

Dinamica del Corpo Rigido

Corpo rigido

- È un caso particolare dei sistemi di punti materiali
- È di grande importanza per le applicazioni pratiche
- Un corpo è detto rigido se le distanze tra tutte le possibili coppie di punti del corpo non cambiano

Corpo rigido

- Astrazione che si applica tanto meglio quanto più i corpi sono indeformabili
- Un corpo perfettamente rigido non esiste
- Dal punto di vista microscopico la rigidità dei solidi è dovuta a forze di natura elettrica tra gli atomi costituenti

Moto del corpo rigido

- È determinato da una o più forze esterne, generalmente applicate in punti diversi del corpo
- Le forze sono quindi caratterizzate da una forza risultante \mathbf{F} e da un momento risultante τ
- Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo quindi la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze esterne

Moto del corpo rigido

- Le leggi fondamentali sono le equazioni cardinali della meccanica

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Si può anche usare la conservazione dell'energia meccanica nel caso in cui le forze in gioco siano conservative o si abbia attrito statico

$$\Delta E = 0$$

Equilibrio statico del corpo rigido

- Un corpo rigido è in equilibrio statico se e solo se:
 - è inizialmente in quiete:
 - \vec{P} e \vec{L} non variano nel tempo

$$\vec{P} = 0 \qquad \vec{L} = 0$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Equilibrio statico del corpo rigido

- Dalla prima eq. segue che $\vec{F} = 0$
- Dalla seconda che $\vec{\tau} = 0$
- Il momento è indipendente dal polo scelto e quindi il polo può essere un punto qualunque

Traslazione di un corpo rigido

- Tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in genere curvilinee, con la stessa velocità, in genere varia
- Ogni punto ha lo stesso moto del CM: la conoscenza del moto del CM basta per conoscere il moto di tutti i punti del corpo
- Gli assi del sistema solidale col corpo rimangono sempre paralleli a quelli del SCM

Traslazione di un corpo rigido

- QM ed energia cinetica del corpo rigido:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

- L'equazione del moto del CM è

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM}$$

- Il momento angolare è:

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

Rotazione di un corpo rigido

- Ogni punto descrive un moto circolare, la traiettoria è un arco di circonferenza, di raggio diverso per ogni punto considerato, ma con centro su una stessa retta, detta asse di rotazione
- La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano la stessa velocità angolare ω in un dato istante, parallela all'asse di rotazione

Rotazione di un corpo rigido

- Se l'asse è fisso nel tempo ω può cambiare solo in modulo e verso
- Nel caso più generale ω può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile)

Moto di un corpo rigido

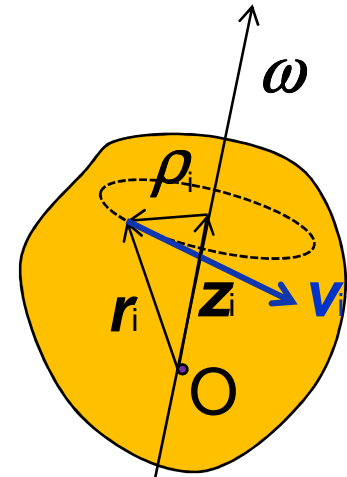
- Traslazione e rotazione sono i moti più importanti, in quanto vale il seguente teorema di meccanica razionale:

ogni spostamento infinitesimo puo` sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime con velocita` v e ω variabili nel tempo

Moto di un corpo rigido

- Per descrivere una rototraslazione si utilizzano le equazioni cardinali:
 - il teorema del moto del CM
 - il teorema del momento angolare
- In una rototraslazione le velocità \mathbf{v} e ω sono, in generale, indipendenti
- In situazioni in cui è presente un vincolo le due velocità possono essere legate da una relazione che elimina tale indipendenza (rotolamento puro)

Momento angolare di un corpo rigido in rotazione



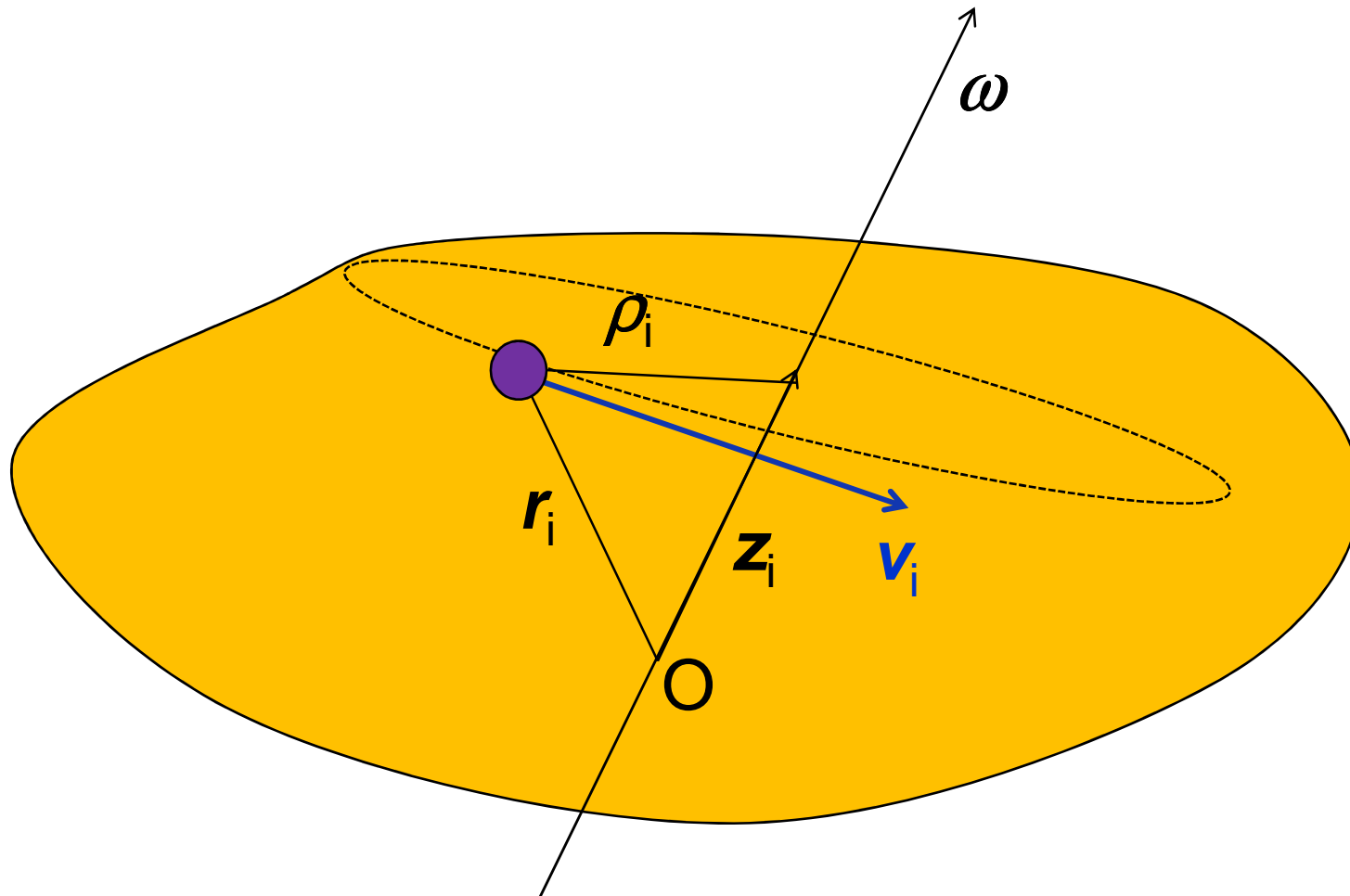
- Calcoliamo il momento angolare di un corpo esteso in rotazione attorno ad un asse, supposto inizialmente fisso, con velocità angolare ω , rispetto al polo O scelto sull'asse

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

- Scomponiamo $\vec{r}_i(t)$ lungo l'asse z di rotazione e della direzione ad esso perpendicolare

$$\vec{r}_i(t) = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i \quad \vec{\rho}_i = (x_i, y_i)$$

Momento angolare di un corpo rigido in rotazione



Scomposizione del momento angolare

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i [\vec{z}_i + \vec{\rho}_i] \times (\vec{\omega} \times [\vec{z}_i + \vec{\rho}_i])$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i + z_i \hat{\omega}) \times [\vec{\omega} \times (\vec{\rho}_i + z_i \hat{\omega})]$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i + z_i \hat{\omega}) \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i + \vec{\omega} \times z_i \hat{\omega}]$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i + z_i \hat{\omega}) \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i + 0]$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum_i m_i z_i \hat{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

Momento angolare di un corpo rigido in rotazione

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i] + \sum_j m_j z_j \hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_j]$$

$$\vec{\rho}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i] = |\rho_i|^2 \vec{\omega}$$

$$\hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_j] = -\vec{\rho}_j \omega$$

$$\vec{L} = \left[\sum_i m_i \rho_i^2 \right] \vec{\omega} - \left[\sum_j m_j z_j \vec{\rho}_j \right] \omega \equiv \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp}$$

Momento angolare

- Il termine longitudinale è proporzionale al vettore velocità angolare

$$\vec{L}_{//} = \left[\sum_i m_i \rho_i^2 \right] \vec{\omega} = \left[\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

- La costante di proporzionalità è detta momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione scelto
 - è indipendente dalla posizione del polo sull'asse (ρ non dipende dalla posizione di O)
 - è indipendente dal tempo (ρ non dipende da t perchè il corpo è rigido)

Momento angolare trasversale

- Il termine trasversale

$$\vec{L}_{\perp} = -\omega \sum_k m_k z_k (x_k \hat{i} + y_k \hat{j}) = -\omega \sum_k m_k z_k \vec{\rho}_k$$

- dipende dal tempo (tramite x e y oppure ρ_l)
- dipende dalla posizione del polo sull'asse (tramite z)
- quindi non ci piace tanto perchè ci complica notevolmente la vita
- Questo termine è 0 quando l'asse di rotazione
 - è un asse di simmetria della distribuzione di massa del corpo (allora per ogni punto x,y,z esiste un punto $-x,-y,z$ che compensa il primo)
 - è un asse principale d'inerzia (vedi oltre)

Momento d'inerzia

- Per definire il momento d'inerzia di un corpo, bisogna conoscerne la distribuzione di massa, cioè la distanza degli elementi di massa dall'asse attorno a cui ruota

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \rho_i^2$$

- Per una distribuzione continua di massa

$$I = \int_{V_{corpo}} (x^2 + y^2) dm = \int_{V_{corpo}} \rho^2 dm$$

Momento d'inerzia

- Ne segue che cambiando l'asse di rotazione, cambia il momento d'inerzia, cioè la costante (indipendente dal tempo!) che lega il momento angolare longitudinale alla velocità angolare
- I è una grandezza scalare **estensiva**, cioè tale che per un sistema scomponibile in parti, può essere calcolata come somma dei contributi delle singole parti
- **non è una proprietà intrinseca** del corpo, perchè dipende rispetto a quale asse si calcola

Assi principali d'inerzia

- Teorema di Poinsot (senza dimostrazione):
 - dato un corpo rigido qualunque, comunque venga scelto un punto O , è sempre possibile trovare tre direzioni mutuamente ortogonali passanti per O , per ognuna delle quali L è parallelo a ω
- Questi assi sono detti assi principali d'inerzia
- Se O coincide con il CM, gli assi si dicono assi centrali d'inerzia

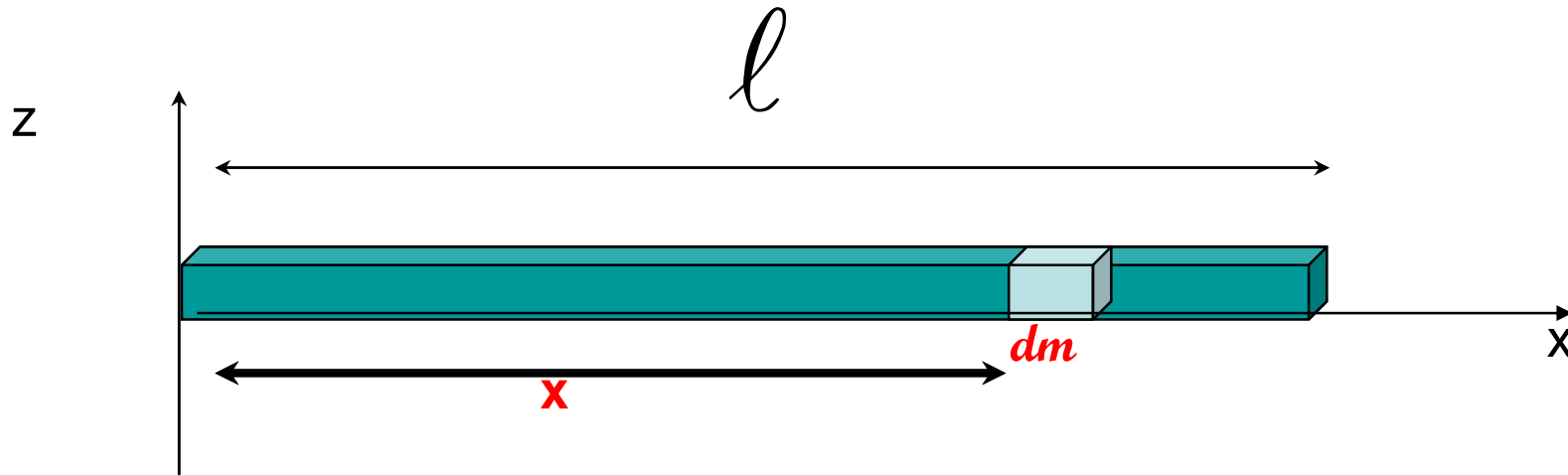
Calcolo del momento d'inerzia

- Asta omogenea
- Disco omogeneo
- Sfera omogenea

Esempi di calcolo del Momento di inerzia

Momento d'inerzia di un asta omogenea di lunghezza l e massa M :

i) rispetto ad un asse perpendicolare passante per un suo estremo :



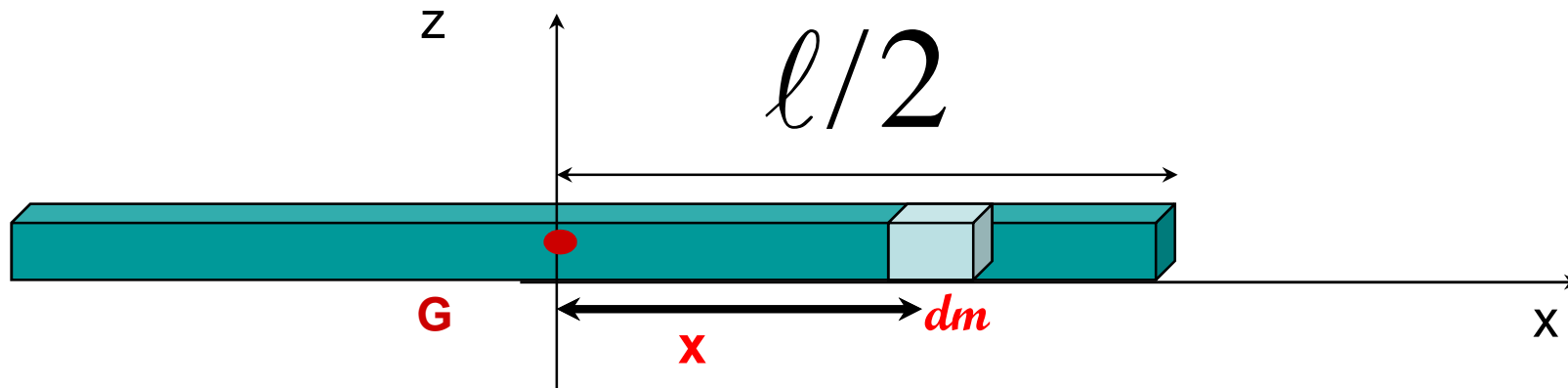
$$I_z \equiv \int_{\text{Corpo}} x^2 dm = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{\lambda l^3}{3} \quad \longrightarrow \quad I_z = \frac{M l^2}{3}$$

densità lineare $\lambda = \frac{M}{l} = \frac{dm}{dx}$

Esempi di calcolo del Momento di inerzia

Momento d'inerzia di un asta omogenea di lunghezza l e massa M :

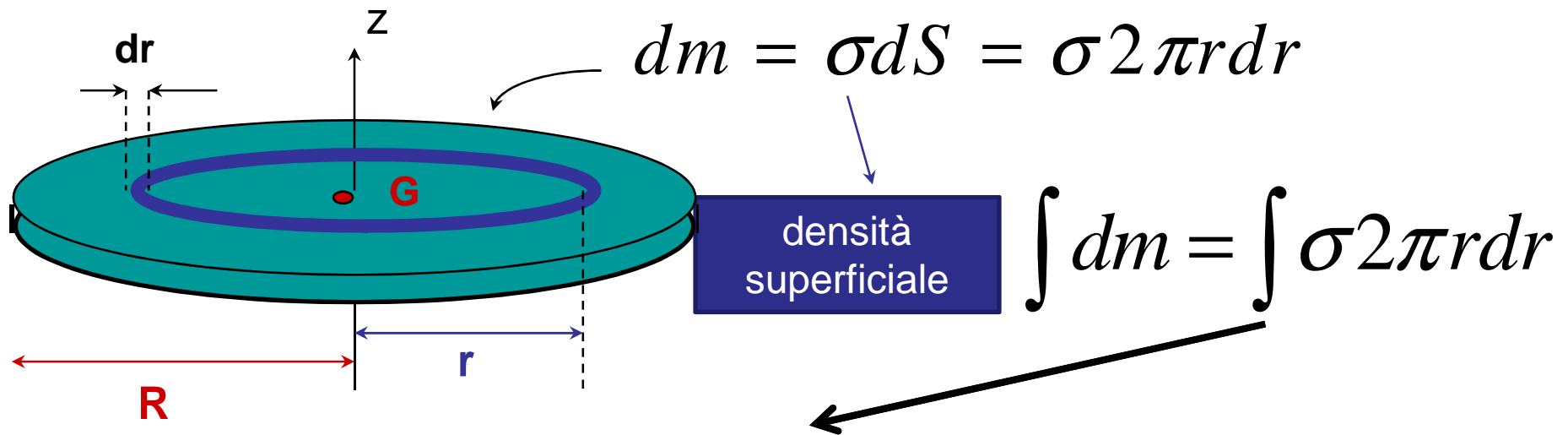
ii) rispetto ad un asse perpendicolare passante per il suo centro di massa :



$$I_z \equiv 2 \int_0^{l/2} x^2 \lambda dx = \frac{2\lambda l^3}{24} \Rightarrow I_z = \frac{M l^2}{12}$$

Esempi di calcolo di momenti di inerzia

- i) **Momento d'inerzia** di un **disco omogeneo** di raggio R e massa M rispetto all'asse perpendicolare passante per il suo centro di massa :

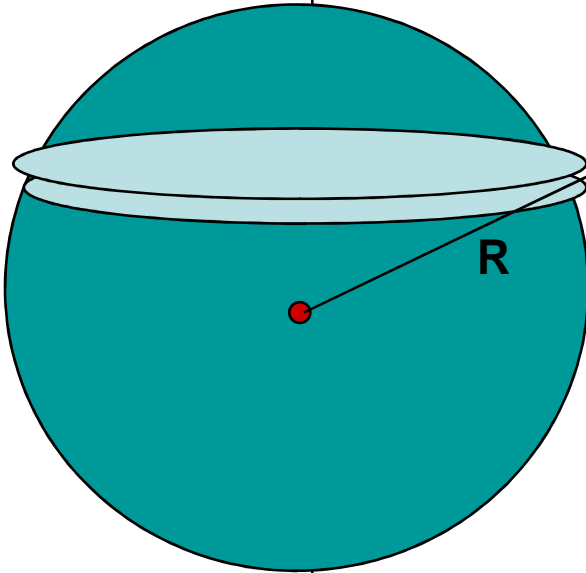


$$M = \sigma 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \sigma 2\pi \frac{R^2}{2} = \sigma \pi R^2 \Rightarrow \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$I_{z_G} \equiv \int_{Corpo} r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = \frac{2\pi\sigma R^4}{4} = \frac{(\pi\sigma R^2) R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

Esempi di calcolo di momenti di inerzia

ii) Momento d'inerzia di una **sfera omogenea** di raggio R e massa M :



$r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$

Rotazione semicirconferenza di raggio R

$$dM = \rho dV = \rho \pi r^2(z) dz$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

m.i. disco infinitesimo

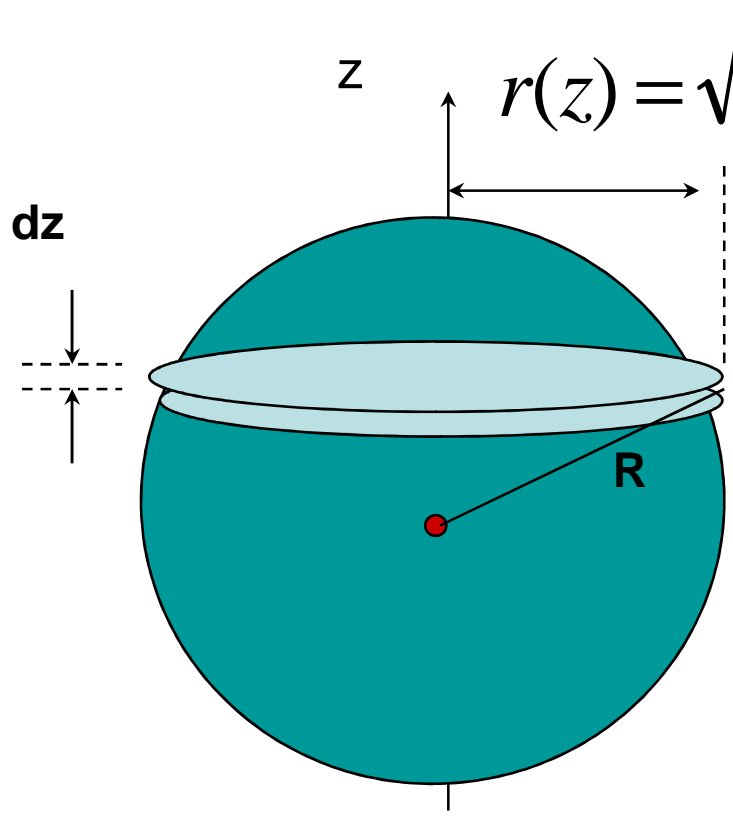
$dI = \frac{1}{2} r^2 dM$

➔

$dI = \frac{1}{2} r^2 \rho \pi r^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz$

Esempi di calcolo di momenti di inerzia

ii) Momento d'inerzia di una **sfera omogenea** di raggio R e massa M :



The diagram shows a teal sphere of radius R with a vertical z -axis. A horizontal slice of thickness dz is shown at height z . The radius of the slice is $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. The center of mass of the slice is at the center of the sphere.

$$I_G = \int_{-R}^R dI = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz$$
$$I_G = \int_0^R \rho \pi (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$

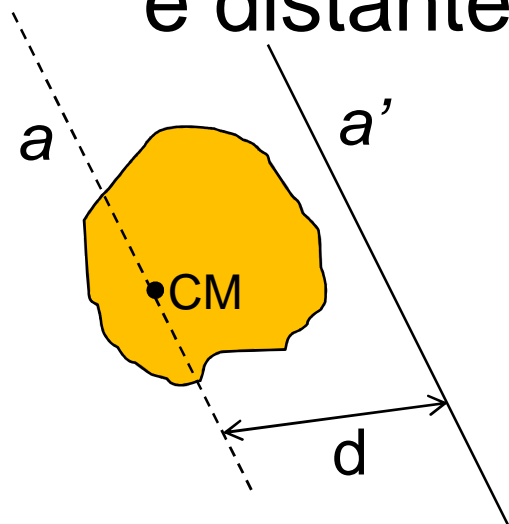
$$\rho \pi \left[R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{R^5}{5} \right] = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 \quad \Rightarrow \quad I_G = \frac{2}{5} M R^2$$

Come facilitare il calcolo del momento d'inerzia

- I calcoli più semplici sono quelli per assi di rotazione coincidenti con assi di simmetria passanti per il CM
- Per assi paralleli a questi assi, esiste un teorema che permette di calcolare semplicemente i momenti d'inerzia relativi

Teorema di Huygens-Steiner

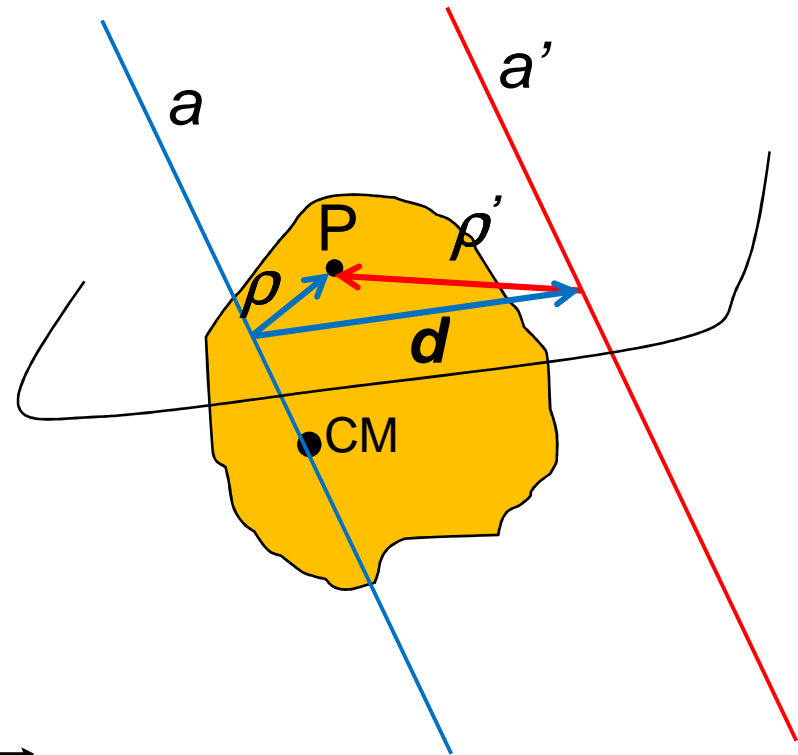
- Detto I il momento d'inerzia di un corpo di massa m , rispetto ad un asse a passante per il CM, il momento d'inerzia rispetto ad un asse a' parallelo al primo e distante d da questo e'



$$I' = I + md^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

- Detto P il generico punto del corpo, tracciamo il piano passante per P e perpendicolare ai due assi paralleli
- Sia ρ la distanza di P dall'asse a e ρ' la distanza di P dall'asse a'
- Vale la relazione $\vec{\rho}' = \vec{\rho} - \vec{d}$



Dimostrazione del teorema di Huygens-Steiner

- Il momento d'inerzia rispetto ad a' è

$$I' = \int_{\text{corpo}} \rho'^2 dm = \int_{\text{corpo}} (\vec{\rho} - \vec{d})^2 dm =$$

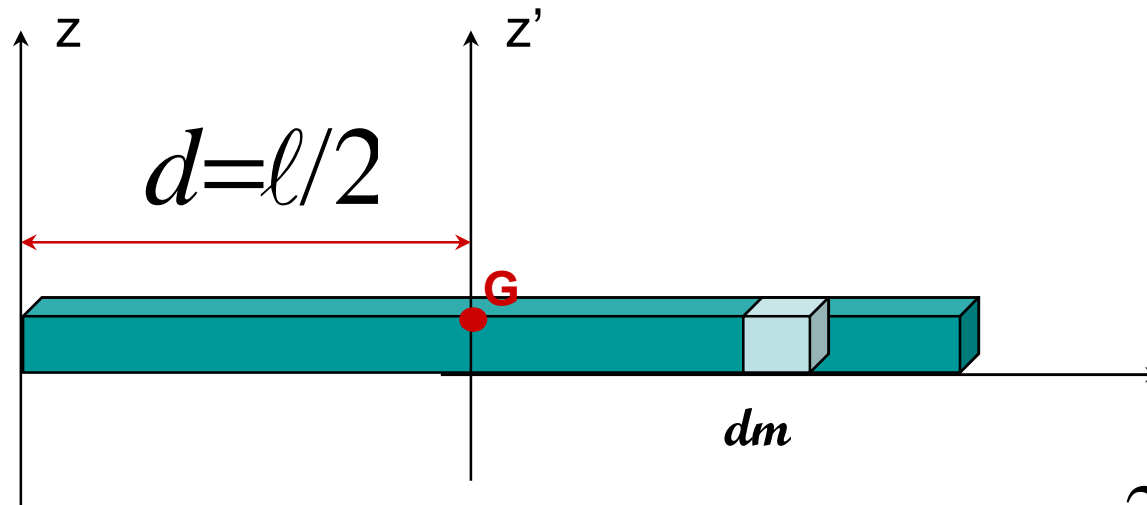
$$\int_{\text{corpo}} \rho^2 dm - 2\vec{d} \int_{\text{corpo}} \vec{\rho} dm + d^2 \int_{\text{corpo}} dm =$$

$$I - 2\vec{d} \cdot m \vec{\rho}_{CM} + md^2$$

- Il secondo termine è nullo, in quanto il centro di massa appartiene all'asse a

- quindi $I' = I + md^2$

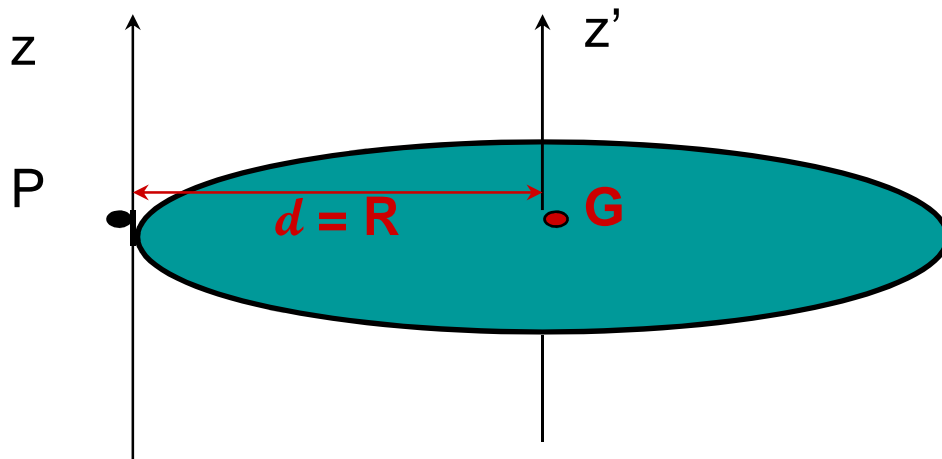
Esempi di applicazione del teorema di Steiner :



$$\begin{aligned} I_z &= I_{z'_{CM}} + Md^2 = \\ &= \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3} \end{aligned}$$

Esempi di applicazione del teorema di Steiner :

Momento d'inerzia di un **disco omogeneo** di massa M e raggio R rispetto ad un **asse ad esso perpendicolare** passante per un **punto P sul suo bordo** :



$$\begin{aligned} I_{z_P} &= I_{z', CM} + M d^2 = \\ &= \frac{M R^2}{2} + M R^2 = \frac{3 M R^2}{2} \end{aligned}$$

Energia cinetica di rotazione

- Partendo dalla definizione di K

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

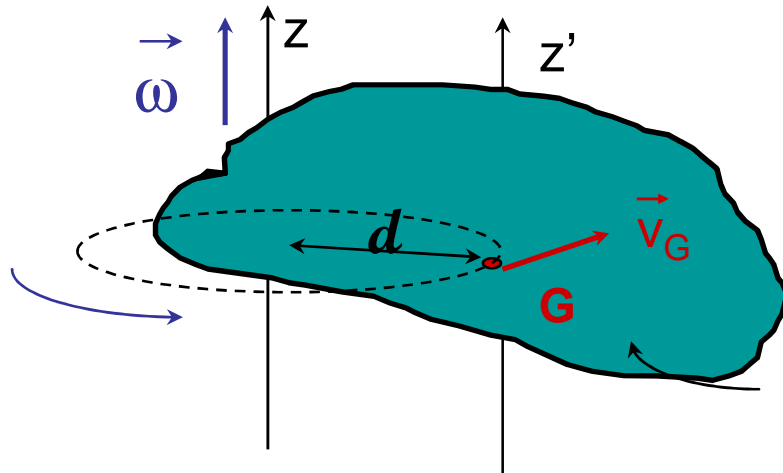
- Ricordando che $|\vec{L}_{//}| = |I \vec{\omega}|$
- Possiamo scrivere

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L_{//} \omega = \frac{1}{2} \frac{L_{//}^2}{I}$$

- L'energia cinetica di rotazione dipende dal momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, ovvero dal momento angolare longitudinale

Teorema di Koenig

Corpo in rotazione intorno all'asse z



$$v_G = \omega d$$

t. di Huygens-Steiner

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{z'} + M d^2) \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} M (d \omega)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

Lavoro forze esterne

- In seguito all'azione di un momento esterno, la velocità angolare di un corpo viene portata dal valore iniziale ω_1 a quello finale ω_2
- Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di K è uguale al lavoro delle forze agenti sul sistema
- Per un corpo rigido, solo le forze esterne danno un contributo

$$\Delta K = W^E$$

Lavoro e potenza

- In termini infinitesimi

$$dK = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega d\omega = I \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I \alpha d\theta = \tau_{//} d\theta = dW^E$$

- Integrando gli ultimi due membri otteniamo il lavoro come integrale del momento nella variabile angolare

$$\int_0^{\Theta} \tau_{//} d\theta = \int_I^F dW^E = W^E$$

- Esprimiamo la potenza in funzione del momento e della velocità angolare

$$\mathcal{P} = \frac{dW^E}{dt} = \tau_{//} \frac{d\theta}{dt} = \tau_{//} \omega$$

Rotazione intorno ad un asse fisso

- È un caso particolare di grande importanza pratica nello studio di macchine e motori
- Il vettore ω ha la direzione fissa dell'asse, mentre modulo e verso possono cambiare nel tempo
- Se ω non è costante, il vettore accelerazione angolare
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$
- è diverso da zero e diretto lungo l'asse

Rotazione con asse fisso e $\mathbf{L} // \boldsymbol{\omega}$

- Il caso più semplice è quello in cui il momento angolare è parallelo all'asse, ovvero la componente trasversale è nulla; in tal caso

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- \mathbf{L} può variare in modulo e verso, ma non in direzione, quindi la sua derivata è parallela a $\boldsymbol{\omega}$
- Quindi, il teorema del momento angolare impone che il momento delle forze $\boldsymbol{\tau}$ che fa variare \mathbf{L} sia anch'esso parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Leftrightarrow \tau_{//} = \frac{dL_{//}}{dt} = I\alpha$$

Rotazione con asse fisso e $L // \omega$

- Risolvendo l'equazione rispetto all'accelerazione

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau_{//}}{I}$$

- Noto il momento, si può ricercare l'integrale primo del moto

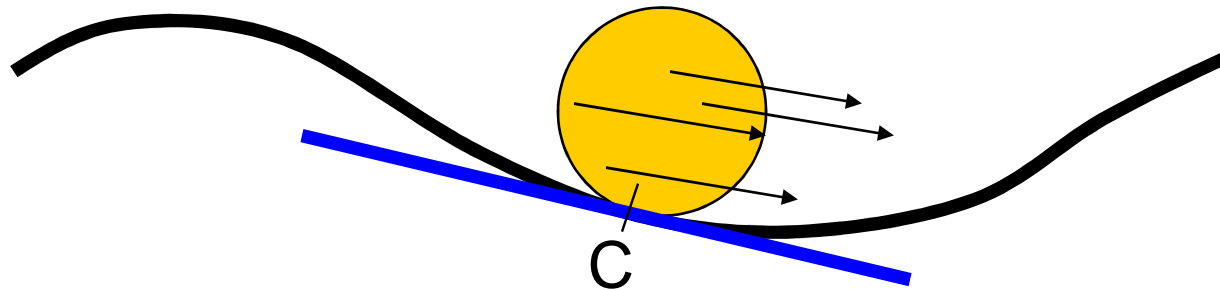
$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha dt = \int_0^t \frac{\tau_{//}}{I} dt$$

- In particolare se il momento è costante

$$\omega(t) - \omega(0) = \frac{\tau_{//}}{I} t$$

Slittamento

- Immaginiamo un corpo cilindrico o sferico in moto rispetto alla superficie di appoggio



- Se le velocità di tutti i punti sono uguali e sono parallele al piano tangente localmente alla superficie, abbiamo un moto di traslazione e il corpo slitta sulla superficie

Rotolamento

- In generale un corpo *rotola* sulla superficie
- Se il punto di contatto C tra corpo e superficie è fermo, istante per istante, si ha rotolamento puro
- Altrimenti avremo contemporaneamente slittamento e rotolamento

Rotolamento puro

- Tra superficie e corpo esiste una forza di attrito che mantiene fermo il punto di contatto C, istante per istante
- La velocità del punto C (o di qualsiasi altro punto) a distanza r dal CM è

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_C^* = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Rotolamento puro

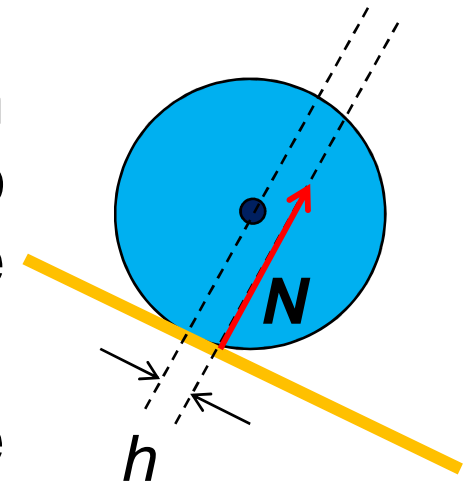
- La condizione di puro rotolamento è $\vec{v}_C = 0$
- ovvero $\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$
- In modulo la velocità del CM è $v_{CM} = \omega r$
- E l'accelerazione
$$a_{CM} = \alpha r$$
- Cioè nel moto di puro rotolamento esiste una relazione precisa tra velocità del CM e velocità angolare

Rotolamento puro

- A questo moto si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica
- Questo è possibile perché la forza d'attrito agisce sul punto di contatto, che è fermo, e quindi non compie lavoro
- Nuovamente questo è un caso limite: un corpo libero che rotola su un piano orizzontale, presto o tardi si arresta

Attrito volvente

- Si modella questo fenomeno con una nuova forma di attrito, detto volvente, che è attivo tra il corpo e la superficie di appoggio
- È causato dalla deformazione locale del corpo e della superficie
- Per una ruota in moto, la retta d'azione della componente normale N della reazione vincolare alla superficie d'appoggio non contiene il centro della ruota



Attrito volvente

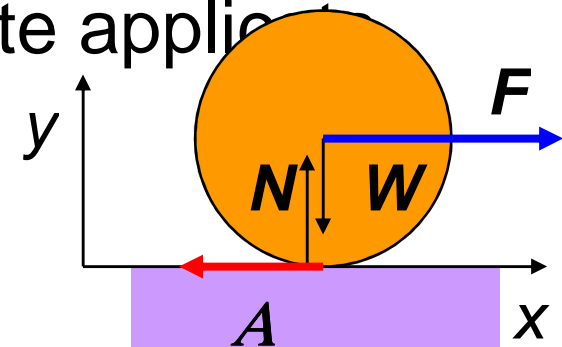
- L'effetto è modellizzato da un momento che si oppone al moto

$$\tau_v = hN$$

- h è il braccio di N ed è detto coefficiente di attrito volvente)
- L'effetto dell'attrito volvente è sempre molto minore di quello dell'attrito radente e statico, per cui è generalmente trascurabile
- Da qui deriva il grande vantaggio che si ottiene, in molti casi, di dotare i veicoli di ruote piuttosto che di pattini

Moto di rotolamento

- Consideriamo un corpo di massa m e raggio r che rotola su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza F costante applicata all'asse
- Sul corpo agiscono anche la forza peso W e la reazione del vincolo R
- R si scompone in una forza normale al vincolo N e una forza di attrito A parallela al vincolo
- A deve opporsi al moto del punto di contatto verso $+x$ e quindi dev'essere diretta verso $-x$



Moto di rotolamento

- Dalla 1^a equazione cardinale:

$$\vec{F} + \vec{A} + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

- che proiettata lungo x e y dà

$$F - A = ma_{CM} \qquad -W + N = 0$$

- dato che l'accelerazione è diversa da zero solo lungo x , mentre è nulla lungo y
- La seconda equazione permette di trovare N :

$$N = W$$

- La prima equazione contiene l'incognita a_{CM} e la forza d'attrito A

Moto di rotolamento

- Dalla 2^a equazione cardinale:

$$\tau_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt}$$

- Scelto il CM come polo si ha:

$$rA = \frac{d}{dt} (I\omega) = I\alpha$$

Moto di rotolamento

- Questa equazione contiene l'incognita α e la forza d'attrito A
- Distinguiamo due casi:
 - attrito statico:

$$A \leq A_{\max} = \mu_s N$$

- attrito dinamico:

$$A = \mu_d N$$

Moto di rotolamento puro

- In totale abbiamo due equazioni e tre incognite

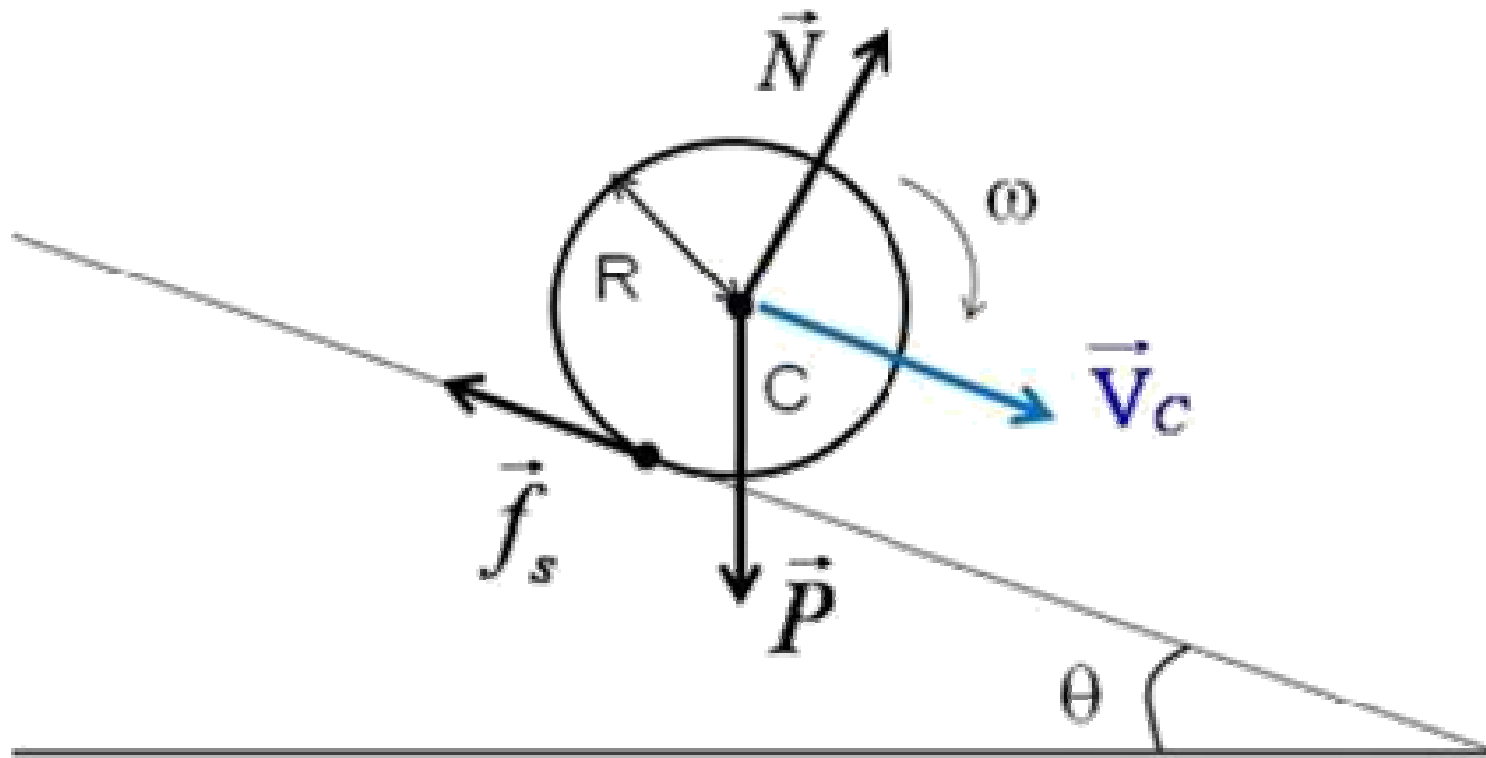
$$F - A = ma_{CM} \quad rA = I\alpha$$

- Con la condizione di rotolamento: $a_{CM} = \alpha r$

- Risolvendo per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{Fr^2}{I + mr^2} \quad \alpha = \frac{Fr}{I + mr^2} \quad A = \frac{FI}{I + mr^2}$$

Sfera che rotola su piano inclinato



Sfera che rotola su piano inclinato

$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \sin \theta - f_s = m a_c \\ f_s \cdot R = I_c \cdot \alpha_c \end{cases} \Rightarrow a_c = \left(\frac{m \cdot R^2}{m \cdot R^2 + I_c} \right) g \sin \theta \leq g \sin \theta$$

$$\left(\frac{a_c}{g \cdot \sin \theta} \right) = \frac{5}{7} \text{ (sfera)} > \frac{2}{3} \text{ (cilindro)} > \frac{1}{2} \text{ (anello)}$$

$$f_s = \left(\frac{I_c}{m R^2 + I_c} \right) g \cdot \sin \theta$$

Sfera che rotola su piano inclinato - Energia

$$Mgh = K_{CM} = \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

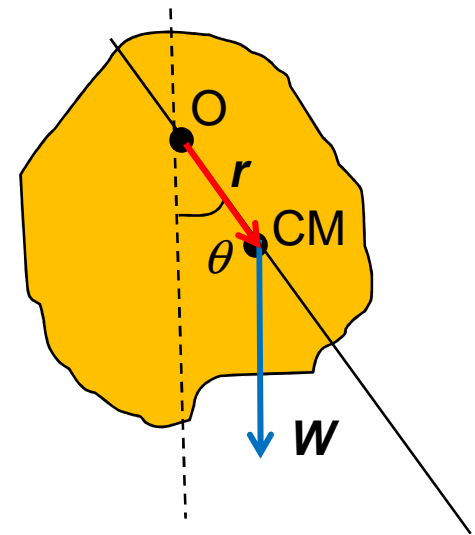
$$2gh = v_{CM}^2 \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right)$$

$$\frac{I_{sfera}}{MR^2} = \frac{2}{5}; \frac{I_{cilindro}}{MR^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \text{sfera} & 2gh = v_{CM}^2 \left(\frac{7}{5} \right) \Rightarrow v_{CM}^2 = \frac{10}{7} gh \\ \text{cilindro} & 2gh = v_{CM}^2 \left(\frac{3}{2} \right) \Rightarrow v_{CM}^2 = \frac{4}{3} gh \end{cases}$$

APPROFONDIMENTI

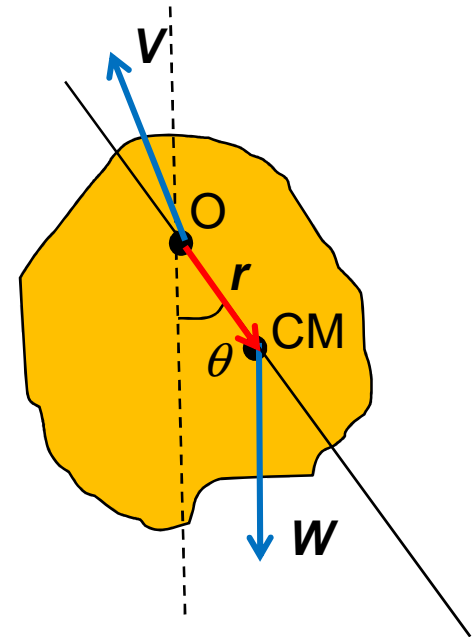
Pendolo fisico

- E' un qualunque corpo rigido oscillante attorno ad un asse orizzontale (non passante per il CM)
- Consideriamo la sezione del corpo perpendicolare all'asse e contenente il CM
- Sia O la traccia dell'asse di rotazione e r la distanza di O dal CM, W il peso del corpo e θ l'angolo formato da r con la verticale



Pendolo fisico

- L'asse è vincolato a rimanere fisso, esisterà quindi una forza vincolare V che agisce sul corpo
- Come ogni forza vincolare, essa è, a priori, incognita e sarà determinata a posteriori dopo aver risolto l'equazione del moto
- Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche con origine O , asse polare verticale e asse $z =$ asse di rotazione con verso uscente dal foglio



Pendolo fisico

- Le componenti del peso sono

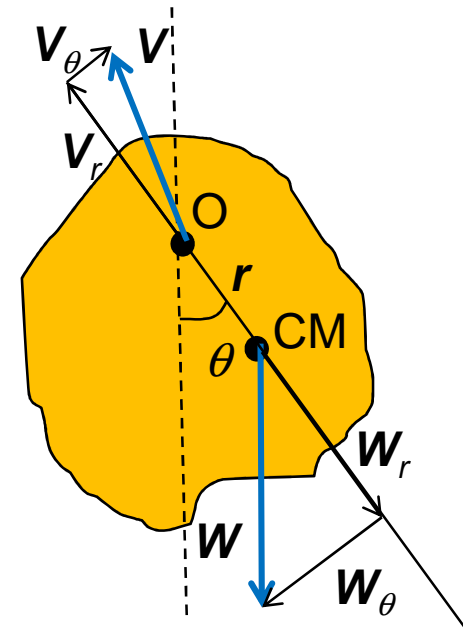
$$W_r = W \cos \theta$$

$$W_\theta = -W \sin \theta$$

- Le componenti della forza vincolare

$$V_r, V_\theta$$

- Entrambe le forze hanno componente z nulla



Pendolo fisico

- Scegliamo O come polo per il calcolo dei momenti: questo è conveniente perché la forza vincolare incognita ha momento nullo rispetto a O e il momento risultante τ è uguale al momento della forza peso

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W}$$

- Applichiamo al corpo le equazioni cardinali

$$\vec{F}_e = \vec{W} + \vec{V} = M\vec{a}^{(CM)} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Pendolo fisico

- Per i momenti si ha:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt}$$

- Note le espressioni del momento di forza e del momento angolare

$$\tau_z = rW_\theta = -rW \sin \theta \quad L_z = I\omega$$

Si ha:

$$-rW \sin \theta = \frac{d}{dt}(I\omega) = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- da cui si ricava la legge oraria $\theta(t)$

Pendolo fisico

- Per le forze abbiamo le due equazioni

$$W_r + V_r = Ma_r^{(CM)} = -M\omega^2 r = -Mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$W_\theta + V_\theta = Ma_\theta^{(CM)} = M \frac{d\omega}{dt} r = Mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

che ci servono per trovare le componenti della reazione vincolare

$$V_r = -W_r - Mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$V_\theta = -W_\theta + Mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Pendolo fisico

- Risolviamo ora l'equazione differenziale per $\theta(t)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \sin \theta$$

- Per piccole oscillazioni possiamo confondere il seno con l'arco, ottenendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \theta = -\Omega^2 \theta \Rightarrow \theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$$

- Equazione del moto armonico con pulsazione Ω e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{rW}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^*}{g}}$$

Moto di slittamento

- Nel caso di slittamento abbiamo solo due equazioni, ma anche solo due incognite perché siamo in regime di attrito dinamico in cui:

$$A = \mu_d N = \mu_d W$$

- Risolvendo per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{F - \mu_d W}{m} \quad \alpha = \frac{r\mu_d W}{I}$$

Moto di rotolamento puro

- Quand'è possibile il rotolamento puro? Occorre che la soluzione trovata per A sia minore del valore statico massimo

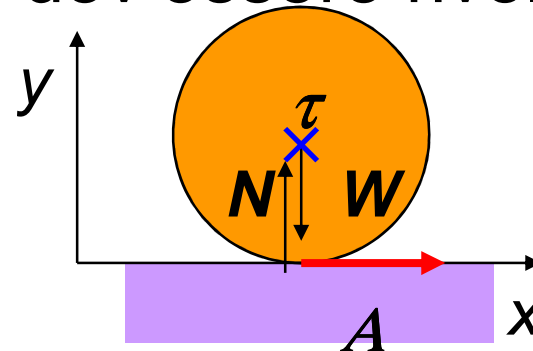
$$A = \frac{FI}{I + mr^2} \leq \mu_s N$$

- Questo impone un limite al valore di F :

$$F \leq \mu_s W \frac{I + mr^2}{I}$$

Moto di rotolamento

- Il corpo sia ora sotto l'azione di un momento costante τ applicato all'asse (entrante nel foglio)
- Quanto detto prima per la reazione del vincolo R continua a valere, eccetto che ora la forza d'attrito deve opporsi al moto del punto di contatto verso $-x$ e quindi dev'essere rivolta verso $+x$



Moto di rotolamento

- 1^a equazione cardinale:

$$\vec{A} + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

- che proiettata lungo x e y dà

$$A = ma_{CM} \quad -W + N = 0$$

- Di nuovo la seconda equazione permette di trovare N :

$$N = W$$

- Dalla prima segue che quando un motore fa girare una ruota, è la forza d'attrito a spingere avanti la ruota

Moto di rotolamento

- 2^a equazione cardinale: $\tau_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt}$

- Scelto il CM come polo

$$\tau - rA = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha$$

- Distinguiamo, come prima, due casi.

Moto di rotolamento puro

- Nel caso di rotolamento puro abbiamo tre incognite e la solita relazione tra a_{CM} e α .
- Possiamo quindi risolvere le equazioni di prima e trovare le incognite:

$$a_{CM} = \frac{\tau r}{I + mr^2} \quad \alpha = \frac{\tau}{I + mr^2} \quad A = \frac{\tau mr}{I + mr^2}$$

Moto di rotolamento

- Nel caso di slittamento abbiamo due incognite e due equazioni
- Possiamo risolverle trovando:

$$a_{CM} = \frac{\mu_s W}{m} \quad \alpha = \frac{\tau - r\mu_s W}{I}$$

Moto di rotolamento puro

- Quand'è possibile il rotolamento puro?
Occorre che la soluzione trovata per A sia minore del valore statico massimo

$$A = \frac{\tau mr}{I + mr^2} \leq \mu_s N$$

- Questo impone un limite al valore di τ .

$$\tau \leq \mu_s W \frac{I + mr^2}{mr}$$

“Tensore di inerzia”

Per una rotazione intorno ad un asse generico, la **relazione tra il momento angolare L e la velocità angolare ω** è data dal **“tensore di inerzia”** (o **“matrice di inerzia”**) :

$$L_j = \sum_{k=1}^3 I_{jk} \omega_k \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

dove :

$$I_{xx} \equiv \int_{\text{corpo}} (y^2 + z^2) dm \equiv I_x \quad \leftarrow \text{momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse } x$$

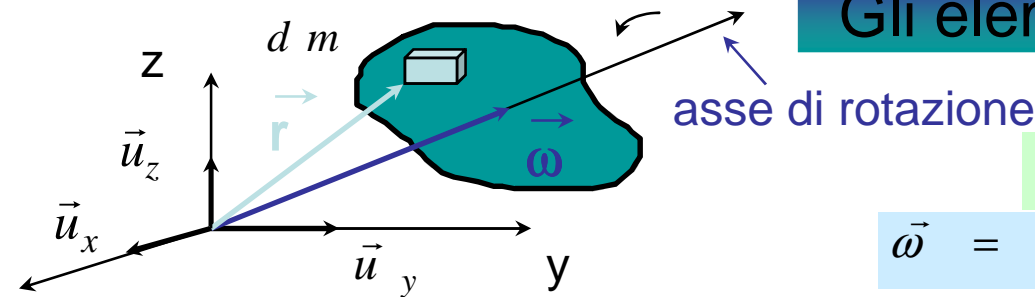
$$I_{yy} \equiv \int_{\text{corpo}} (x^2 + z^2) dm \equiv I_y \qquad I_{zz} \equiv \int_{\text{corpo}} (x^2 + y^2) dm \equiv I_z$$

gli **elementi diagonali** della matrice di inerzia sono i **momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi coordinati** ; inoltre, per gli elementi non diagonali:

$$I_{xy} = I_{yx} \equiv - \int_{\text{corpo}} xy dm \qquad I_{xz} = I_{zx} \equiv - \int_{\text{corpo}} xz dm$$

$$I_{yz} = I_{zy} \equiv - \int_{\text{corpo}} yz dm \quad \Rightarrow \text{ la matrice d'inerzia è simmetrica } \quad 73$$

Gli elementi della matrice d'inerzia



$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z$$

$$\vec{L}_O \equiv \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm =$$

$$= \int (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \times [(\omega_y z - \omega_z y) \vec{u}_x + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{u}_y + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{u}_z] dm$$

$$\Rightarrow L_x = \int [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] dm$$

$$\Rightarrow L_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm$$

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

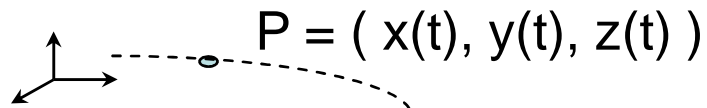
e analoghe espressioni per L_y , L_z .

“Gradi di libertà” di un sistema

numero n di parametri indipendenti necessari a descriverne il moto (\Rightarrow definirne completamente la posizione)

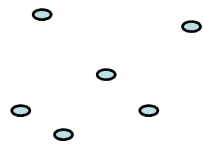
Esempi:

- **punto materiale** in moto nello spazio tridimensionale:



$$n = 3$$

- sistema di **N punti materiali** indipendenti:

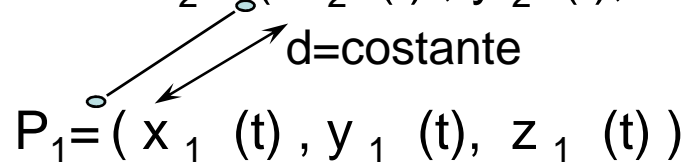


$$P_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$$

$$n = 3N$$

- **2 punti materiali** vincolati a mantenere una **distanza fissa**

$$P_2 = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$



$$n = 5 (= 3*2 - 1)$$

equazione di vincolo:

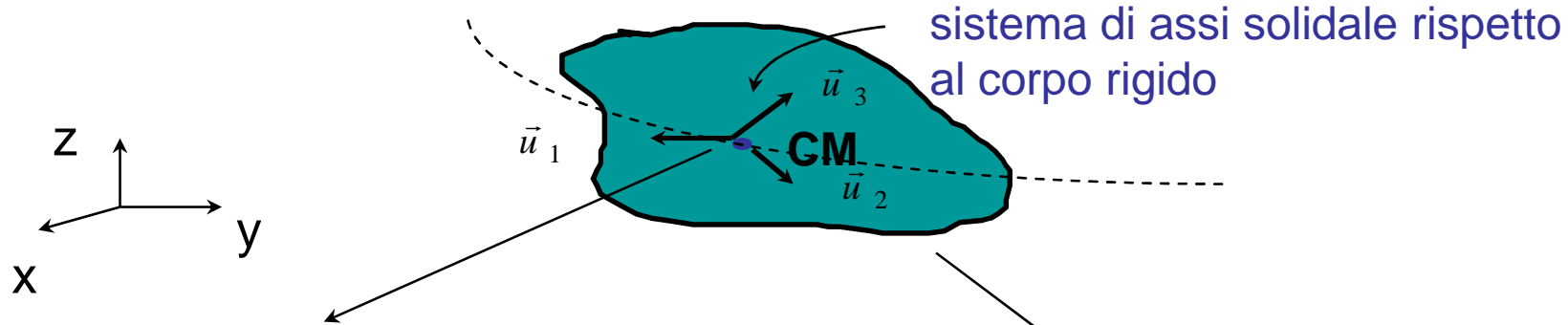
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2$$

- **corpo rigido** :

$$n = 6$$

Gradi di libertà di un corpo rigido

I gradi di libertà di un corpo rigido sono 6 :



posizione del centro di massa :
3 gradi di libertà

orientazione degli assi :

$$\vec{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$$

$$\vec{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})$$

$$\vec{u}_3 = (u_{3x}, u_{3y}, u_{3z})$$

\Rightarrow 9
parametri

condizioni:

$$|\vec{u}_1| = 1 \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

$$|\vec{u}_2| = 1 \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

$$|\vec{u}_3| = 1 \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

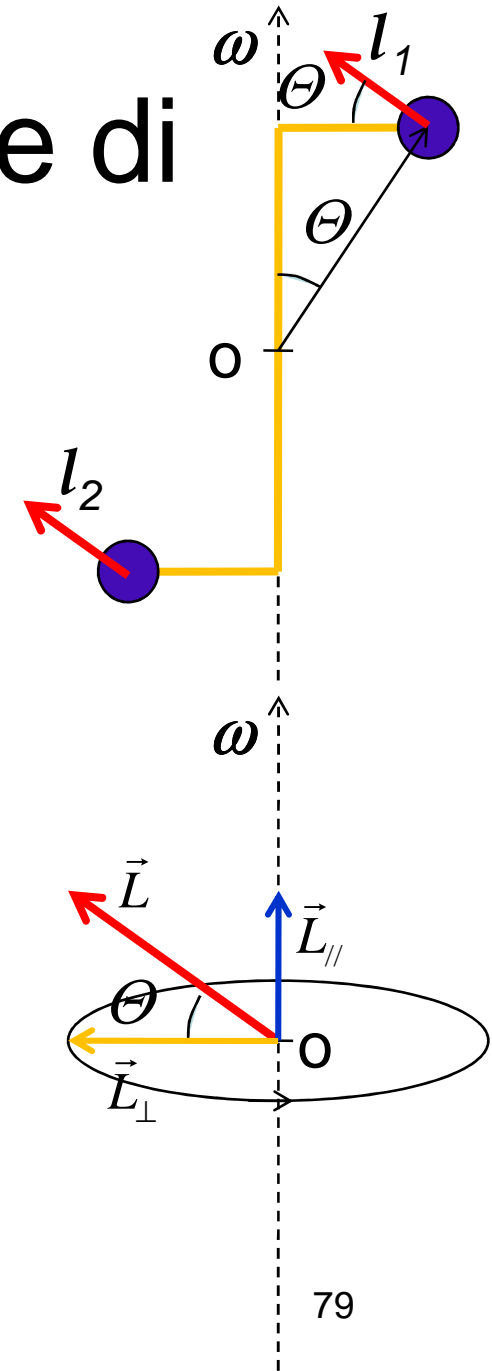
\Rightarrow 6
equazioni

$$9 - 6 = 3 \text{ parametri indipendenti}$$

6 gradi di libertà

Un esempio semplice di L non $// \omega$

- La componente longitudinale e' proporzionale a ω secondo il momento d'inerzia, che e' costante
- La componente trasversale ruota attorno all'asse (precessione) con modulo proporzionale a ω



Un esempio semplice di L non // ω

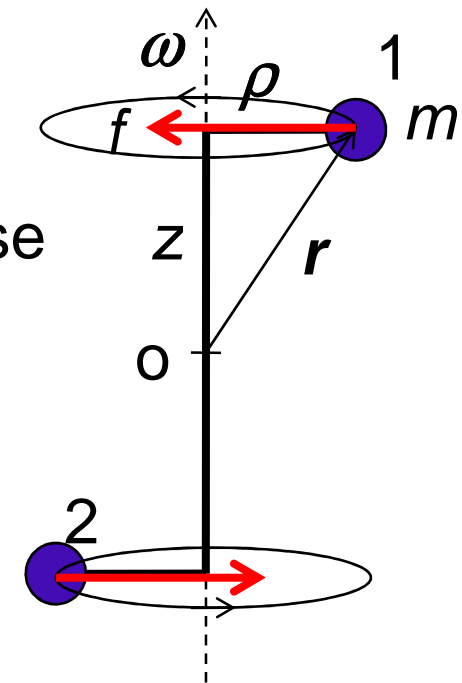
- Come si è detto il moto trasversale (2-D) è retto dall'eq.

$$\vec{\tau}_{\perp} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

- con $\vec{\tau}_{\perp}$ perpendicolare all'asse e che tende a farlo ruotare, cioè a far cambiare ω in direzione
- Cerchiamo ora di capire l'origine di $\vec{\tau}_{\perp}$

Un esempio semplice di L non $// \omega$

- Affinche' le masse descrivano un moto circolare, e' necessario che sia presente una forza centripeta per ciascuna di esse
- Tali forze devono essere generate dall'asse
- Se vogliamo che l'asse rimanga fisso, occorre che i supporti che lo sostengono resistano alle forze dovute all'asse stesso
- I supporti reagiscono con forze uguali e contrarie a quelle dell'asse (ed uguali a quelle centripete)



Un esempio semplice di L non $// \omega$

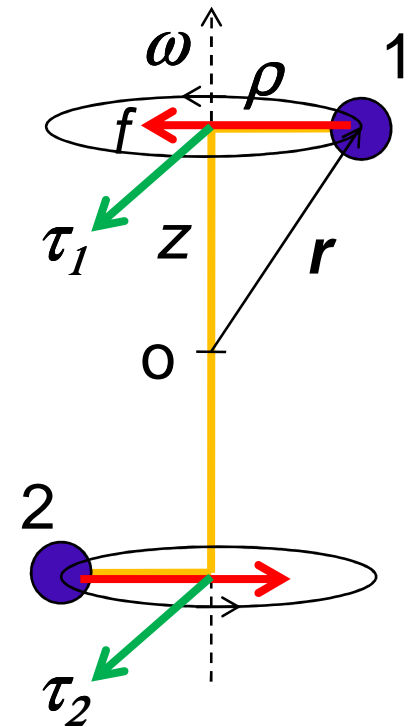
- Il momento delle forze centripete e`

$$\vec{\tau}_{\perp} = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{f}_2$$

- I due contributi sono uguali, hanno direzione $-\hat{\varphi}$ e modulo fz

- quindi

$$\vec{\tau}_{\perp} = -2fz\hat{\varphi} = -2m\omega^2\rho z\hat{\varphi} = -(2m\rho z)\omega^2\hat{\varphi}$$



Un esempio semplice di L non // ω

- Ricordando l'espressione del momento angolare trasversale

$$\vec{L}_{\perp} = -2m\omega z \rho \hat{\rho}$$

- e la derivata del versore ρ : $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\varphi}\omega$
- si verifica facilmente il teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = -2m\omega z \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt} = -(2m\rho z)\omega^2 \hat{\varphi} = \vec{\tau}_{\perp}$$

Un esempio semplice di L non // ω

- Per riassumere: l'asse agisce sulle masse generando il momento di forza trasversale e le due masse agiscono sull'asse con forze che tendono a farlo ruotare
- Il momento generato dai cuscinetti che supportano l'asse è uguale e contrario a quello dell'asse (per la 3^a legge della dinamica) e quindi uguale al momento trasversale
- Questi momenti devono essere resi più piccoli possibile, per ridurre l'usura dei cuscinetti
- Si cerca quindi di rendere L parallelo a ω , facendo ruotare il corpo attorno ad un asse di simmetria

TEOREMA DI POINSOT

Momento anolare e matrice d'inerzia

Dato un asse di rotazione, è possibile scegliere un'asse coordinato (ad es. l'asse lungo la direzione di rotazione; in questo caso: $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$)
l'espressione per il momento angolare:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{pmatrix}$$

si semplifica :

$$L_x = I_{xz} \omega$$

$$L_y = I_{yz} \omega$$

$$L_z = I_{zz} \omega \equiv I_z \omega$$

← componente del
momento angolare
lungo l'asse di rotazione

Tuttavia, essendo in generale $I_{xz} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$,
il momento angolare ha componenti lungo gli assi x,y
perpendicolari all'asse di rotazione, ossia $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$.

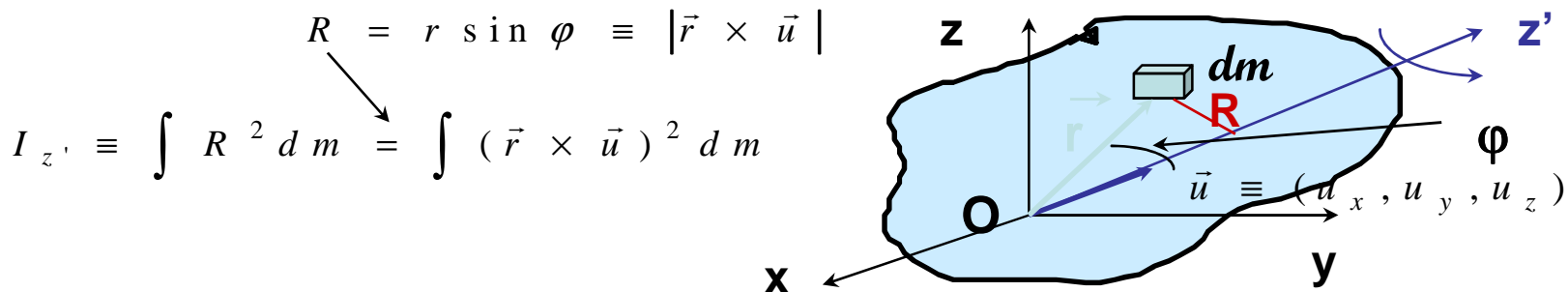
Se $I_{xz} = I_{yz} = 0$, l'asse z e' un asse principale di inerzia.

⇒ Un sistema di coordinate nel quale la **matrice di inerzia** è **diagonale**
costituisce un **sistema di assi principali di inerzia**⁸⁶

Teorema di Poinsot

Il momento d'inerzia $I_{z'}$ rispetto ad un generico asse z' di rotazione passante per il punto O e individuato dal versore $\vec{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$ è esprimibile in funzione del tensore di inerzia I_{jk} :

$$I_{z'} = I_{xx} u_x^2 + I_{yy} u_y^2 + I_{zz} u_z^2 - 2(I_{xy} u_x u_y + I_{xz} u_x u_z + I_{yz} u_y u_z)$$



$$I_{z'} = \int [(y u_z - z u_y)^2 + (x u_z - z u_x)^2 + (x u_y - y u_x)^2] dm =$$

$$\begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{y^2 u_z^2 + z^2 u_y^2 - 2 y z u_z u_y} & \boxed{x^2 u_z^2 + z^2 u_x^2 - 2 x z u_z u_x} & \boxed{x^2 u_y^2 + y^2 u_x^2 - 2 x y u_x u_y} \end{matrix}$$

$$= \int [u_x^2 (y^2 + z^2) + u_y^2 (x^2 + z^2) + u_z^2 (x^2 + y^2) - 2 y z u_y u_z - 2 x z u_x u_z - 2 x y u_x u_y] dm =$$

$$= u_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int (x^2 + z^2) dm + u_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2 u_y u_z \int y z dm - 2 u_x u_z \int x z dm - 2 u_x u_y \int x y dm$$

I_{xx} I_{yy} I_{zz}

“Ellissoide di inerzia”

L'equazione che esprime il momento d'inerzia:

$$I_{z'} = I_{xx} u_x^2 + I_{yy} u_y^2 + I_{zz} u_z^2 - 2(I_{xy} u_x u_y + I_{xz} u_x u_z + I_{yz} u_y u_z)$$

può essere riscritta, dividendo ambo i membri per $I_{z'}$:

$$(1) \quad I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} X Y - 2 I_{xz} X Z - 2 I_{yz} Y Z = 1$$

con : $X \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} u_x, Y \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} u_y, Z \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} u_z$

la (1) è l'equazione di un ellissoide, detto **“ellissoide di inerzia”** del corpo rispetto al generico punto O del corpo: essa individua la **superficie i cui punti**

$P = (X, Y, Z) \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} (u_x, u_y, u_z)$ → coseni direttori dell'asse z'

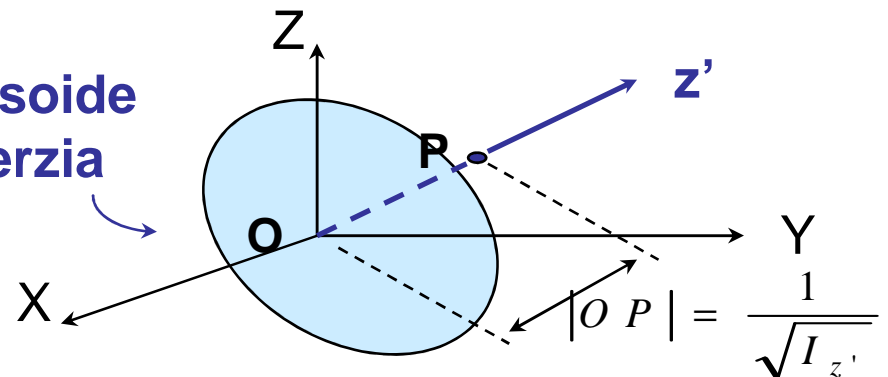
sono a distanza $|OP| = \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}$ **dal punto O**

Il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse z' passante per un punto O del corpo è individuato dall'intersezione P dell'asse z' con l'ellissoide d'inerzia del corpo mediante la relazione:

$$I_{z'} = \frac{1}{|OP|^2}$$

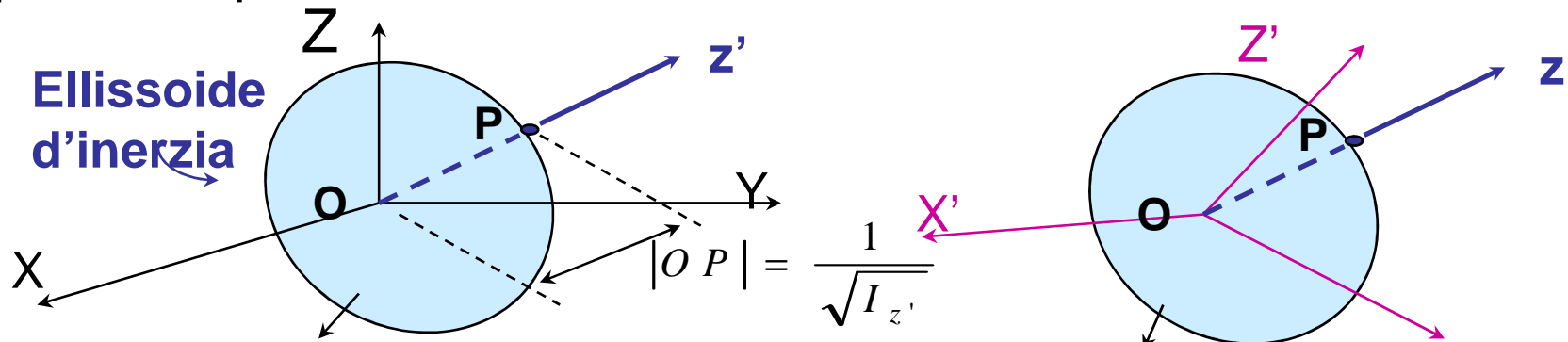
“Teorema di Poinsot”

Ellissoide d'inerzia



Ellissoide d'inerzia e assi principali

Dato un generico punto O del corpo, la forma ed orientazione nello spazio dell'ellissoide d'inerzia rispetto ad O e' caratteristica del corpo e non dipende dagli assi coordinati ; solo il valore degli elementi della matrice d'inerzia dipende da questa scelta



equazione dell'ellissoide:

$$I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} XY - 2 I_{xz} XZ - 2 I_{yz} YZ = 1$$

$$I_{x'x'} X'^2 + I_{y'y'} Y'^2 + I_{z'z'} Z'^2 - 2 I_{x'y'} X'Y' - 2 I_{x'z'} X'Z' - 2 I_{y'z'} Y'Z' = 1$$

$$I_{xx} \neq I_{x'x'} \quad I_{yy} \neq I_{y'y'} \quad , \dots \text{ ecc.}$$

E' sempre possibile "diagonalizzare" la matrice d'inerzia, ossia trovare un sistema di assi coordinati per il quale sia:

$$I \equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

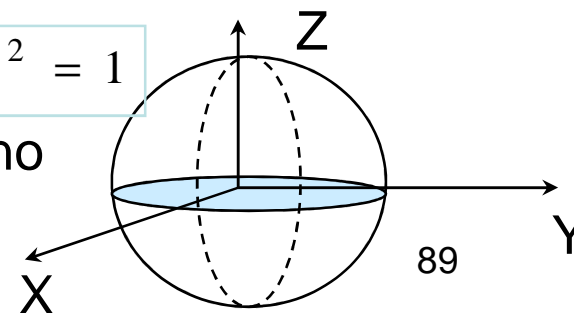
equazione dell'ellissoide:

$$I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 = 1$$

X,Y,Z "assi principali d'inerzia": per rotazioni intorno

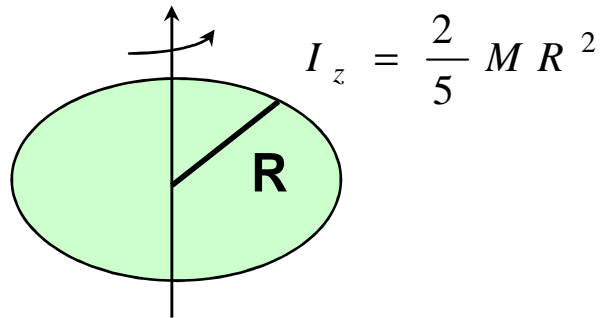
ad essi:

$$\vec{L} = I_{jj} \vec{\omega} \quad (j=x,y,z)$$

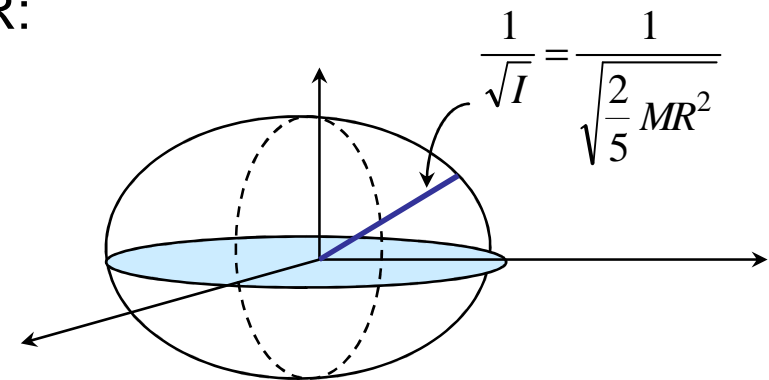


Esempi di ellissoide d'inerzia:

i) ellissoide d'inerzia di una sfera di raggio R:

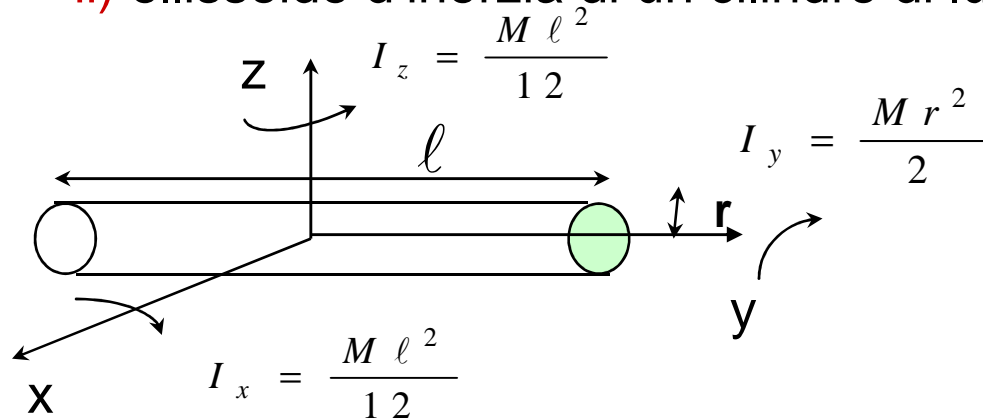


corpo sferico omogeneo

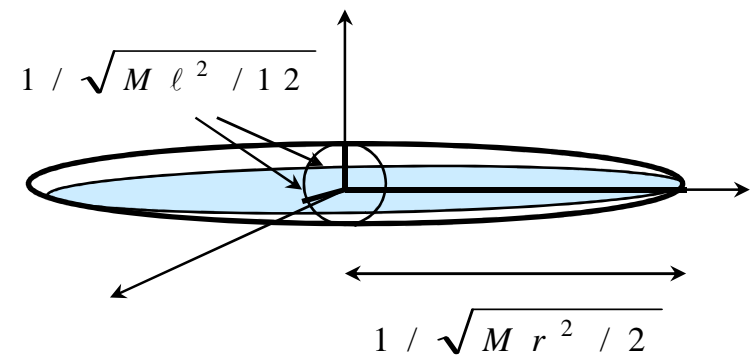


l' ellissoide d'inerzia è una sfer

ii) ellissoide d'inerzia di un cilindro di lunghezza ℓ e raggio r :



corpo cilindrico



ellissoide d'inerzia

GIROSCOPIO

Giroscopio

“**Giroscopio**” : corpo rigido rotante con un punto mantenuto fisso da un sistema vincoli; l’asse di rotazione, passante per il punto fisso, in generale varia la sua orientazione ed il moto risultante può risultare molto complicato.

Se il punto fisso è il centro di massa e non esistono forze esterne aventi mome risultante diverso da zero rispetto ad esso:

$$\vec{M}_G^{(E)} = 0$$

(\Rightarrow le reazioni vincolari che sostengono il giroscopio hanno momento nullo rispetto al CM)

il momento angolare rimane costante:

$$\vec{L}_G = \text{costante}$$

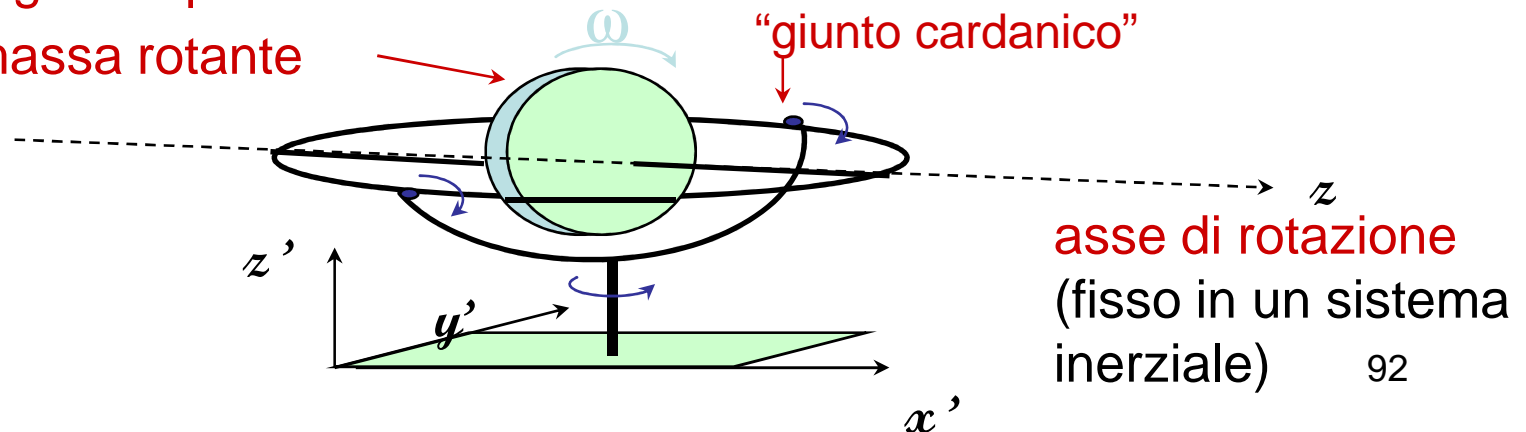
Se l’asse di rotazione è un asse principale d’inerzia: $\omega = \text{costante}$

\Rightarrow la direzione di rotazione rimane costante in un sistema inerziale :

“bussola giroscopica”

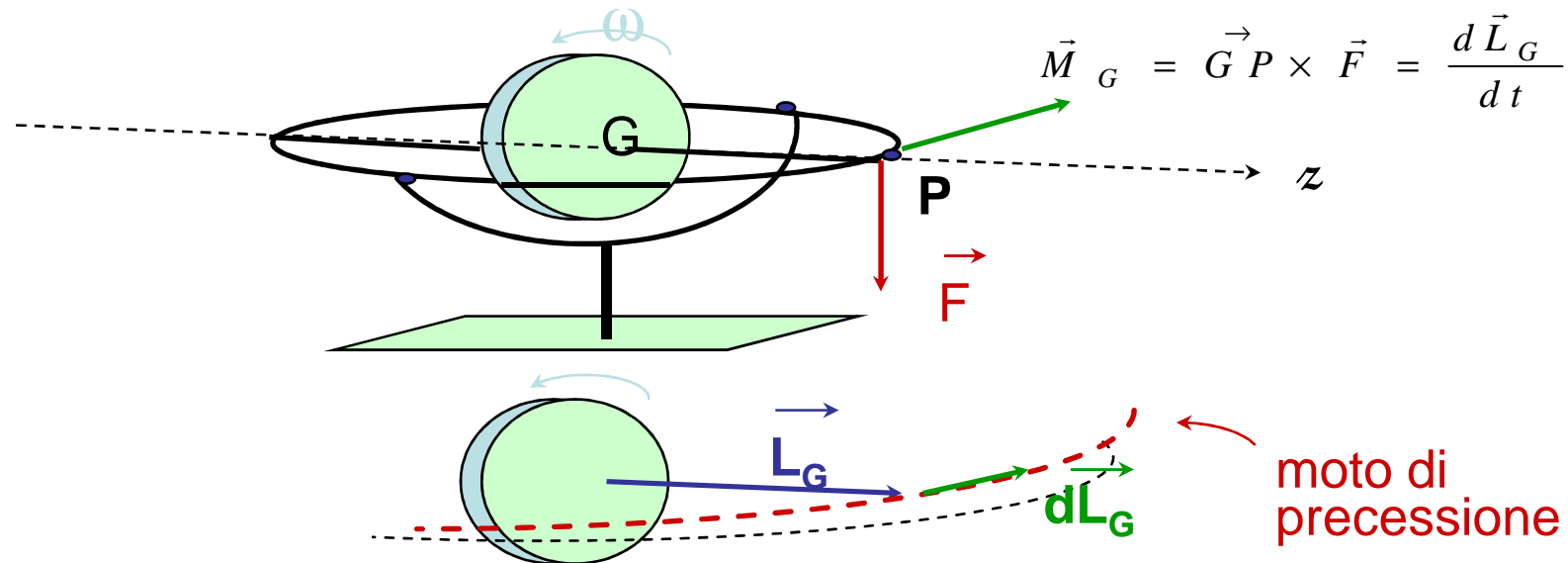
massa rotante

“giunto cardanico”



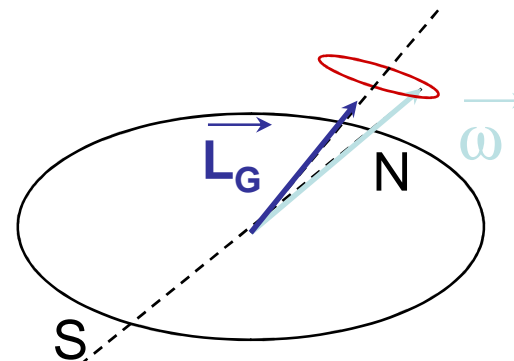
Precessione e nutazione

Se al giroscopio viene applicato un momento esterno si ha un **“moto di preces** del momento angolare e dell’asse di rotazione del giroscopio :



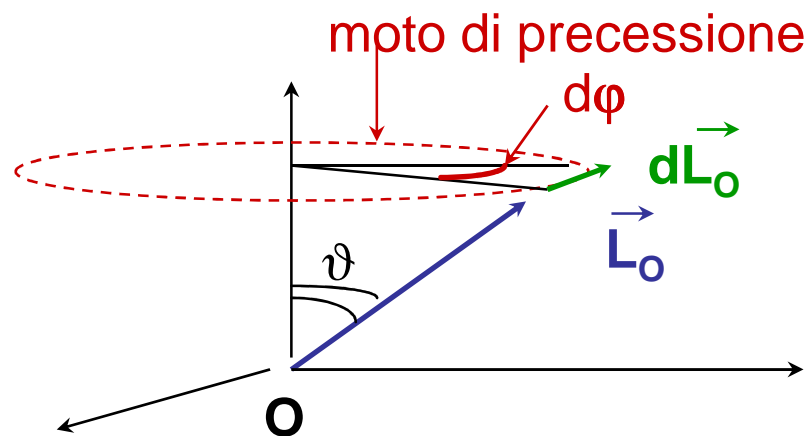
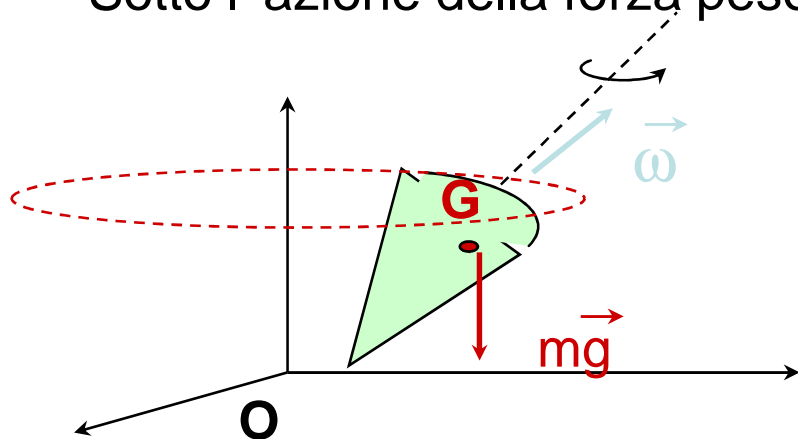
Se $M_G^{(E)} = 0$ ma l’asse di rotazione non è un asse principale d’inerzia ($\vec{L} \neq \vec{\omega}$) l’asse di rotazione ruota intorno alla direzione costante di \vec{L} : **moto di “nutazione**

Esempio: moto della Terra:
l’asse di rotazione compie un moto di nutazione con periodo di 19 anni (l’angolo tra \vec{L} ed $\vec{\omega}$ è comunque molto piccolo)



Esempio: moto di precessione di una trottola

Sotto l'azione della forza peso:



$$d L_o = L_o \sin \vartheta d \varphi$$

\Rightarrow

$$\frac{d L_o}{d t} = L_o \sin \vartheta \frac{d \varphi}{d t} \equiv L_o \sin \vartheta \Omega = M_o = m g \left| \vec{O G} \right| \sin \vartheta$$

“velocità angolare di precessione”

$$\Rightarrow \Omega = \frac{m g \left| \vec{O G} \right|}{L_o}$$

\Rightarrow

$$\Omega = \frac{m g \left| \vec{O G} \right|}{I \omega}$$

\Rightarrow la velocità angolare di precessione Ω è inversamente proporzionale alla velocità angolare di rotazione ω della trottola