# 6 Equazioni di conservazione generali rivisitate: Equazioni del potenziale di velocità

*La dinamica dei fluidi comprimibili, come altri argomenti in cui l'aspetto non-lineare delle equazioni di base gioca un ruolo fondamentale, è ben lontana dalla perfezione prevista da Laplace come il risultato ultimo di una teoria matematica*
*R. Courant e K.O. Friedrichs, 1948*

## 6.1 Introduzione

In questo capitolo, le equazioni generali di conservazione del flusso comprimibile non viscoso sono semplificate per il caso particolare di flusso irrotazionale. Questa semplificazione è molto drastica: essa permette infatti alle equazioni di continuità, quantità di moto, energia e di stato, con le loro variabili dipendenti, $\rho$, $p$, $\boldsymbol{V}$, $T$, di confluire in un'unica equazione in una variabile dipendente – una nuova variabile che definiremo in seguito potenziale di velocità. In questo capitolo, verrà derivata l'equazione del potenziale di velocità; quindi, nel prossimo capitolo, essa sarà utilizzata per la soluzione approssimata di diversi importanti problemi di flusso comprimibile.

## 6.2 Flusso irrotazionale

Il concetto di rotazione in un flusso è ben noto dal corso di fluidodinamica. La vorticità è una proprietà puntuale del flusso, ed è data da $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$. Essa è pari al doppio della velocità angolare di un elemento di fluido, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = 2\,\boldsymbol{\omega}$. Un flusso per cui $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} \neq 0$ dappertutto è detto rotazionale. Qualche tipico esempio di flusso rotazionale è illustrato nella figura 6.1, che mostra la regione all'interno di uno strato limite ed il flusso non viscoso dietro un'onda d'urto curva. Al contrario, un flusso per cui $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = 0$ dappertutto è detto irrotazionale. Qualche esempio di flusso irrotazionale è illustrato nella figura 6.2, che mostra il campo di moto supersonico intorno ad un cuneo, il flusso bidimensionale o assialsimmetrico in un ugello ed il flusso supersonico intorno ad un corpo affusolato. Se il corpo affusolato si muove di moto supersonico, l'onda d'urto al bordo di attacco del corpo risulterà leggermente curva e quindi il campo di moto sarà leggermente rotazionale. Tuttavia, è pratica comune trascurare questo effetto ed assumere che $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} \approx 0$.

I flussi irrotazionali sono generalmente più semplici da analizzare dei flussi rotazionali, in quanto la condizione di irrotazionalità, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = 0$, aggiunge una semplificazione in più alle equazioni del moto non viscoso. Fortunatamente, come illustrato nella figura 6.2, numerosi flussi di interesse pratico possono essere trattati come irrotazionali. Quindi, uno studio dei flussi irrotazionali è di grande valore pratico in fluidodinamica.

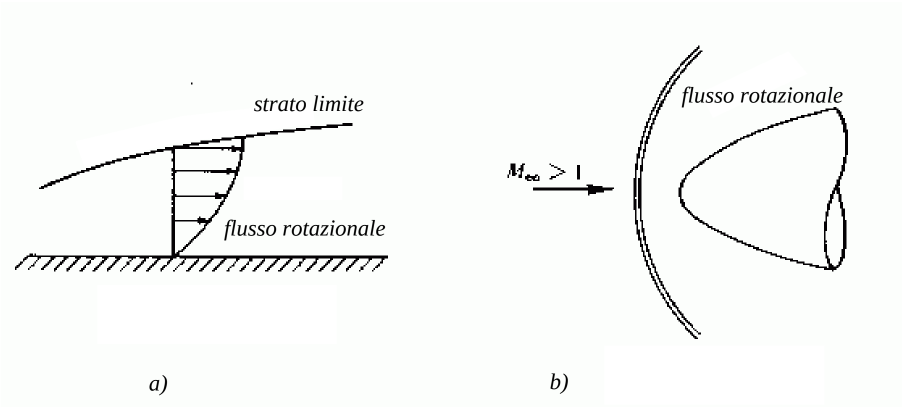


Figura 6.1: Esempi di flussi rotazionali: a) flusso non viscoso in uno starto limite; b) flusso non viscoso a valle di un urto curvo.

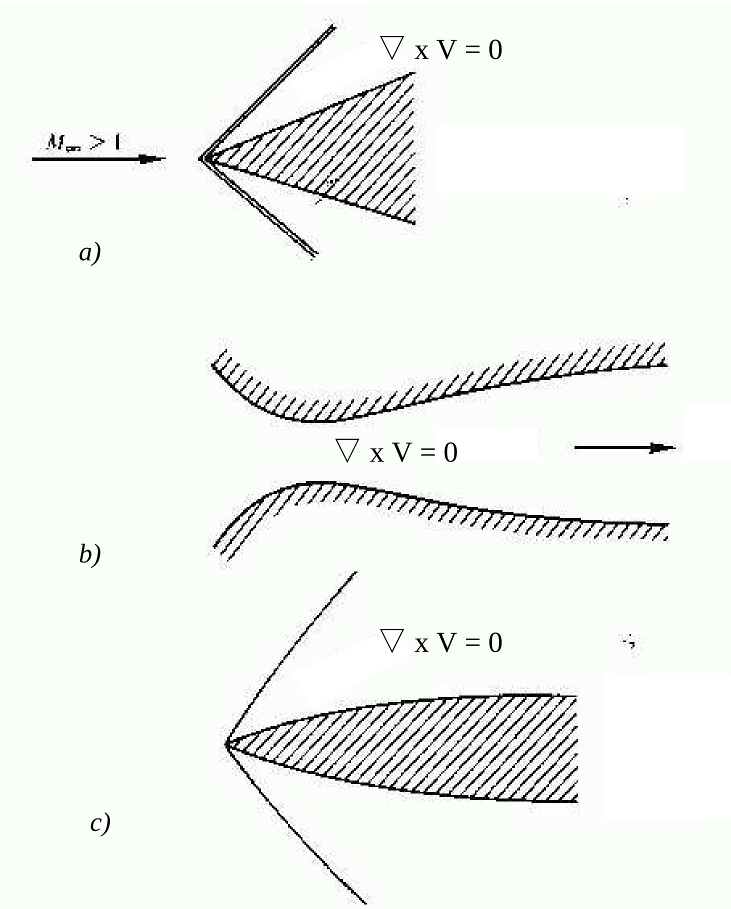


Figura 6.2: Esempi di flussi irrotazionali: a) flusso supersonico intorno ad un cuneo; b) flusso bidimensionale o assialsimmetrico in un ugello; c) flusso supersonico intorno ad un corpo affusolato.

Si consideri la ben nota equazione di Eulero senza forze di massa (flusso comprimibile):

$$\rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{V} \right) = -\boldsymbol{\nabla} p. \tag{6.1}$$

Per un flusso irrotazionale stazionario (la variabile indipendente è il solo vettore posizione $\boldsymbol{r}$), essa, in virtù della seguente identità vettoriale,

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) - \boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}), \tag{6.2}$$

diventa:

$$\rho \boldsymbol{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\boldsymbol{\nabla} p. \tag{6.3}$$

L'equazione (6.3) è l'equazione di Eulero per un flusso stazionario irrotazionale, che è fondamentale per ricavare l'equazione del potenziale di velocità. Essa ci dice che la variazione di pressione in una qualsiasi direzione nello spazio è pari a meno il prodotto della densità per la variazione dell'energia cinetica. Questo risultato si ottiene moltiplicando scalarmente l'equazione (6.3) per uno spostamento elementare arbitrario $d\boldsymbol{s}$. Per un flusso rotazionale esso vale solo lungo la direzione del flusso ($d\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{V}$).

## 6.3 Equazione del potenziale di velocità

Consideriamo un vettore $\boldsymbol{A}$. Se $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ in ogni punto, allora $\boldsymbol{A}$ può essere sempre espresso come $\boldsymbol{\nabla}\zeta$, in cui $\zeta$ è una funzione scalare. Questo deriva direttamente dall'identità vettoriale, rot(grad) $\equiv 0$. Quindi, per qualsiasi funzione scalare $\zeta$,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\zeta) = 0. \tag{6.4}$$

Per il flusso irrotazionale, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = 0$, possiamo dunque definire una funzione scalare $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r})$, detta *potenziale di velocità*, tale che

$$\boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{\nabla}\Phi. \tag{6.5}$$

Quindi, se è noto il potenziale di velocità, la velocità può essere ricavata direttamente dall'equazione (6.5).

L'equazione del potenziale di velocità si ottiene combinando l'equazione di Eulero (6.3), la definizione del potenziale di velocità, (6.5), le equazioni di conservazione della massa e dell'energia per flussi stazionari e la condizione di isoentropia del flusso. Infatti, considerando l'equazione della conservazione della massa per flussi stazionari:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0,$$

si ha, utilizzando la (6.5):

$$\rho \nabla^2 \Phi + \boldsymbol{\nabla}\rho \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0. \tag{6.6}$$

Ricordando che il flusso è isoentropico, ad ogni variazione di densità corrisponde una variazione di pressione data da:

$$\nabla p = a^2 \nabla \rho. \tag{6.7}$$

Combinando questa equazione con la (6.3) e utilizzando nuovamente la (6.5), si ha:

$$\nabla \rho = -\frac{\rho}{a^2} \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\rho}{2\,a^2} \nabla \left( \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right). \tag{6.8}$$

Combinando la (6.8) e la (6.6), si ottiene infine:

$$-\frac{1}{2\,a^2} \nabla \left( \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \cdot \nabla \Phi + \nabla^2 \Phi = 0, \tag{6.9}$$

che viene chiamata *equazione del potenziale di velocità*. L'equazione (6.9) contiene anche la velocità del suono $a$. Per poter ottenere un'equazione nella sola variabile dipendente $\Phi$, bisogna esprimere $a$ in termini di $\Phi$. Dall'equazione dell'energia, equazione (2.5), si ha:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right). \tag{6.10}$$

Dal momento che $a_0$ è una costante nota del flusso, l'equazione (6.10) fornisce la velocità del suono in funzione di $\Phi$.

Riassumendo, l'equazione (6.9) accoppiata con la (6.10), costituisce una singola equazione per l'incognita $\Phi$ e contiene tutte le equazioni di conservazione di un moto comprimibile non viscoso stazionario e isoentropico; tali flussi possono quindi essere risolti con la seguente procedura:

1. Si calcoli $\Phi$ dalle equazioni (6.9) e (6.10), per le condizioni al contorno del problema considerato.

2. Si calcoli $\boldsymbol{V}$ dall'equazione (6.5).

3. Si calcoli la velocità del suono dall'equazione (6.10).

4. Si calcoli il numero di Mach, $M = V/a$.

5. Si calcolino, infine, $T$, $p$ e $\rho$ usando le equazioni di flusso isoentropico, essendo ovviamente costanti le grandezze totali $a_0$, $p_0$, $T_0$, $\rho_0$.

Quindi, una volta calcolato il potenziale di velocità $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r})$, risulta noto l'intero campo di moto. Questo dimostra l'importanza di $\Phi$.

Si noti che l'equazione (6.9), combinata con la (6.10), è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare. Essa vale per ogni flusso isoentropico irrotazionale; subsonico, transonico, supersonico o ipersonico. Essa si applica anche al flusso incomprimibile ($a \to \infty$), per cui si riduce alla familiare equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \tag{6.11}$$

È opportuno osservare che le equazioni (6.9) e (6.10) risultano esatte se il flusso è isoentropico e irrotazionale. Per esse, tuttavia, non c'è una soluzione generale in forma chiusa e quindi la soluzione è di solito ottenuta in uno dei modi seguenti:

1. Soluzioni numeriche *esatte*. Questo approccio rende difficoltoso formulare procedimenti e regole generali — i risultati sono numeri che hanno bisogno di analisi, esattamente come i dati sperimentali ottenuti in laboratorio. Tuttavia, le tecniche della fluidodinamica computazionale moderna stanno rendendo le soluzioni numeriche di flussi comprimibili estremamente agevoli, permettendo soluzioni per applicazioni complesse.

2. Trasformazioni di variabili, capaci di rendere l'equazione del potenziale di velocità lineare, ma ancora esatta. Gli esempi di questo tipo sono scarsi. Un metodo è la soluzione odografa per flussi subsonici, come descritta da Shapiro [5]. A causa della sua limitata utilità, questa tecnica non verrà considerata.

3. Soluzioni linearizzate. In questo caso si ricavano delle equazioni lineari che sono approssimazioni di quelle esatte non lineari, ma che consentono una soluzione analitica. Un gran numero di problemi di ingegneria si presta ad approssimazioni ragionevoli che rendono lineare l'equazione del potenziale di velocità. La teoria aerodinamica storicamente abbonda di teorie linearizzate. Questo sarà l'argomento del prossimo capitolo.