM

- Se il sistema e` isolato, o le forze esterne hanno risultante nulla (urti)

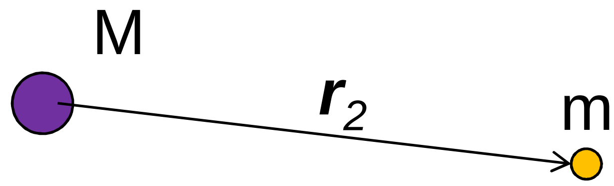
$$\vec{F}^{E} = 0 \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \vec{P} = const.$$

- CM si muove di moto rettilineo uniforme

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M}$$

- Attenzione: la QM dei singoli punti può cambiare nel tempo, <u>è la loro somma</u> che rimane costante

CM di due corpi puntiformi



- Siano *M* e *m* le masse

- Prendiamo come origine la posizione di uno dei due corpi (l'1 p.e.) allora $\boldsymbol{r}_M$=0

$$\vec{r}_{CM} = \frac{M\vec{r}_M + m\vec{r}_m}{M+m} = \frac{m}{M+m}\vec{r}_m$$

- Quindi il CM giace sulla congiungente dei due punti e la sua distanza da essi è inversamente proporzionale alle loro masse

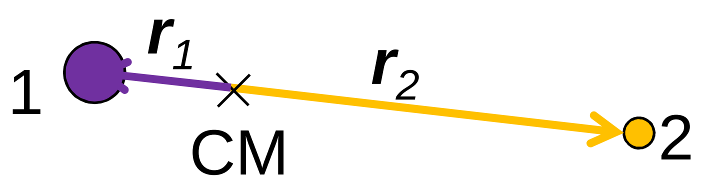
CM di due corpi puntiformi

- Introduciamo

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- Allora, i vettori posizione dei due corpi rispetto al CM si possono scrivere

$$\vec{r}_1 = -\frac{m}{M+m}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \frac{M}{M+m}\vec{r}$$



GRANDEZZE MECCANICHE DEI SISTEMI

Vettori momento

- Il momento di una grandezza vettoriale ***w*** è definito come il prodotto vettoriale

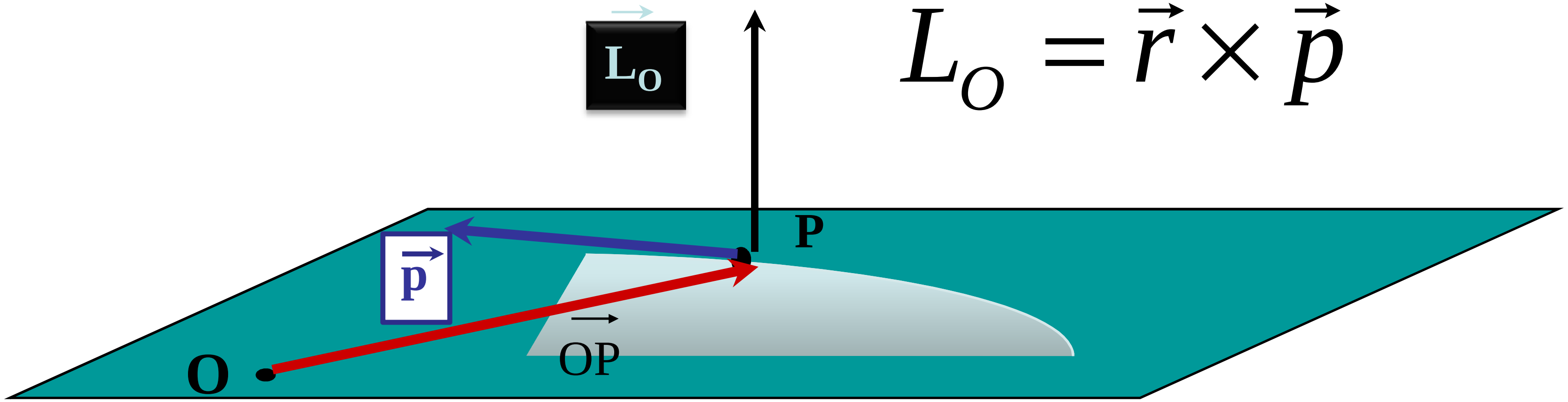
$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{w}$$

- Il punto rispetto al quale si pone l'origine del vettore ***r*** è detto **polo**
- Tale punto non necessariamente dev'essere fermo

Momento angolare

- È il momento del vettore quantita` di moto del punto materiale:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

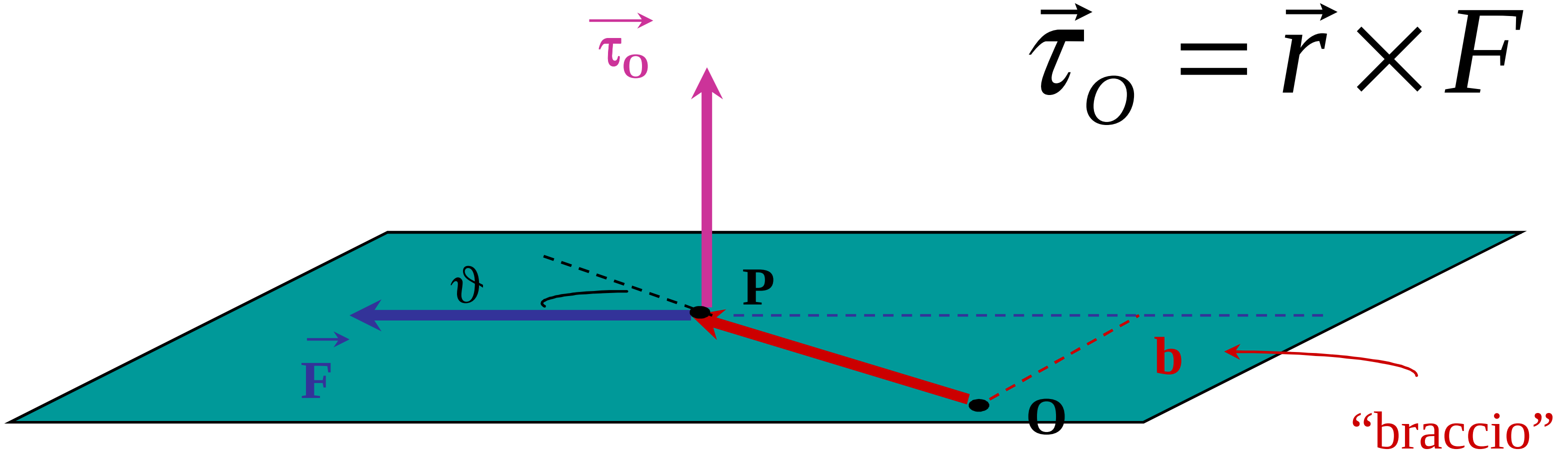


- Dimensioni fisiche: $[L] = L[p] = L^2 T^{-1} M$
- Unità di misura: $kg \cdot m^2 / s = N \cdot m \cdot s$

Momento di forza

- È il momento del vettore forza agente sul punto materiale:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



- Dimensioni fisiche: $[\tau] = L[F] = L^2 T^{-2} M$
- Unita` di misura: $kg \cdot m^2 / s^2 = N \cdot m$

Momento risultante

- Se la forza complessiva ***R*** è la risultante di piu` forze applicate tutte allo stesso punto materiale:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \left(\vec{r} \times \vec{F}_i \right) = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{R}$$

- il momento risultante (cioe` la somma dei momenti di tutte le forze) è uguale al momento della risultante (cioe` al momento della somma di tutte le forze)

Teorema del momento angolare (o seconda equazione della dinamica dei sistemi)

- Dato che esiste una relazione tra quantità di moto di un punto materiale e forza risultante ad essi applicata, esisterà necessariamente una relazione anche tra i loro momenti

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{\tau}_Q \qquad \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q$$

Prodotto di vettori //

Conservazione del Momento Angolare

- Se il momento di forza e` nullo (rispetto al polo scelto) allora il momento angolare si conserva (rispetto allo stesso polo) e viceversa

$$\vec{\tau}_Q = 0 \qquad \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = 0 \qquad \vec{L}_Q = const.$$

Pendolo semplice con **L**

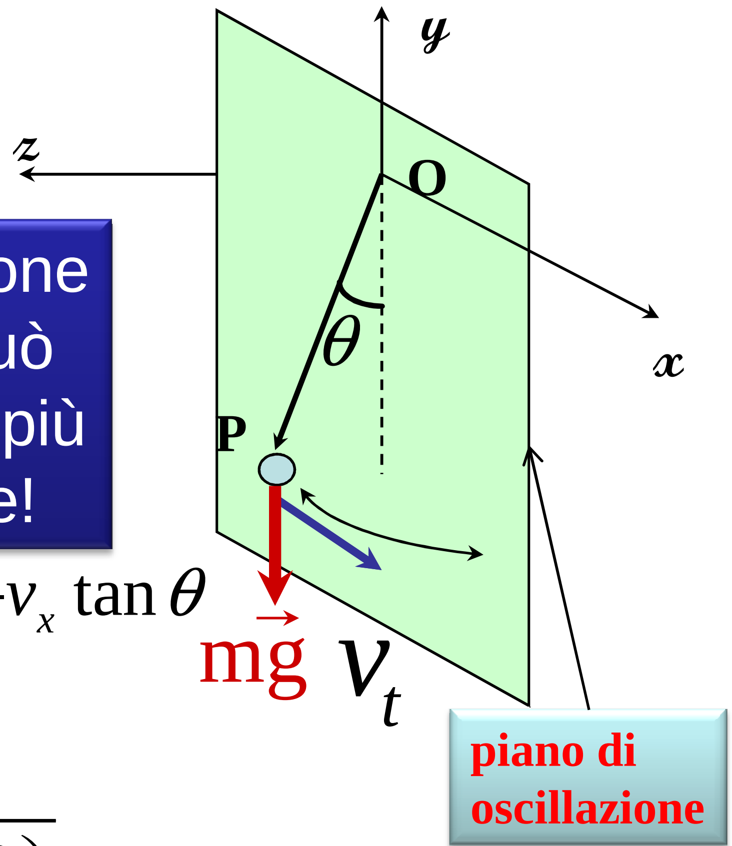
$$\overrightarrow{L_O} \equiv \overrightarrow{OP} \times m\vec{v}$$

$$\overrightarrow{\tau_o} \equiv \overrightarrow{OP} \times m\vec{g}$$

$$\overrightarrow{OP} = \left(-l\sin\theta, -l\cos\theta, 0\right)$$

$$\vec{v} = \left(v_x, v_y, 0\right)$$

Dimostrazione lunga! Si può fare anche più brevemente!



$$\overrightarrow{OP}\vec{v} = 0 \Rightarrow -\sin\theta v_x - \cos\theta v_y = 0 \Rightarrow v_y = -v_x \tan\theta$$

$$\vec{v} = v_x\left(1, -\tan\theta, 0\right) \Rightarrow$$

$$|v| = v_x\sqrt{\left(1+\tan^2\theta\right)} = v_x\sqrt{\left(1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2\right)} \cong v_x$$

$$|v| = l\dot{\theta} \Rightarrow v_x \cong l\dot{\theta}$$

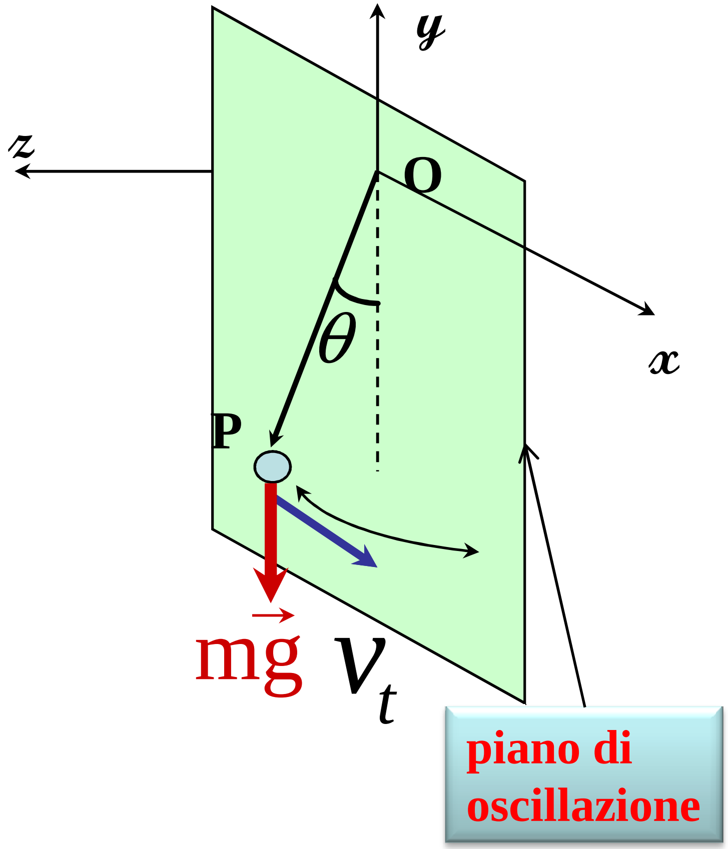
$$\vec{v} = \left(v_x, v_y, 0\right) = \left(l\dot{\theta}, 0, 0\right)$$

Pendolo semplice con **L**

$$\overrightarrow{L_O} \equiv \overrightarrow{OP} \times m\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = (l\sin\theta, l\cos\theta, 0)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, 0) = (l\dot{\theta}, 0, 0)$$



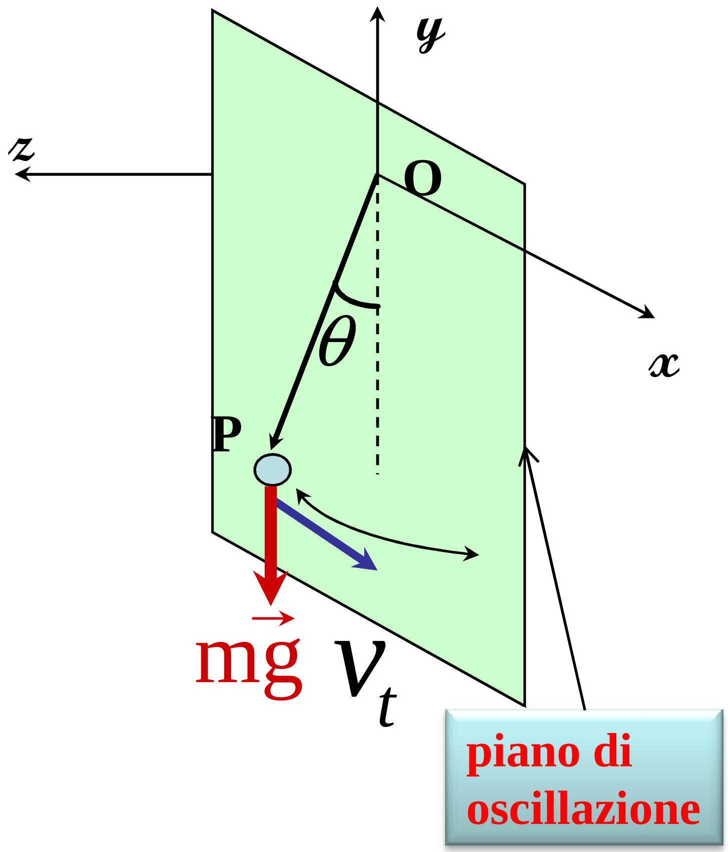
$$\overrightarrow{L_O} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ l\sin\theta & l\cos\theta & 0 \\ ml\dot{\theta} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\left(l\cos\theta\, m l\dot{\theta}\right)\hat{k} \cong -ml^2\dot{\theta}\,\hat{k}$$

Pendolo semplice con **L**

$$\vec{\tau}_O \equiv \vec{OP} \times m\vec{g}$$

$$\vec{OP} = \left(-l\sin\theta, -l\cos\theta, 0\right)$$

$$\vec{g} = \left(0, -g, 0\right)$$

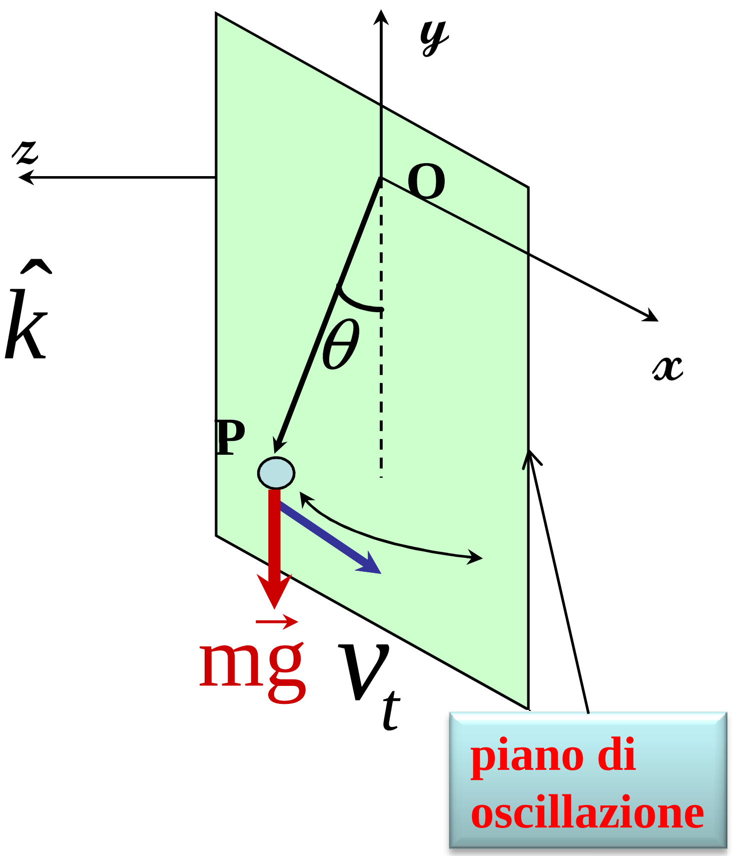


$$\vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -l\sin\theta & -l\cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = \left(mgl\sin\theta\right)\hat{k} \cong \left(mgl\theta\right)\hat{k}$$

Pendolo semplice con **L**

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-ml^2\dot{\theta}\right)\hat{k} = -ml^2\ddot{\theta}\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_Q = \left(mgl\theta\right)\hat{k}$$

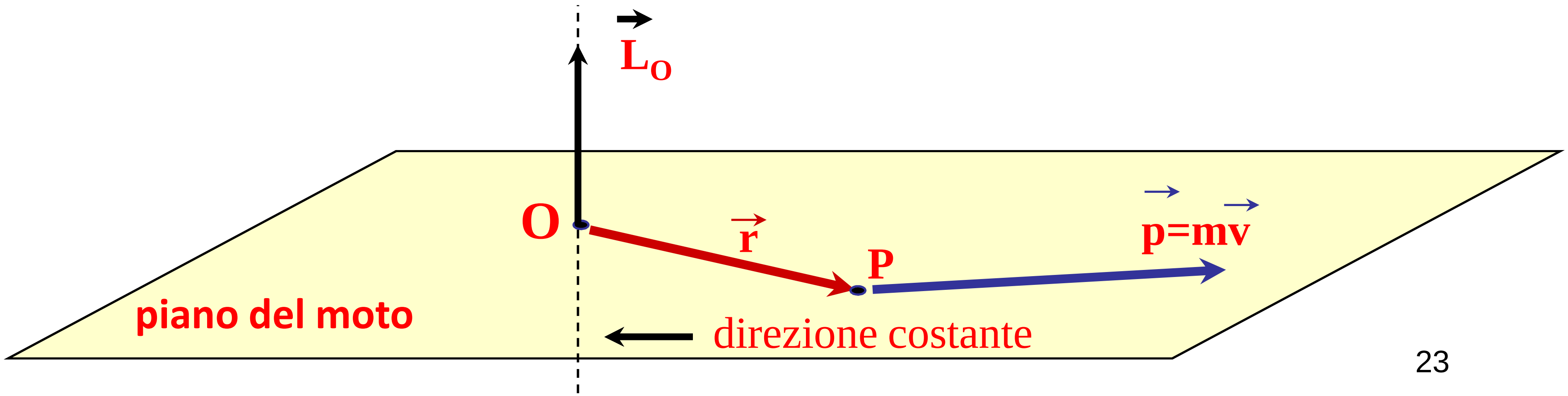


$$-ml^2\ddot{\theta} = lmg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \cong -\frac{g}{l}\theta$$

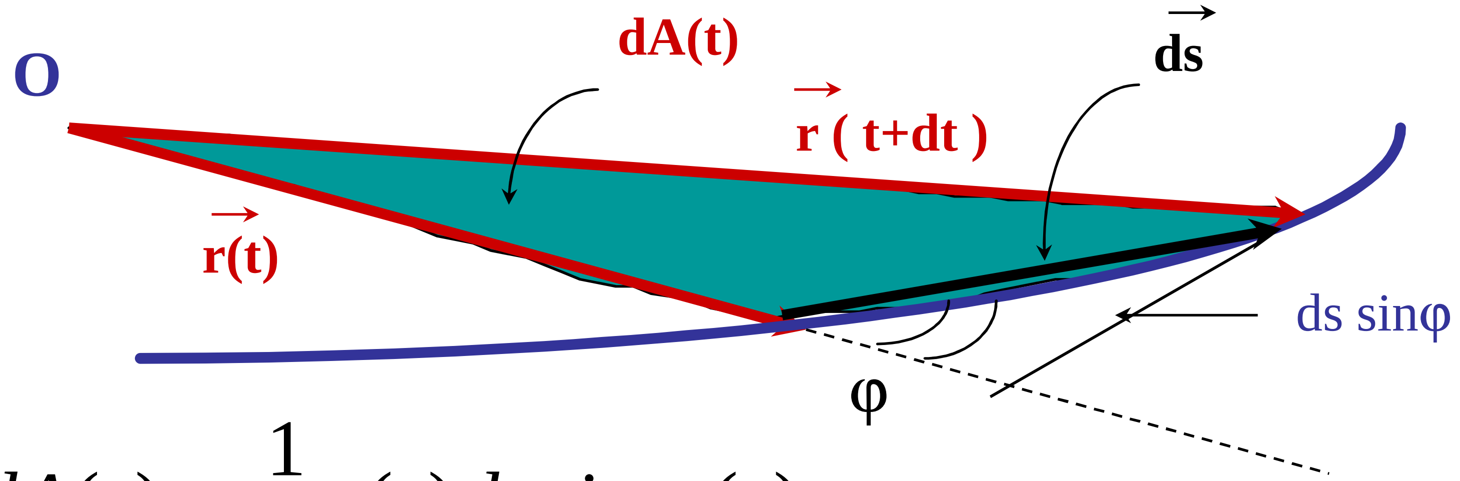
Leggi di Keplero con **L**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}_g(\vec{r}) = \vec{r} \times \left(-G \frac{M_S M_T}{(r_{TS})^2} \right) \hat{r} = 0$$

- Il moto avviene sempre sullo stesso piano



Leggi di Keplero con **L**



$$dA(t) = \frac{1}{2} r(t) ds \sin\varphi(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} r(t) \frac{ds}{dt} \sin\varphi(t) = \frac{1}{2} r(t) v(t) \sin\varphi(t)$$

$$L_O = r(t) m v(t) \sin\varphi(t) \qquad \boxed{\frac{dA(t)}{dt} = \frac{L_O}{2m} = k}$$

APPROFONDIMENTI

Centro di massa in un corpo continuo

- Riprendiamo la definizione di CM

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

- Per un corpo con distribuzione continua di materia

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{corpo} \vec{r}\, dm}{\int_{corpo} dm} = \frac{1}{M} \int_{corpo} \vec{r}\, dm$$

Centro di massa in un corpo continuo

- Ove abbiamo indicato con *M* la massa totale del corpo $M = \int_{corpo} dm$
- Le masse infinitesime sono contenute in volumi infinitesimi $dm = \rho dV$
- Se la <u>densità è uniforme</u>, gli integrali si riducono a integrali puramente geometrici

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{corpo} \vec{r}\, dm}{\int_{corpo} dm} = \frac{\int_{corpo} \vec{r}\, \delta dV}{\int_{corpo} \delta dV} = \frac{\delta \int_{corpo} \vec{r}\, dV}{\delta \int_{corpo} dV} = \frac{\int_{corpo} \vec{r}\, dV}{\int_{corpo} dV} = \frac{1}{V} \int_{corpo} \vec{r}\, dV$$

TEOREMI DEI SISTEMI A PIÙ PARTICELLE

Momento angolare sistemi a più particelle

- Abbiamo visto nel caso di un solo punto materiale, che, se il polo è fisso e il sistema di riferimento e` inerziale, il teorema del momento angolare e`

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

Teorema del momento angolare

- Generalizziamo questo teorema al caso di un <u>sistema di piu` particelle e polo fisso</u>
- Deriviamo rispetto al tempo l'espressione:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

- Otteniamo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} =$$

$$= \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 + \vec{\tau}_O$$

- Cioè vale ancora

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

Teorema del momento angolare

- Generalizziamo ora al caso di un sistema di piu` particelle e di un polo <u>mobile</u>
- Deriviamo rispetto al tempo l'equazione che lega il MA calcolato rispetto ad un polo fisso O e un polo mobile Q

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times \vec{P}$$

- Otteniamo

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_Q \times \vec{P}\right) = \vec{\tau}_O - \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{P} - \vec{r}_Q \times \frac{d\vec{P}}{dt} =$$

$$= \vec{\tau}_O - \vec{v}_Q \times \vec{P} - \vec{r}_Q \times \vec{F} \quad = \left(\vec{\tau}_O - \vec{r}_Q \times \vec{F} \quad\right) - \vec{v}_Q \times \vec{P}$$

Teorema del momento angolare

- Ricordando che l'espressione tra parentesi è il momento rispetto al polo mobile Q, otteniamo

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q - \vec{v}_Q \times \vec{P}$$

- Espressione che <u>differisce</u> per la presenza del secondo termine <u>da quella trovata per il polo fisso</u>
- Ovviamente si ritrova quella equazione se anche Q è fisso: in tal caso il secondo termine è nullo

Teorema del momento angolare

- Esistono però altri casi in cui le equazioni per il polo mobile e per il polo fisso sono uguali
- Il caso più importante è quello in cui il polo coincide con il CM del sistema, in tal caso

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM} - \vec{v}_{CM} \times \vec{P}$$

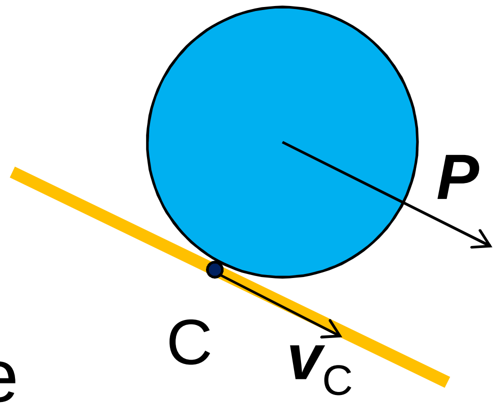
- E poiché $\boldsymbol{v}_{CM}$ e $\boldsymbol{P}$ sono proporzionali, segue

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}}$$

Teorema del momento angolare

- Quando il polo coincide con il punto di contatto C tra una ruota che si muove (slittando o rotolando) e una superficie di appoggio

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\tau}_C - \vec{v}_C \times \vec{P}$$



- Poiché $\boldsymbol{v}_C$ e $\boldsymbol{P}$ sono paralleli, segue

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\tau}_C$$

Teorema del momento angolare

- Abbiamo dimostrato il notevole teorema: la <u>derivata del momento angolare è uguale al momento delle forze (esterne)</u> se come polo usiamo
  - un <u>punto fisso</u> in un sistema inerziale
  - oppure <u>il CM</u> del sistema (indipendentemente dal fatto che questo sia fisso o sia mobile e <u>qualunque</u> sia il suo moto)

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}$$

Seconda equazione della dinamica dei sistemi

- Se il polo è fisso o è il CM

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q^{\,E}$$

- Questa e` la seconda equazione della dinamica dei sistemi
- O seconda equazione cardinale della meccanica

Conservazione di ***L***

- Se vale l'equazione $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O^{\,E}$

- e se il momento delle forze esterne e` nullo, allora il momento angolare si conserva

$$\vec{\tau}_O^{\,E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{L}_O = const.$$

- Si nota che:
  - La conservazione puo` valere anche solo in alcune direzioni (quelle in cui la componente di $\tau$ e` nulla)
  - A seconda della situazione fisica, τ puo` annullarsi qualunque sia il polo, oppure solo per poli scelti opportunamente

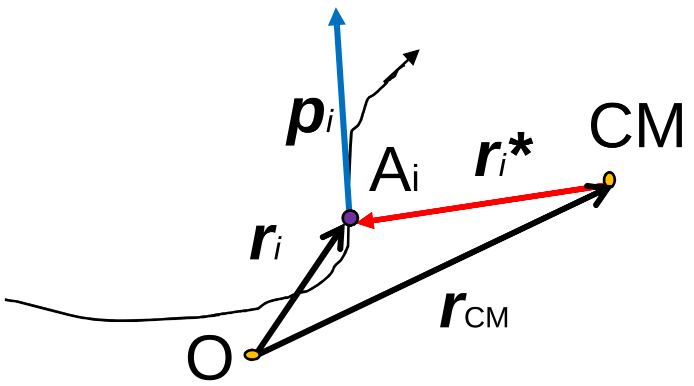
Approfondimento

TEOREMI DI KOENIG E SULL'ENERGIA DEI SISTEMI DI PARTICELLE

Caratteristiche del sistema di riferimento del CM

- Ha origine nel CM
- Gli assi sono sempre paralleli agli assi di un sistema inerziale
- In generale <u>non e` inerziale</u>
- La posizione di un punto è:

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$$



- Derivando questa relazione troviamo la velocita`

$$\vec{v}_i^{\,*} = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$

Sistema di riferimento del CM

- La posizione e la velocita` del CM nel SCM sono, ovviamente,

$$\vec{r}^{\,*}_{CM} = \vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM} = 0 \qquad \vec{v}^{\,*}_{CM} = \vec{v}_{CM} - \vec{v}_{CM} = 0$$

- Ricordando la definizione di CM, valida in ogni SdR, abbiamo anche

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} = M\vec{r}^{\,*}_{CM} = 0 \qquad \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,*} = M\vec{v}^{\,*}_{CM} = 0$$

- La seconda equazione stabilisce che la QM totale del sistema e` nulla se misurata nel SCM

$$\vec{P}^{*} = M\vec{v}^{\,*}_{CM} = 0$$

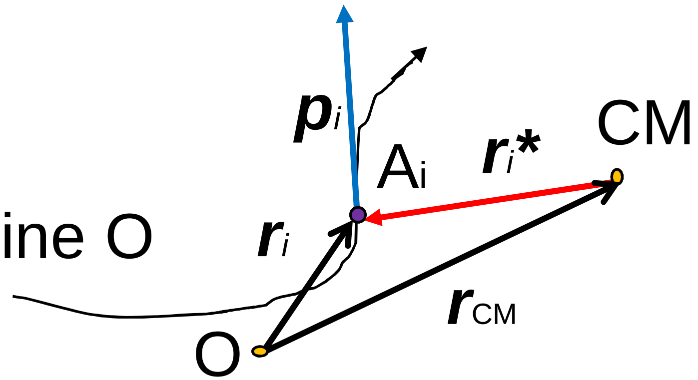
Teoremi di Koenig

- 1º teorema: fornisce una relazione tra il valore del momento angolare in un sistema inerziale e nel sistema del CM

- 2º teorema: fornisce una relazione tra il valore dell'energia cinetica in un sistema inerziale e nel sistema del CM

1º teorema di Koenig

- Confrontiamo **L** calcolato
  - nel SCM con polo nel CM
  - nel SdR inerziale con polo nell'origine O



$$\vec{L}^*_{(CM)} = \sum_i \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^* = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \vec{L}_{(O)} - \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i - \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$$

1º teorema di Koenig

- Il 2º e 4º termine sono uguali e opposti; il 3º termine e` il MA del CM nel SdR inerziale

$$\vec{L}^*_{(CM)} = \vec{L}_{(O)} - M\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} = \vec{L}_{(O)} - \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \vec{L}_{(O)} - \vec{L}_{(O)CM}$$

- La relazione puo` essere letta anche

$$\vec{L}_{(O)} = \vec{L}_{(O)CM} + \vec{L}^*_{(CM)}$$

- **L** di un corpo in un SdR inerziale è uguale a **L**del sistema rispetto al CM, calcolato nel SCM più **L** del CM nel sistema inerziale

2º teorema di Koenig

- Calcoliamo ora l'energia cinetica

$$K^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}\right)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{CM} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM}^2 =$$

$$= K - \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_{CM}^2 =$$

$$= K - M \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 = K - \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$$

2º teorema di Koenig

- il 2º termine è l'energia cinetica del CM nel SdR inerziale

$$K^{*} = K - K_{CM}$$

- La relazione può essere letta anche

$$K = K_{CM} + K^{*}$$

- L'energia cinetica di un corpo in un SdR inerziale e` uguale all' EC del sistema calcolata nel SCM, piu` l'EC del CM nel sistema inerziale

Teoremi sull'energia

Teorema di <u>conservazione dell'energia meccanica</u> *E* per un corpo esteso

$$\Delta(K+U) \equiv \Delta E = 0$$

Forze conservative

$$\Delta(K+U) = \Delta E = W_{nc}$$

Forze non conservative