

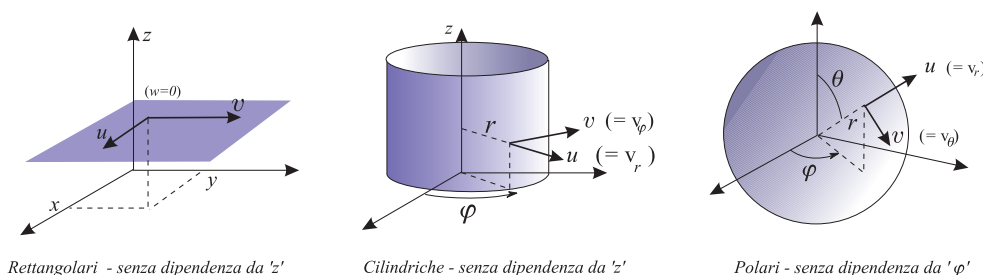
# CAPITOLO V

## LINEE DI CORRENTE, FLUSSO POTENZIALE E VORTICITÀ

### 5.1 Introduzione

Lo studio dei fluidi incompressibili viene spesso facilitato dall' introduzione di alcune funzioni ausiliarie che verranno descritte in questo Capitolo.

A seconda della simmetria del problema useremo di volta in volta coordinate cartesiane rettangolari, cilindriche o sferiche, sopprimendo per semplicità almeno una delle componenti della velocità (flussi uni- o bi-dimensionali).



Rettangolari - senza dipendenza da 'z'

Cilindriche - senza dipendenza da 'z'

Polari - senza dipendenza da 'phi'

**Figura 5.1** Coordinate rettangolari, cilindriche e polari in flussi bidimensionali.

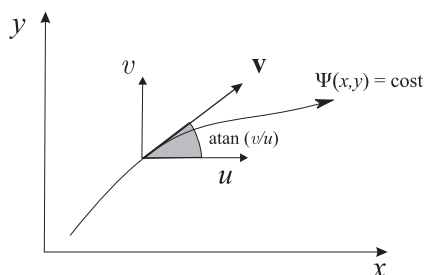
Per comodità riportiamo qui sotto la forma dell'equazione di continuità nei tre principali riferimenti (v. Figura 5.1).

$$\text{coordinate cartesiane: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\text{coordinate cilindriche: } \frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\text{coordinate sferiche: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (5.1.3)$$

## 5.2 Funzione di corrente



**Figura 5.2** La direzione della velocità è tangente alle linee di flusso.

Un'importante caratteristica dei fluidi incompruibili è data dalla possibilità di definire una funzione scalare  $\Psi(x, y)$  della sola posizione legata alle componenti della velocità dalle equazioni

$$u = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \quad (5.2.1a)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} . \quad (5.2.1b)$$

Questa proprietà deriva direttamente dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} . \quad (5.2.2)$$

Possiamo notare, infatti, che la (5.2.2) rappresenta anche la condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale

$$d\Psi = u \, dy - v \, dx \quad (5.2.3)$$

sia esatta. Dalle (5.2.2) e (5.2.3) seguono evidentemente le (5.2.1). La funzione scalare

$$\Psi(x, y) = \int (u \, dy - v \, dx) + \Psi_0 , \quad (5.2.4)$$

dove  $\Psi_0$  è una costante arbitraria, prende il nome di *funzione di corrente* o di *flusso* ed è misurabile in  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . Uno dei vantaggi dell'introduzione della funzione di corrente nello studio dei moti bidimensionali è quella di sostituire le due componenti indipendenti della velocità  $u$  e  $v$  con una singola funzione. Il metodo permette anche

di avere una immediata visualizzazione dell'andamento del flusso mediante la rappresentazione grafica delle *linee di corrente*. Queste linee, che possono essere associate alle traiettorie effettive delle particelle di fluido, sono geometricamente definite dall'equazione

$$\Psi(x, y) = k, \quad (5.2.5)$$

al variare del parametro costante  $k$ .

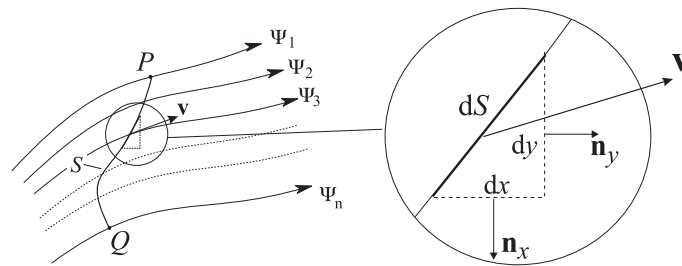
Il valore (arbitrario) assegnato alla costante di integrazione  $\Psi_0$  fissa automaticamente la linea di riferimento convenzionale che ha il valore  $\Psi = 0$ . Lungo le curve  $\Psi = \text{costante}$  si ha

$$0 = d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy, \quad (5.2.6)$$

ossia

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Psi=\text{cost}} = \frac{v}{u}. \quad (5.2.7)$$

La tangente alle linee di corrente coincide dunque con la direzione della velocità istantanea del fluido ( $v$ . Figura 5.2).



**Figura 5.3** Linee di flusso

Le linee di corrente hanno anche un'altra interessante proprietà legata alla portata del flusso. Facendo riferimento alla Figura 5.3 tracciamo una generica curva  $PQ$  che collega due linee qualsiasi  $\Psi_1$  e  $\Psi_n$ . Questa curva identifica una superficie  $S$  che supponiamo abbia uno spessore  $\Delta z$  nella direzione ortogonale al piano del disegno. La quantità di fluido che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo di area  $dS$  di questa superficie è dato da  $(u dy - v dx) \Delta z$ . Integrando sull'intera superficie e dividendo il risultato per  $\Delta z$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\Delta z} &= \int_P^Q (u dy - v dx) = \int_P^Q \left( \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx \right) = \\ &= \int d\Psi = \Psi_n - \Psi_1, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

cioè la portata per unità di spessore attraverso due linee di flusso  $\Psi_1$  e  $\Psi_n$  è eguale alla differenza tra i valori delle rispettive funzioni di corrente, ed è indipendente dalla scelta dei due punti  $P$  e  $Q$  e dalla linea che li unisce. Questo significa che le curve che differiscono tra loro per lo stessa quantità  $\Delta\Psi$  si addensano in zone dove il fluido scorre più velocemente.

Si noti dalla figura che in corrispondenza a valori crescenti di  $\Psi$  verso l'alto (cioè per  $y$  crescenti) si ha un flusso diretto verso sinistra (cioè per  $x$  decrescente), e viceversa. Infine, come regola generale si tenga presente che la derivata di  $\Psi$  in una certa direzione fornisce la componente ortogonale a questa direzione nel verso antiorario.

Per completezza riportiamo le equazioni delle linee di corrente nei riferimenti non cartesiani. Le formule possono essere ricavate con un procedimento analogo al precedente applicato alle equazioni di continuità rispettivamente (5.1.4) e (5.1.7). In coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  e assumendo un flusso bidimensionale con  $v_z = 0$ , le relazioni tra la funzione corrente e le componenti radiale e tangente della velocità sono

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (5.2.9a)$$

$$v_\varphi = -\frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial r}. \quad (5.2.9b)$$

Mentre in un flusso con simmetria sferica e  $v_\varphi = 0$ , le corrispondenti velocità radiali e azimutali nelle coordinate  $(r, \theta, \varphi)$  risultano

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (5.2.10a)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial r}. \quad (5.2.10b)$$

### 5.3 Potenziale di velocità

In certe condizioni la velocità di un fluido può essere espressa come gradiente di una funzione potenziale. Nei flussi bidimensionali stazionari il *potenziale di velocità*  $\Phi(x, y)$  è implicitamente definito dalle equazioni

$$u = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \quad (5.3.1a)$$

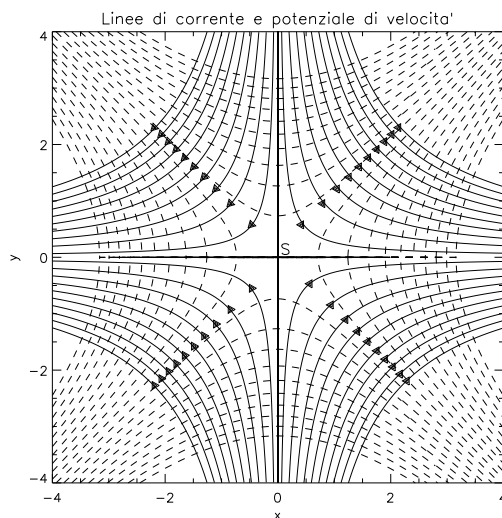
$$v = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}. \quad (5.3.1b)$$

Le (5.3.1) hanno una forma simile alle (5.2.3). Tuttavia, mentre la funzione  $\Psi$  esiste solo per flussi che mantengono la densità costante, il differenziale di  $\Phi$

$$d\Phi = u dx + v dy \quad (5.3.2)$$

è esatto (e quindi il flusso è *potenziale*), solo se è soddisfatta la relazione

$$\omega \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5.3.3)$$



**Figura 5.4** Linee di corrente (curve continue) e di eguale potenziale di velocità (curve tratteggiate) in una configurazione con un punto di stagnazione  $S$  (v. §5.7)

I flussi che soddisfano a questa condizione vengono detti *irrotazionali* per il motivo che sarà chiarito nel paragrafo 5.13.

La pendenza di una linea equipotenziale, lungo la quale  $u dx + v dy = 0$ , è data da

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Phi=\text{cost}} = - \frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y} = - \frac{u}{v}. \quad (5.3.4)$$

Un confronto con la (5.2.5) mostra che queste curve sono in ogni punto ortogonali alle linee di corrente.

Un semplice esempio di flusso incomprimibile irrotazionale, che pertanto soddisfa contemporaneamente ad entrambe le condizioni (5.2.2) e (5.3.3), è illustrato nella Figura 5.4. Questa speciale configurazione presenta un *punto di stagnazione*  $S$  in cui la velocità si annulla e verrà studiato in maggior dettaglio nel paragrafo 5.7.

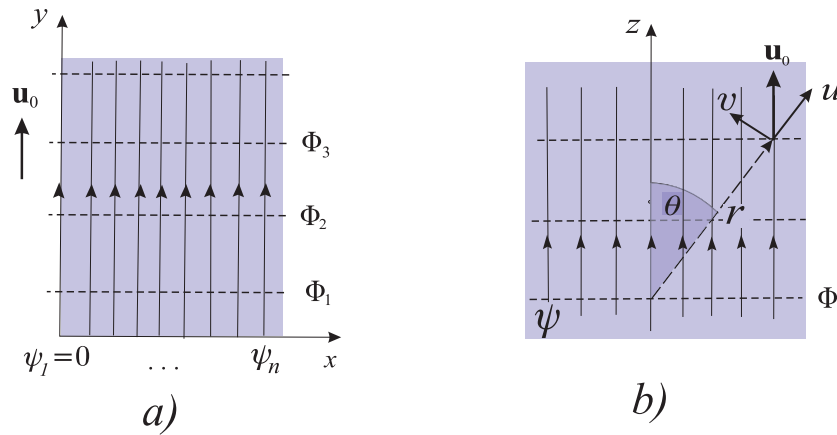
Anche per il potenziale  $\Phi$  riportiamo per comodità le relazioni con le componenti della velocità di flussi bidimensionali con simmetria cilindrica o sferica. In coordinate cilindriche (con  $v_z = 0$ ) si ottiene

$$v_r = \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} \quad (5.3.5a)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} . \quad (5.3.5b)$$

Le medesime espressioni sono valide in un riferimento sferico (con  $v_\varphi = 0$ ), purchè si sostituisca la coordinata angolare  $\varphi$  con quella polare  $\theta$ .

## 5.4 Flusso uniforme



**Figura 5.5** a): Flusso uniforme nella direzione dell'asse  $x$  (coordinate rettangolari). b): flusso uniforme nella direzione  $z$  (coordinate polari).

La configurazione fluida più semplice è formata da un flusso uniforme in cui gli strati scorrono con velocità costante lungo piani paralleli, come è illustrato nella Figura 5.5. In coordinate cartesiane e assumendo che la velocità  $u_0$  del fluido sia diretta lungo l'asse  $y$ , si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u_0 \quad (5.4.1a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (5.4.1b)$$

Integrando le (5.4.1) nella funzione di corrente  $\Psi$  si ottiene

$$\Psi(x, y) = u_0 x + f(y) \quad (5.4.2a)$$

$$\Psi(x, y) = g(x) + \text{cost} \quad (5.4.2b)$$

Il confronto tra queste due soluzioni porta alla seguente espressione

$$\Psi(x, y) = u_0 x, \quad (5.4.3)$$

dove si è assegnato il valore  $\Psi = 0$  alla linea passante per l'origine. In maniera analoga, integrando le (5.4.1) in  $\Phi$  si ricava la funzione potenziale

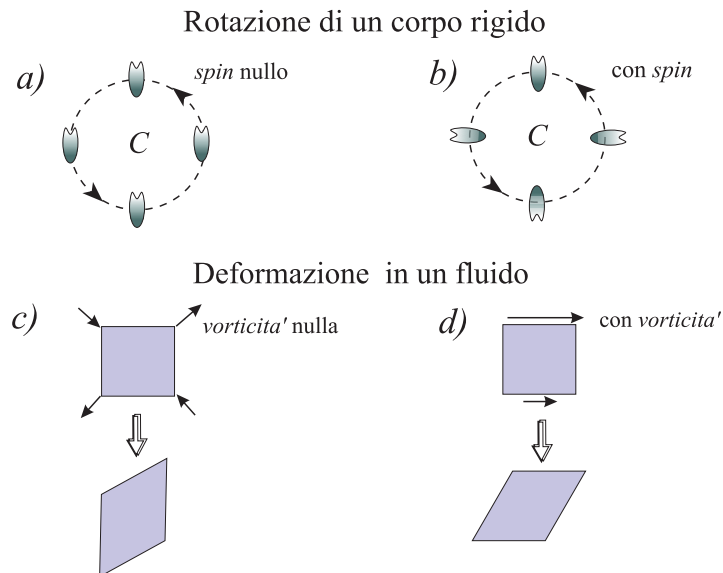
$$\Phi(x, y) = u_0 y. \quad (5.4.4)$$

Possiamo ricavare facilmente anche le funzioni di corrente e potenziale di un flusso uniforme in coordinate sferiche (Figura 5.5b). Si trovano le seguenti espressioni

$$\Psi(r, \theta) = u_0 r \sin \theta \quad (5.4.5)$$

$$\Phi(r, \theta) = u_0 r \cos \theta \quad (5.4.6)$$

## 5.5 Vorticità



**Figura 5.6** *In alto:* traiettoria circolare di un corpo rigido con e senza rotazione intrinseca. *In basso:* deformazione di una porzione di fluido con e senza vorticità.

Come abbiamo visto nel paragrafo 5.3, l'esistenza del potenziale di velocità richiede che la differenza

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5.5.1)$$

sia nulla nell'intera regione occupata dal fluido. La funzione  $\omega$  viene chiamata *vorticità* e costituisce una delle grandezze fondamentali della

teoria dei fluidi essendo legata alle proprietà di rotazione del flusso. In coordinate cilindriche (o sferiche)  $(r, \theta)$  la vorticità è data da

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (5.5.2)$$

con  $u = v_r$  e  $v = v_\theta$ .

Sebbene la definizione di vorticità trovi la sua piena giustificazione nello studio del movimento di fluidi viscosi in tre dimensioni <sup>[1]</sup>, daremo qui alcune delle sue principali proprietà utilizzando flussi bidimensionali.

È innanzitutto opportuno precisare che la relazione tra vorticità e rotazione deve essere intesa come una proprietà *locale* del fluido. Possiamo visualizzare questo importante aspetto ricorrendo ad una semplice analogia meccanica (Figura 5.6). Un corpo rigido può descrivere una traiettoria circolare senza possedere momento angolare intrinseco (*spin*), come mostra l'immagine di sinistra. Nel movimento illustrato a destra il corpo possiede invece spin. Una situazione analoga si verifica nei moti fluidi ma, diversamente dai solidi, in questo caso occorre esaminare anche l'effetto indotto dalla deformazione del mezzo poiché vi può essere o meno un ulteriore contributo alla vorticità a seconda delle modalità con cui essa avviene (Figura 5.6 in basso).

Chiariamo queste affermazioni con l'aiuto di due esempi: nel primo immaginiamo che un fluido formi un vortice che ruota attorno ad un punto  $C$  con velocità angolare  $\Omega$ . Le componenti cartesiane della velocità sono  $u = -\Omega y$  e  $v = \Omega x$ , e quindi

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega + x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Si vede facilmente che se il fluido ruota rigidamente ( $\Omega = \text{costante}$ ) la vorticità rimane eguale in tutti i punti del flusso ed il suo valore è pari al doppio della velocità angolare. Questa situazione è simile alla rotazione della particella con spin della Figura 5.6b. Se invece la velocità angolare del fluido decresce con la distanza  $r$  dal punto  $C$  secondo la legge  $\Omega = K/r^2 = K/(x^2 + y^2)$ , per  $r > 0$  si ottiene  $\omega = 0$ , cioè la vorticità è ovunque nulla tranne nel centro del vortice dove la velocità è singolare. Quest'ultima situazione è, per alcuni aspetti, simile alla circolazione senza spin illustrata nella Figura 5.6a.

Come secondo esempio, consideriamo un flusso con velocità  $u = u(y)$  e  $v = w = 0$ . In questo caso  $\omega = -\partial u/\partial y$ . Pur trattandosi di un flusso piano unidirezionale, in ogni punto il fluido è caratterizzato da vorticità non nulla.

[1] Infatti la vorticità è una grandezza vettoriale, di cui la (5.5.1) è solo la componente  $z$ . Le rimanenti componenti sono  $\omega_x = \partial v/\partial z - \partial w/\partial y$  e  $\omega_y = \partial w/\partial x - \partial u/\partial z$ . Nella notazione vettoriale  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ .

## 5.6 Equazione di Laplace

Se il flusso è potenziale, possiamo sostituire le definizioni di funzione potenziale (5.3.1) nell'equazione di continuità (5.1.1), che in questo modo diventa

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (5.6.1)$$

La (5.6.1) è un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali, nota come *equazione di Laplace* <sup>[2]</sup>. Essa è utilizzata soprattutto per studiare i flussi tridimensionali perchè permette di affrontare il problema mediante una singola funzione invece delle tre componenti della velocità.

Le funzioni che soddisfano all'equazione di Laplace sono dette *armoniche*, e sono ovunque regolari con derivate regolari, tranne eventualmente nei bordi (v. l'Appendice D). Proprietà fondamentale dell'equazione di Laplace è la linearità. Questo risultato è particolarmente importante perchè, tra l'altro, implica la possibilità di applicare il principio di sovrapposizione alle soluzioni. È notevole il fatto che la condizione di flusso incomprimibile e irrotazionale, da cui è stata derivata la (5.6.1), rende intrinsecamente lineare il flusso nonostante non lo siano in generale le equazioni di Navier–Stokes.

L'utilità di risolvere le equazioni di Laplace invece delle equazioni di Navier–Stokes deriva dal fatto che esistono dei procedimenti matematici sufficientemente generali che permettono di integrare la (5.6.1) soprattutto quando il problema presenta delle simmetrie. Dopo aver risolto l'equazione (5.6.1) con le opportune condizioni al contorno, e aver quindi ricavato la funzione  $\Phi(x, y)$ , si calcola la velocità del fluido utilizzando le definizioni (5.3.1). Inoltre, per integrazione delle (5.2.1), è possibile dedurre anche la forma della funzione corrente. In realtà la relazione tra  $\Phi$  e  $\Psi$  può essere scritta esplicitamente uguagliando le componenti delle velocità date dalle (5.2.1) e (5.3.1). Si ottengono così le seguenti *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (5.6.2a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.6.2b)$$

Ricordiamo infine che uno dei parametri fondamentali di un flusso è dato dalla pressione. Questa non compare esplicitamente nelle equa-

---

<sup>[2]</sup> L'equazione di Laplace compare in molti settori della fisica, come ad esempio nella teoria dei potenziali delle forze fondamentali. Questo spiega tra l'altro l'origine del termine “potenziale” di velocità attribuito alla funzione  $\Phi$

zioni di Laplace, ma dovrà essere calcolata, dopo che il problema cinematico è stato risolto, inserendo nelle equazioni di Navier–Stokes le espressioni della velocità ed integrando quindi nella sola variabile  $p$ .

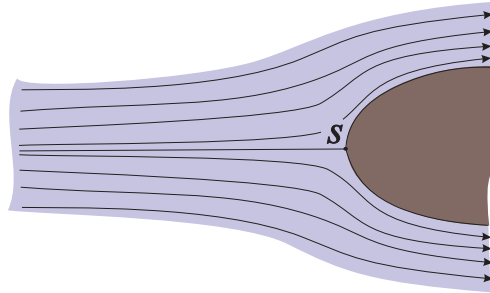
In coordinate cilindriche  $[r, \varphi, z]$  le equazioni di Laplace di un flusso bidimensionale sono

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.6.3)$$

mentre in coordinate sferiche  $[r, \theta, \varphi]$  si ha

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5.6.4)$$

## 5.7 Punto di stagnazione

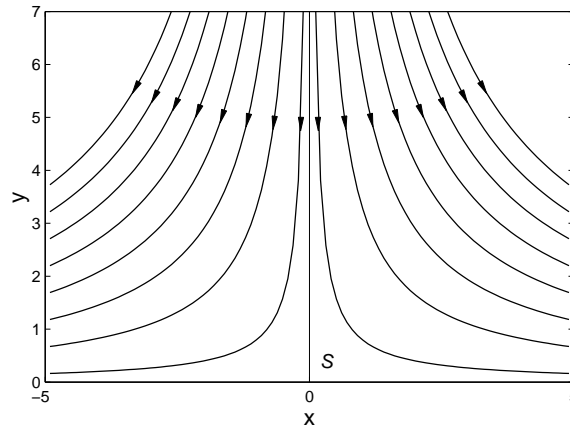


**Figura 5.7** Flusso con punto di stagnazione.

Viene detto *punto di stagnazione* (o di ristagno) un punto  $S$  di un flusso in cui si annullano tutte le componenti della velocità. Esso si può formare, ad esempio, quando un fluido viene deviato da un ostacolo solido, come mostra la Figura 5.7. Ricaviamo le equazioni del flusso in un intorno sufficientemente piccolo di  $S$  in modo che l'elemento di superficie del corpo possa essere considerato piano. Introduciamo quindi coordinate cartesiane centrate in  $S$  ed assumiamo che il flusso sia bidimensionale e irrotazionale<sup>[3]</sup>. Nell'ipotesi che non vi siano singolarità geometriche il potenziale  $\Phi(x, y)$  è ovunque regolare e può essere quindi espanso in serie di Taylor. Ponendo  $\Phi_S = \Phi(0, 0)$ , in prossimità del punto di stagnazione si ha

$$\Phi(x, y) = \Phi_S + ax + by + cxy + dx^2 + ey^2 + \dots \quad (5.7.1)$$

<sup>[3]</sup> Come vedremo in seguito, il fatto che il flusso sia irrotazionale comporta l'assenza scorrimento sulla superficie rigida.



**Figura 5.8** Linee di corrente in un flusso con punto di stagnazione.

Poichè  $u(S) = (\partial\Phi/\partial x)_S = 0$  e  $v(S) = (\partial\Phi/\partial y)_S = 0$ , i coefficienti  $a$  e  $b$  devono essere nulli. Inoltre sostituendo la (5.7.1) nell'equazione di Laplace (5.6.1) si trova  $d = -e$ . Ponendo allora  $k = 2d = -2e$  e trascurando i termini di ordine superiore al secondo, si trova seguente espressione della funzione potenziale

$$\Phi(x, y) = \Phi_S + cxy + \frac{1}{2}k(x^2 - y^2). \quad (5.7.2)$$

Infine, ci dobbiamo aspettare che la soluzione sia simmetrica rispetto all'asse  $y$ , cioè  $\Phi(x, y) = \Phi(-x, y)$ . Questo implica che anche il coefficiente  $c$  debba essere nullo. Assumendo la costante arbitraria  $\Phi_S = 0$ , otteniamo allora

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2), \quad (5.7.3)$$

cui corrispondono le componenti della velocità (cfr. le 5.3.1)

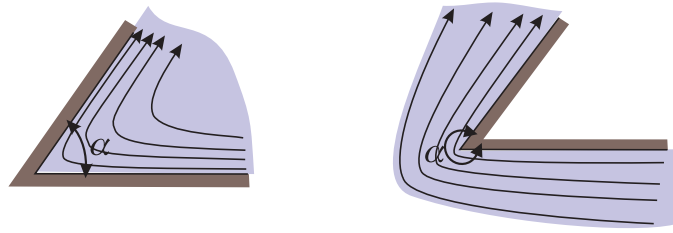
$$u = kx, \quad v = -ky. \quad (5.7.4)$$

Inoltre per integrazione della (5.2.1) si ricava la funzione di corrente

$$\Psi = kxy. \quad (5.7.5)$$

Questa espressione mostra che nell'intorno del punto di stagnazione le linee di corrente formano iperboli rettangolari che da una parte tendono asintoticamente al piano dell'ostacolo e dall'altra alla corrispondente linea ortogonale passante per il punto di stagnazione  $S$ . Le linee potenziali identificano un'identica famiglia di iperboli con asintoti inclinati di  $45^\circ$  rispetto agli assi (Figure 5.8 e 5.4).

## 5.8 Diedro



**Figura 5.9** Linee di corrente in un flusso tra due piani inclinati di un angolo  $\alpha$ .

Consideriamo ora un flusso potenziale di un fluido che scorre tra i due piani di un angolo diedro (Figura 5.9). Se l'angolo è convesso ( $\alpha > \pi$ ) il fluido si muove all'interno del diedro, mentre se è concavo ( $\alpha < \pi$ ) il fluido si trova all'esterno. Usiamo coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  con l'asse  $z$  normale al piano della figura e l'origine  $O$  nello spigolo. Il potenziale velocità deve soddisfare all'equazione di Laplace (5.6.3) con la condizione al contorno fissata dalla richiesta che sulle pareti la velocità sia tangente e quindi che  $\partial\Phi/\varphi = 0$  per  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \alpha$ . Si può dimostrare (per esempio, per semplice sostituzione diretta) che la soluzione che soddisfa a queste condizioni ha la forma

$$\Phi(r, \varphi) = A r^n \cos(n\varphi), \quad \text{con } n = \pi/\alpha, \quad (5.8.1)$$

dove  $A$  è una costante arbitraria. Le componenti della velocità e la funzione di corrente sono quindi

$$u = n A r^{n-1} \cos(n\varphi) \quad (5.8.2)$$

$$v = -n A r^{n-1} \sin(n\varphi) \quad (5.8.3)$$

$$\Psi(r, \varphi) = A r^n \sin(n\varphi) \quad (5.8.4)$$

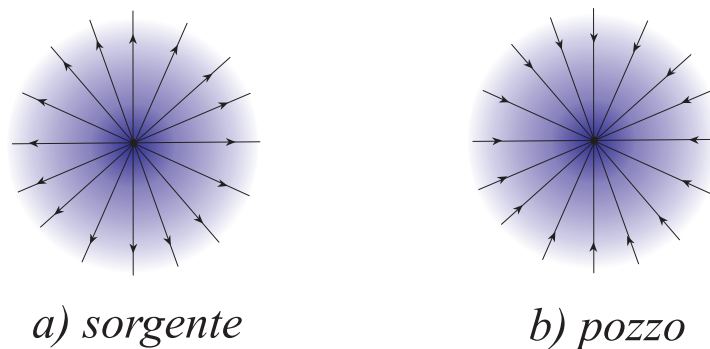
Come si può verificare facilmente, se  $\alpha > \pi$  ( $n < 1$ ) la velocità radiale diverge nel polo  $O$  come  $1/r^{1-n}$ . Se invece l'angolo è concavo ( $n > 1$ ), la velocità tende a zero per  $r \rightarrow 0$ . Infine se  $\alpha = \pi/2$ , cioè  $n = 2$ , la funzione corrente diventa

$$\Psi = A r^2 \sin \theta \cos \theta = 2Axy .$$

Quest'ultimo è il caso del punto di stagnazione esaminato nel paragrafo precedente <sup>[4]</sup>

[4] Si tenga presente nel ricavare la 5.7.5 partendo dallo sviluppo di Taylor in coordinate cartesiane si è supposta una simmetria destra/sinistra. Evidentemente questa richiesta è equivalente all'ipotesi che il diedro sia retto.

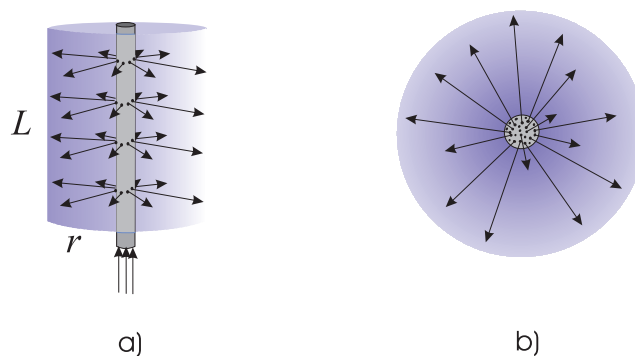
## 5.9 Sorgente e pozzo



**Figura 5.10** Sorgente e pozzo.

L'idea astratta di una *sorgente* di flusso puntiforme e irrotazionale presenta un certo interesse teorico perchè è la base di partenza per definire alcune grandezze che trovano poi applicazione in altre configurazioni più realistiche. In pratica possiamo immaginare di realizzare una sorgente di questo tipo utilizzando una sottile cannucchia dalla cui estremità fuoriesce con regolarità un fluido ideale avente simmetria sferica (Figura 5.10a). Nel caso ideale il flusso è ovunque regolare tranne nel punto  $O$ , dove la velocità diverge perchè deve essere soddisfatta l'equazione di continuità. Invertendo la direzione della velocità si ottiene un flusso simile, in cui però il fluido viene risucchiato dal punto singolare. Questa configurazione prende il nome di *pozzo* o *sink* (Figura 5.10b).

Oltre alle sorgenti e ai pozzi con simmetria sferica, possiamo anche immaginare flussi analoghi, ma aventi simmetria cilindrica. In questo caso la regione singolare da cui fuoriesce (o in cui entra) il fluido è costituito dai punti di una retta (per esempio, l'asse  $z$ ). Le Figure 5.11a e b mostrano schematicamente come possono essere realizzate sorgenti con simmetria cilindrica o sferica.



**Figura 5.11** Sorgente con simmetria cilindrica (a) e sferica (b).

Poichè è più semplice, studiamo prima il caso del flusso stazionario avente simmetria cilindrica (Figura 5.11a). In virtù della conservazione della massa la portata volumetrica attraverso la superficie di un cilindro di raggio  $r$ , altezza  $L$  e coassiale con la sorgente, è

$$Q = 2\pi r L u = \text{costante} \quad (5.9.1)$$

Perciò la componente radiale della velocità varia con la distanza secondo la relazione

$$u(r) = m/r. \quad (5.9.2)$$

La costante

$$m = Q/2\pi L \quad (5.9.3)$$

viene chiamata *forza* della sorgente se  $m > 0$ , oppure del pozzo se  $m < 0$ . Dal momento che il flusso è irrotazionale, esso ammette un potenziale di velocità che può essere ricavato dalle equazioni (5.3.5):

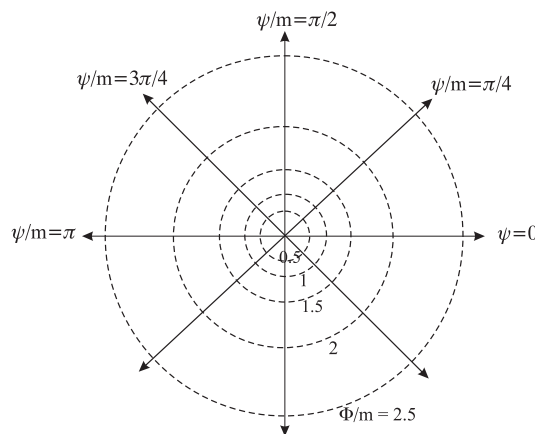
$$\frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} = \frac{m}{r} \quad (5.9.4a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (5.9.4b)$$

Integrando si ottiene

$$\Phi(r, \theta) = m \ln(r/r_0). \quad (5.9.5)$$

dove  $r_0$  è il raggio della superficie di riferimento  $\Phi = 0$ . Perciò il potenziale di velocità è costante su superfici cilindriche coassiali i cui raggi crescono esponenzialmente con  $\Phi/m$ , come mostrano le linee tratteggiate della Figura 5.12.



**Figura 5.12** Linee di corrente e superfici equipotenziali in una sorgente di forza  $m$ .

Infine, la funzione di corrente può essere ottenuta usando le equazioni di Cauchy-Riemann (5.6.4), che nel nostro caso sono

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{m}{r} \quad (5.9.6a)$$

$$\frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial r} = 0 . \quad (5.9.6b)$$

Integrando con la condizione  $\Psi(r, 0) = 0$ , si ricava

$$\Psi(r, \theta) = m \theta , \quad (c5.9.7)$$

cioè il flusso è diretto radialmente ed ha l'aspetto messo in evidenza dalle linee continue nella Figura 5.12).

In maniera simile si possono trovare le funzioni  $\Psi$  e  $\Phi$  di una sorgente puntiforme nell'ipotesi di simmetria sferica. In questa configurazione la conservazione della massa diventa (con  $u = v_r$ )

$$4\pi r^2 u = m = \text{costante} . \quad (5.9.8)$$

Le relazioni tra la velocità e le funzioni  $\Psi$  e  $\Phi$  sono

$$u(r) = \frac{m}{4\pi r^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} , \quad (5.9.9)$$

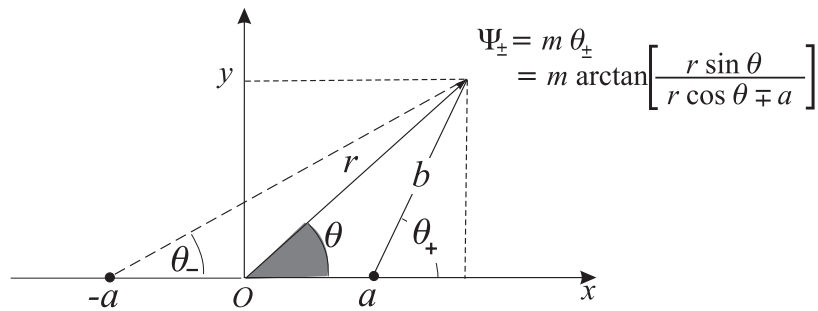
dalle quali per integrazione si ottiene

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{m}{4\pi} \cos \theta \quad (5.9.10a)$$

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{m}{4\pi r} . \quad (5.9.10b)$$

In questo caso le superfici equipotenziali sono sferiche e concentriche, mentre le linee di corrente sono formate da raggi uscenti (o entranti, se  $m < 0$ ) dall'origine.

## 5.10 Doppietto



**Figura 5.13** Geometria di un doppietto formato da una sorgente centrata in  $[a, 0]$  e da un pozzo in  $[-a, 0]$ .

Un *doppietto* (o *dipolo*) è formato da una coppia di sorgenti singolari di forza opposta ma di eguale valore assoluto, e separate tra loro da una distanza  $2a$ . Grazie alla linearità delle equazioni di Laplace, la soluzione è ricavabile come somma delle soluzioni separate di due monopoli (sorgente più pozzo).

Nell'ipotesi che sorgente e pozzo abbiano entrambe simmetria cilindrica e si trovino sull'asse  $x$  rispettivamente alle coordinate  $a$  e  $-a$ , le funzioni di corrente sono date dalla (5.9.7). Con l'aiuto della Figura 5.13 si trova

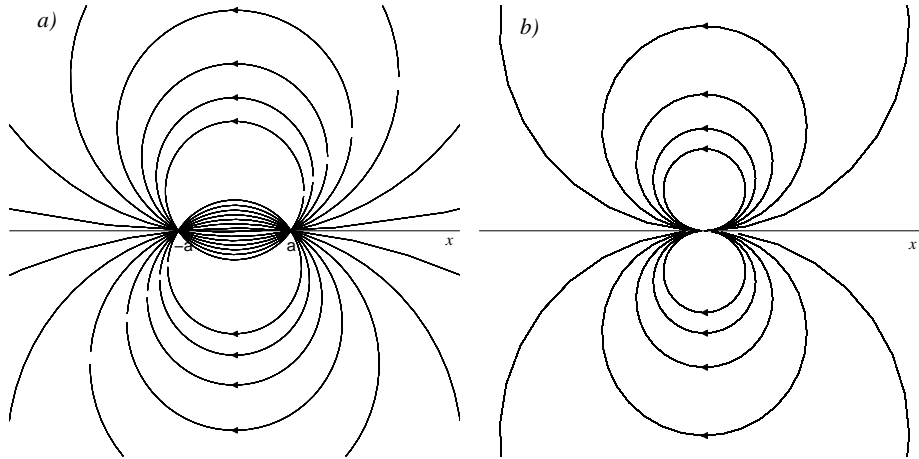
$$\begin{aligned}\Psi_+(r, \theta) &= +m\theta_+ = +m \arctan \left[ \frac{r \sin \theta_+}{r \cos \theta_+ - a} \right] = m \arctan \frac{y}{x - a} \\ \Psi_-(r, \theta) &= -m\theta_- = +m \arctan \left[ \frac{r \sin \theta_-}{r \cos \theta_- + a} \right] = -m \arctan \frac{y}{x + a}.\end{aligned}$$

Perciò la funzione di corrente complessiva è <sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned}\Psi &= m \arctan \left( \frac{y}{x - a} \right) - m \arctan \left( \frac{y}{x + a} \right) = \\ &= m \arctan \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right).\end{aligned}\tag{5.10.1}$$

<sup>[5]</sup> Si ricorda la regola trigonometrica:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$



**Figura 5.14** a) Dipolo con separazione finita. b) Flusso di un dipolo con  $a \rightarrow 0$ .

L'equazione delle linee di corrente  $\Psi = \Psi_k = \text{costante}$  è

$$x^2 + \left[ \frac{y - a}{\tan(\Psi_k/m)} \right]^2 = \left[ \frac{a}{\sin(\Psi_k/m)} \right]^2.$$

Come mostra la Figura 5.14a, le linee sono circonferenze di raggio  $R = a / \sin(\Psi_k/m)$  centrate in  $x_c = 0$  e  $y_c = a / \tan(\Psi_k/m)$ .

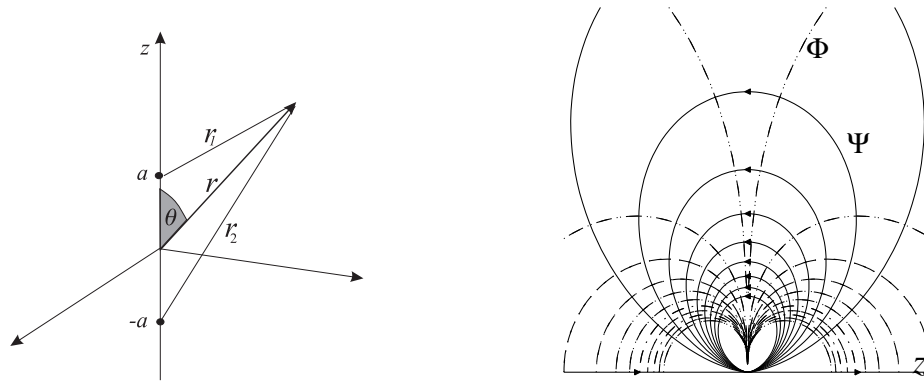
Al tendere a zero della distanza  $a$ , l'intera configurazione delle linee collassa verso l'origine. Tuttavia possiamo verificare facilmente che se nello stesso tempo aumentiamo  $m$  in modo tale che il prodotto  $ma$  rimanga costante, le linee di corrente tendono verso una configurazione stabile che dipende unicamente dal parametro

$$K = 2ma = \text{costante}, \quad (5.10.2)$$

chiamato *forza del dipolo*. In particolare si trova la seguente espressione limite della funzione di corrente del dipolo a simmetria cilindrica

$$\Psi = \lim_{2a \rightarrow 0} \frac{K}{2a} \arctan \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) = \frac{Ky}{x^2 + y^2} = \frac{K \sin \theta}{r}. \quad (5.10.3)$$

Le linee a  $\Psi = \text{costante}$  sono circonferenze passanti per l'origine ed aventi diametro  $K/\Psi$  (Figura 5.14b). A causa dell'ipotesi di simmetria cilindrica, queste curve si devono intendere appartenenti a superfici ortogonali all'asse  $z$  ortogonale al piano della figura.



**Figura 5.15** Dipolo in simmetria sferica. Nella figura a destra le linee di corrente (curve continue) e le superfici potenziali (tratteggiate) hanno simmetria assiale attorno all'asse  $z$ .

In maniera analoga possiamo definire un dipolo avente simmetria sferica sovrapponendo due sorgenti sferiche di forza opposta, situate sull'asse  $z$  alla distanza rispettivamente  $+a$  e  $-a$ . In questo caso il problema geometrico è più semplice usando la funzione potenziale. Dalla seconda delle (5.9.10), e facendo riferimento alla Figura 5.15, si trova il potenziale totale dei due monopoli

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{m}{4\pi r_1} - \frac{-m}{4\pi r_2} = \frac{m}{4\pi r_1 r_2} (r_1 - r_2) = \\ &= \frac{m}{4\pi r_1 r_2} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{(r_1 + r_2)} = \frac{m}{4\pi r_1 r_2} \frac{(-4ar \cos \theta)}{(r_1 + r_2)} = \\ &= -\frac{K}{4\pi r_1 r_2} \frac{(-2r \cos \theta)}{(r_1 + r_2)},\end{aligned}$$

dove si è fatto uso della relazione  $r_{1,2}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ar \cos \theta$  e si è posto  $K = 2am$ . Facendo tendere a zero la distanza tra le sorgenti in modo da mantenere  $K$  costante si ha  $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r$ . Il potenziale di velocità del dipolo diventa quindi

$$\Phi = -\frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta. \quad (5.10.4)$$

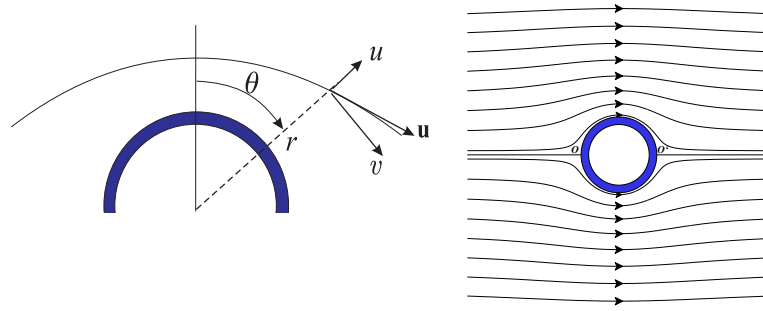
Infine dalle equazioni di Cauchy–Riemann in coordinate sferiche si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{K}{4\pi r^2} \sin^2 \theta.$$

Integrando con la condizione  $\Psi(\theta = 0) = 0$ , si trova la funzione di corrente del dipolo sferico

$$\Psi(r, \theta) = \frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta \quad (5.10.5)$$

## 5.11 Flusso uniforme attorno ad un cilindro



**Figura 5.16** Linee di corrente di un flusso uniforme attorno ad un cilindro.

Il modello del dipolo ci permette di ricavare facilmente la configurazione stazionaria di un flusso ideale attorno ad un cilindro di raggio  $R$ . Il flusso viene costruito sommando un moto uniforme con velocità  $u_0$  nella direzione dell'asse  $x$  e un dipolo centrato nell'origine <sup>[6]</sup>. Il risultato è illustrato nella Figura 5.16. I punti  $O$  e  $O'$  sono punti di stagnazione.

In coordinate polari la funzione corrente del flusso uniforme è  $\Psi = u_0 r \sin \theta$  (v. 5.4.5). Sommando a questa la componente di un dipolo di forza  $K$  si ottiene

$$\Psi = u_0 r \sin \theta + \frac{K \sin \theta}{r}. \quad (5.11.1)$$

Il parametro  $K$  non è però arbitrario in quanto occorre imporre la condizione che le linee di corrente non possano attraversare il cilindro. Questo viene fatto richiedendo che la stessa superficie del cilindro formi un involuppo di linee di corrente  $\Psi = \text{costante}$ . Assegnando il valore  $\Psi = 0$  alla linea che lambisce la superficie del solido, si ottiene la relazione

$$0 = u_0 R \sin \theta + \frac{K \sin \theta}{R}, \quad (5.11.2)$$

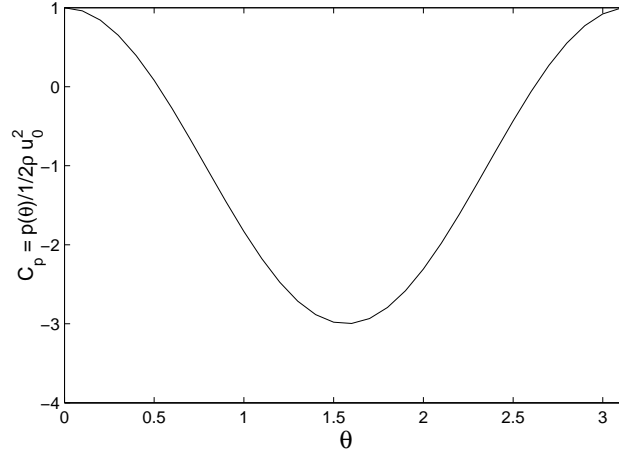
dalla quale risulta

$$K = -u_0 R^2. \quad (5.11.3)$$

Sostituendo questo valore nella (5.11.1) si ha

$$\Psi = u_0 r \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (5.11.4)$$

<sup>[6]</sup> Questa scelta può apparire alquanto arbitraria. In realtà essa deriva *a posteriori* da un'analisi delle soluzioni generali delle equazioni di Laplace in coordinate cilindriche.



**Figura 5.17** Distribuzione della pressione attorno ad un cilindro.

Le componenti della velocità del fluido attorno al cilindro sono

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = u_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.11.5)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.11.6)$$

$$u^2 + v^2 = u_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^4 + 2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (2 \sin^2 \theta - 1) \right] \quad (5.11.7)$$

Infine la pressione del fluido può essere ricavata dall'equazione di Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) = p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 \quad (5.11.8)$$

dove  $p_0$  e  $u_0$  indicano rispettivamente la pressione e la velocità nelle regioni indisturbate del fluido, lontane dal cilindro. Sostituendo la (5.11.7) nella (5.11.8) si ottiene

$$p(\theta) - p_0 = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^4 + 2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (2 \sin^2 \theta - 1) \right]. \quad (5.11.8)$$

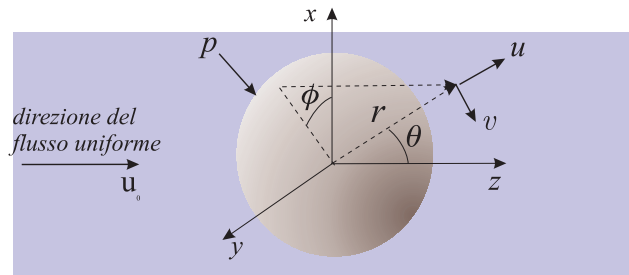
La differenza  $P = p - p_0$  viene chiamata *pressione di gauge*. Sulla superficie del cilindro  $r = R$  il *coefficiente di pressione* è

$$C_P(\theta) = \frac{p(\theta) - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (5.11.9)$$

La distribuzione della pressione attorno al cilindro è simmetrica, ed ha l'andamento illustrato nella Figura 5.17. Ciò significa che la *resistenza*

esercitata dal fluido sull'ostacolo è complessivamente nulla. In realtà questo risultato vale per i tutti i fluidi ideali irrotazionali, qualunque sia la forma del corpo, ed è noto come *paradosso di d'Alambert* perchè è contrario all'evidenza sperimentale. Come vedremo, il paradosso viene risolto ammettendo l'esistenza di uno strato attorno al cilindro dove, a causa della viscosità, il moto del flusso viene profondamente modificato rispetto alla situazione di fluido ideale e dove si forma una regione caratterizzata da vorticità non nulla.

## 5.12 Flusso uniforme attorno ad una sfera



**Figura 5.18** Coordinate sferiche usate per descrivere un flusso ideale attorno ad una sfera.

Come nel caso nel cilindro, il flusso ideale attorno ad una sfera è dato dalla combinazione di un dipolo a simmetria assiale e di un moto uniforme nella direzione dell'asse  $z$ . In coordinate polari la funzione corrente di un flusso uniforme con velocità  $u_0$  nella direzione dell'asse  $z$  (Figura 5.18) si ricava per integrazione delle (5.2.8) ponendo  $u = v_r = u_0 \cos \theta$  e  $v = v_\theta = -u_0 \sin \theta$ . Dalla (5.2.8a) si ottiene quindi

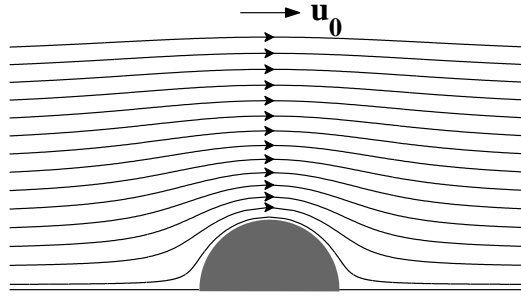
$$u_0 \cos \theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} ,$$

cioè

$$\Psi = \frac{1}{2} u_0 r^2 \sin^2 \theta . \quad (5.12.1)$$

A questa soluzione dobbiamo sommare la funzione del dipolo (5.10.5) per ottenere alla fine

$$\Psi = \frac{1}{2} u_0 r^2 \sin^2 \theta + \frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta . \quad (5.12.2)$$



**Figura 5.19** Flusso attraverso una sfera

Il valore di  $K$  viene fissato richiedendo che la superficie del cilindro sia anche un involuppo delle linee di corrente. Imponendo per queste linee la condizione  $\Psi(R, \theta) = 0$ , si trova

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{2} u_0 r^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right). \quad (5.12.3)$$

Integrando le equazioni di Cauchy–Riemann si ricava facilmente anche la funzione potenziale

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{1}{2} u_0 r \cos \theta \left( 1 + \frac{R^3}{r^3} \right). \quad (5.12.4)$$

Dalla definizione di funzione di corrente (o dal potenziale) in coordinate sferiche si trovano le seguenti componenti della velocità

$$u(r, \theta) = u_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (5.12.5)$$

$$v(r, \theta) = -u_0 \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (5.12.6)$$

Sulla superficie della sfera la velocità è puramente tangenziale e vale

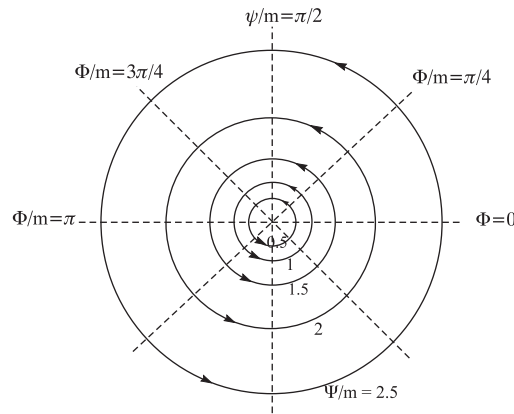
$$(u^2 + v^2)^{1/2} = \frac{3}{2} u_0 \sin \theta. \quad (5.12.7)$$

Applicando anche in questo caso il teorema di Bernoulli si ricava infine la seguente espressione del coefficiente di pressione variabile

$$C_P(\theta) = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad (5.12.8)$$

Come mostra la Figura 5.19, l'andamento del flusso è simile a quello del cilindro, ma occorre tenere presente che ora le linee di corrente hanno una simmetria sferica, e non cilindrica, attorno all'asse  $x$ . Anche in questo caso la distribuzione simmetrica della pressione (5.12.8) comporta l'assenza di una forza netta esercitata dal fluido ideale irrotazionale sul corpo. In altri termini, il coefficiente di pressione integrato è nullo.

### 5.13 Vortice libero



**Figura 5.20** linee di corrente (curve continue) e superfici potenziali di un vortice libero.

Scambiando tra loro le definizioni (5.9.5) e (5.9.7) delle funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$  di una sorgente puntiforme a simmetria cilindrica si ottiene il moto illustrato in Figura 5.20. Questa speciale configurazione prende il nome di *vortice libero* (o *free-line vortex*) di forza  $m$ . Dalle equazioni <sup>[7]</sup>

$$\Phi = m\theta, \quad \Psi = -m \ln r \quad (r > 0) \quad (5.13.1)$$

si ha

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (5.13.2a)$$

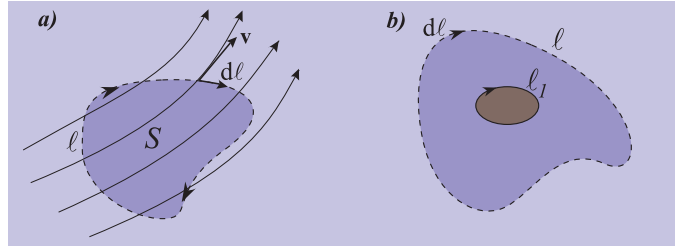
$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{m}{r}, \quad (5.13.2b)$$

cioè il movimento del fluido è puramente tangenziale. Nonostante l'aspetto circolare del flusso, per  $r > 0$  la vorticità è nulla, come possiamo verificare applicando la definizione di vorticità (5.5.2). Si ha infatti

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.13.3)$$

Tra l'altro questo giustifica l'ipotesi dell'esistenza di un potenziale di velocità contenuta implicitamente nella prima equazione (5.13.1).

<sup>[7]</sup> Il segno meno nella seconda equazione viene scelto in modo che a valori positivi della forza del vortice corrispondano movimenti antiorari del fluido.



**Figura 5.21** Teorema di Stokes.

Si noti che la presenza del punto singolare sull'asse  $r = 0$ , dove la velocità diverge, introduce una peculiarità che rende la struttura *non ovunque* irrotazionale. Questo fatto ha una serie di importanti conseguenze sulle caratteristiche fisiche del flusso. Innanzitutto occorre tenere presente che la vorticità è una proprietà *locale*, ed è quindi poco adatta a mettere in evidenza eventuali proprietà globali della configurazione fluida. Tale ruolo viene svolto invece dalla *circolazione*  $\Gamma$ , definita dall'integrale

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (5.13.4)$$

esteso lungo una linea chiusa  $\ell$  (v. Figura 5.21a), che per semplicità qui supporremo sia interamente contenuta nel piano  $(x, y)$ . Si assume convenzionalmente che la circolazione sia positiva per rotazioni orarie.

La circolazione è strettamente legata alla vorticità. Esiste infatti una fondamentale relazione della matematica, nota come *teorema di Stokes*, secondo la quale vale la seguente uguaglianza tra gli integrali di linea e di superficie

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.13.5)$$

dove  $S$  è la superficie piana che è contenuta interamente nel fluido e che ha come contorno la linea chiusa  $\ell$  <sup>[8]</sup>. Se viceversa la superficie  $S$  attraversa un corpo rigido che ha come contorno  $\ell_1$  (Figura 5.21b)

[8] Il teorema di Stokes è più generale, ed eguaglia la circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa nello spazio a tre dimensioni con l'integrale del rotore della velocità esteso su una qualunque superficie immersa nel fluido e il cui contorno è  $\ell$  (v. la nota del §5.5):

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} .$$

vale la relazione

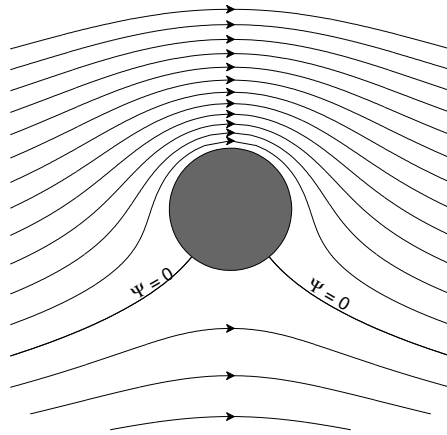
$$\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \omega dS + \oint_{\ell_1} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (5.13.6)$$

Applichiamo questi risultati al vortice libero scegliendo un circuito chiuso circolare di raggio  $r$ . In questo caso si ha

$$\Gamma = \oint \frac{m}{r} d\ell = \frac{m}{r} 2\pi r = 2\pi m , \quad (5.13.7)$$

cioè la circolazione è indipendente dal raggio ed è positiva o negativa a seconda del segno della forza  $m$  del vortice. Poichè in tutti i punti interni al cerchio, tranne nell'origine, vale la relazione  $\omega = 0$ , ed essendo la circolazione diversa da zero, si deve concludere che sull'asse  $z$  la vorticità deve essere infinitamente grande in modo che sia soddisfatta comunque l'equazione (5.13.5). Naturalmente il vortice libero con il punto centrale singolare è un concetto puramente matematico, che non si verifica in natura. L'interesse teorico verso queste configurazioni deriva dal fatto che esistono situazioni reali assimilabili al vortice libero, nelle quali il flusso possiede una vorticità *quasi* ovunque trascurabile, ma che diventa improvvisamente molto grande (anche se, ovviamente, non infinita) in una regione molto ristretta.

## 5.14 Cilindro con circolazione



**Figura 5.22** Flusso con circolazione oraria attorno ad un cilindro.

Come abbiamo visto nel paragrafo 5.11, un flusso ideale irrotazionale che investe un ostacolo non produce su di esso alcuna forza. Se ora immaginiamo di sommare al flusso attorno al cilindro un vortice di forza  $m = \Gamma/2\pi$  si ottiene la funzione di corrente

$$\Psi(r, \theta) = u_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r . \quad (5.14.1)$$

Il flusso risultante (assumendo una rotazione oraria del vortice) è illustrato nella Figura 5.22. Sulla superficie del cilindro le componenti della velocità e della pressione sono

$$u(R, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_R = 0 \quad (5.14.2)$$

$$v(R, \theta) = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_R = -2u_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (5.14.3)$$

$$p(R, \theta) - p_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \left[ 1 - \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R u_0} \right)^2 \right]. \quad (5.14.4)$$

Come si vede dalla distribuzione delle linee di corrente, si ha ancora simmetria attorno ad un asse centrale ortogonale alla direzione del moto principale, ma non nella direzione parallela. Pertanto la *resistenza*, cioè la forza esercitata dal fluido nella direzione del moto, è ancora nulla, mentre la forza nella direzione ortogonale, chiamata in generale *portanza* (o *lift*), è diversa da zero. Infatti nella parte superiore del cilindro le linee di corrente si addensano poichè la velocità del vortice si somma positivamente a quella del flusso uniforme. Perciò in questa regione la pressione è più bassa rispetto alla parte inferiore, dove invece la velocità si oppone al flusso uniforme. La forza netta può essere calcolata direttamente integrando la (5.14.4) sulla superficie di un tratto di cilindro di altezza unitaria. Si ottiene

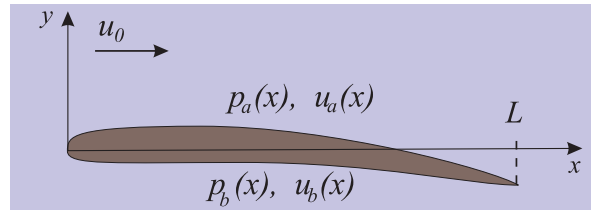
$$F_y = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) R \sin \theta d\theta = \rho u_0 \Gamma. \quad (5.14.5)$$

Cioè la portanza è proporzionale alla circolazione.

Il modello appena descritto è stato ottenuto in modo artificioso sovrapponendo un vortice al flusso ideale attorno ad un cilindro. Nella pratica una situazione di questo genere si instaura facendo ruotare un cilindro in moto traslatorio in un fluido reale (v. la discussione alla fine del prossimo paragrafo). Gli esperimenti confermano che il cilindro subisce effettivamente una spinta nella direzione ortogonale al movimento. La comparsa di questa spinta quando al moto traslatorio viene sovrapposto un movimento rotatorio va sotto il nome di *effetto Magnus* <sup>[9]</sup>.

[9] Il fenomeno fu scoperto dal fisico tedesco Heinrich G. Magnus (1802-70). In qualità di ingegnere militare egli cercava il motivo delle deviazioni anomale delle palle di cannone, a quel tempo ancora sferiche. Eliminò l'inconveniente filettando le bocche dei cannoni in modo da impedire che i proiettili fuoriuscissero con rotazioni casuali. La filettatura infatti obbliga il proiettile a ruotare attorno ad un asse parallelo alla direzione del moto, annullando in questo modo l'effetto.

## 5.15 Profilo alare



**Figura 5.23** Profilo alare

Un'analisi più rigorosa mostra che la relazione (5.15.5) tra la circolazione e la portanza ha una validità più generale perchè risulta indipendente dalla forma dell'ostacolo, purchè il fluido sia *privo di viscosità e irrotazionale*.

È possibile anche dare una semplice giustificazione di questo risultato partendo dal teorema di Bernoulli. Consideriamo un corpo affusolato come, ad esempio, un *profilo alare*. Il profilo sia costruito in maniera tale la deviazione del flusso produca sulla faccia superiore una velocità  $u_a$  maggiore rispetto alla velocità  $u_b$  sul lato inferiore. Immaginiamo inoltre che l'ala sia sufficientemente sottile in modo che le linee di corrente si mantengano approssimativamente parallele alla direzione del moto (Figura 5.23). Infine il fluido sia ideale e irrotazionale. Dal teorema di Bernoulli segue che la differenza di pressione tra la faccia inferiore e quella superiore dell'ala è

$$p_b - p_a = \frac{1}{2} \rho (u_a^2 - u_b^2) = \frac{1}{2} \rho (u_a + u_b)(u_a - u_b) \approx \rho u_0 (u_a - u_b)$$

dalla quale si ricava la portanza

$$F_y = \rho u_0 \int_0^L (u_a - u_b) dx . \quad (5.15.1)$$

Se ora calcoliamo la circolazione attorno al profilo, risulta

$$\Gamma = \int_0^L u_a dx + \int_L^0 u_b dx = \int_0^L (u_a - u_b) dx , \quad (5.15.2)$$

e quindi

$$F_y = \rho u_0 \Gamma . \quad (5.15.3)$$

Sebbene la circolazione sia stata calcolata lungo la linea adiacente al profilo, il valore di  $\Gamma$  è il medesimo lungo una *qualsiasi* curva tracciata attorno all'ala. Infatti, essendo il flusso irrotazionale, si ha  $\int \omega dS = 0$ , e quindi dalla (5.13.6) segue che la circolazione è indipendente dalla

curva scelta. L'equazione (5.15.3) costituisce il *teorema di Kutta–Zhukovskii*.

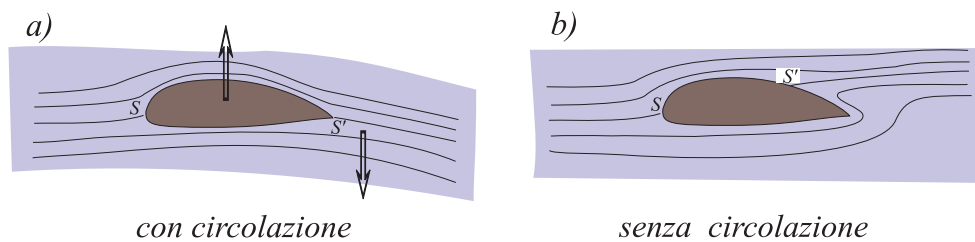
È ora opportuno fare alcune importanti considerazioni su questo risultato. Come abbiamo visto, l'assenza di resistenza nella direzione del moto è una diretta conseguenza della mancanza di attrito viscoso tra il fluido ideale e il corpo. Dalla (5.15.3) risulta invece che la portanza è apparentemente legata solo alla circolazione  $\Gamma$  ma non alla viscosità. Perciò se la circolazione è nulla, la forza complessivamente esercitata dal fluido ideale sull'ostacolo è nulla.

Nel problema del cilindro esaminato nel paragrafo precedente, il valore diverso da zero della circolazione è dovuto all'inserimento artificioso di un vortice, che è stato sommato al flusso ideale uniforme. Come si è detto, nei flussi reali possiamo immaginare di interpretare la comparsa sia della resistenza sia della portanza mettendo in rotazione il cilindro che si muove in un fluido viscoso. Infatti gli sforzi viscosi in prossimità della superficie del solido trascinano il fluido in un movimento rotatorio provocando la comparsa di circolazione.

Meno evidente è il ruolo della viscosità negli ostacoli non ruotanti considerati nel problema di Kutta–Zhukovskii. In questi casi la circolazione non nulla è una conseguenza del fatto di aver immaginato che le linee di corrente vicine alla superficie del corpo possano rimanere aderenti all'intero profilo, e dare origine così ad un punto di stagnazione nell'estremità posteriore. Si dimostra però che questa situazione, rappresentata schematicamente nella Figura 5.24a, è possibile solo in presenza di viscosità. Come confermano anche i risultati numerici, se il medesimo profilo venisse messo in movimento in un fluido ideale la configurazione del flusso assumerebbe invece l'aspetto illustrato nella Figura 5.24b, in cui la circolazione è nulla. In altri termini, solo i fluidi reali possono sviluppare in maniera naturale una configurazione delle linee di corrente simile a quella mostrata nella Figura 5.24a. Tra l'altro, solamente in questo modo l'ostacolo è in grado di deflettere una parte del fluido verso il basso, facendo sì che la quantità di moto trasferita complessivamente al fluido generi una reazione ortogonale al corpo. In definitiva la viscosità gioca un ruolo fondamentale non solo nell'originare la resistenza al moto, ma indirettamente è anche responsabile dell'effetto di portanza.

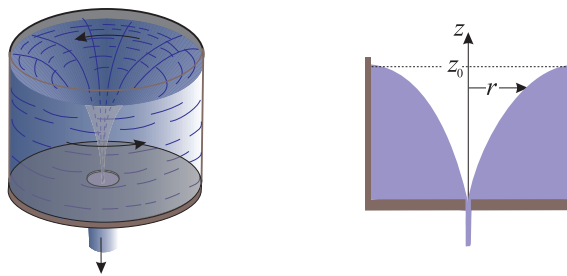
Aggiungiamo infine che alcuni teoremi fondamentali della fluidodinamica dimostrano che nei fluidi ideali la vorticità non può essere generata o distrutta. Se un fluido ideale è inizialmente irrotazionale, esso rimane tale per sempre. Viceversa nei fluidi reali l'attrito viscoso che compare sulla superficie degli ostacoli genera vorticità che viene poi trasportata dal fluido come se fosse una proprietà materiale. La presenza di viscosità comporta anche la comparsa di altri processi che

rendono il moto ancor più complesso, come l'instaurarsi di instabilità e la formazione di un certo numero di vortici caotici capaci di trasportare grandi quantità di vorticità lontano dal corpo.



**Figura 5.24** Flusso non viscoso attorno ad un ostacolo. a) con circolazione. b) senza circolazione. In quest'ultimo caso il punto di stagnazione  $S'$  a valle del flusso è situato nella superficie superiore.

## 5.16 Flusso irrotazionale con circolazione



**Figura 5.25** Flusso irrotazionale con circolazione in un recipiente cilindrico con un piccolo foro nel fondo.

Un'interessante applicazione di movimento rotatorio irrotazionale con circolazione è illustrato nella Figura 5.25. Un liquido è contenuto in un recipiente di capacità sufficientemente elevata (per esempio un lavandino) munito di un piccolo foro praticato sul fondo, inizialmente chiuso da un tappo. Viene quindi impresso un movimento rotatorio al fluido e poi si toglie il tappo in modo che il liquido defluisca formando una configurazione all'incirca stazionaria. Usiamo coordinate cilindriche ed assumiamo simmetria assiale (derivate  $\partial/\partial\varphi = 0$ ). Le particelle si muovono verso l'interno seguendo spirali centrate attorno all'asse  $z$ , con le componenti della velocità  $v_z$  e  $v_r$  trascurabili rispetto alla componente azimutale  $v_\varphi$ . Come mostra la figura, la superficie libera del liquido prende la forma di un imbuto. A causa della conservazione del momento angolare, la componente azimutale varia come  $v_\varphi \propto 1/r$ . La

velocità del fluido è dunque

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} \approx v_0 \frac{r_0}{r}$$

dove  $v_0$  è la velocità ad una qualche distanza radiale  $r_0$ . La velocità cresce via via che il liquido si muove lungo la spirale archimedeica e diverge per  $r \rightarrow 0$  mantenendo vorticità nulla (v. la 5.5.2) e circolazione (v. la 5.13.4)

$$\Gamma = 2\pi r v_\varphi = \text{costante}$$

Questi risultati cessano di valere in vicinanza del foro di scarico, dove  $v_r$  e  $v_z$  diventano importanti. In questa regione aumentano fortemente gli effetti della viscosità con conseguente generazione vorticità.

Lontano dallo scarico la forma della superficie libera può essere dedotta dal teorema di Bernoulli. Infatti ponendo  $p = p_a = \text{costante}$ , si ha

$$\rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}.$$

Poichè  $v \propto 1/r$ , si ottiene l'equazione

$$z = z_0 - \frac{\text{costante}}{r^2}.$$