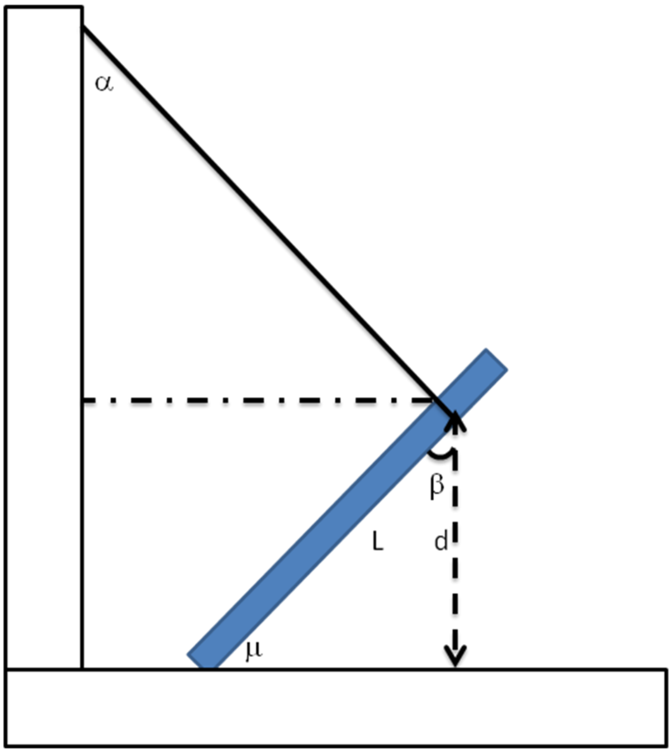
C.d.S. Ingegneria Edile – Gruppo J → Z
Esonero di Fisica Generale I del 12/6/2015
Compito A

Esercizio 1
Una sbarra di lunghezza L = 2,5 m è disposta come in figura, dove d = 2 m e $\alpha = 45°$. Determinare per quale valore del coefficiente di attrito μ la trave perde aderenza con il terreno



Esercizio 2
Un disco omogeneo di massa m=1kg e raggio R=10cm ruota liberamente intorno al proprio asse con velocità angolare ω_0=10 rad/s. Ad un certo istante, un secondo disco, identico al primo, viene sovrapposto esattamente al primo in modo che i due risultino rigidamente collegati. Determinare la variazione di velocità angolare e di energia cinetica del sistema. Quanto dovrebbe valere il modulo di una forza frenante tangente se si volesse ridurre la velocità del primo disco dello stesso fattore con un dispositivo meccanico in un tempo pari a 25s?

Esercizio 3
Una mole di gas perfetto monoatomico è contenuta in un cilindro adiabatico munito di un pistone e si trova in equilibrio alla temperatura T_0 =300K e pressione p_0 applicata dall'esterno. Se la pressione sul pistone viene improvvisamente dimezzata, determinare:

(a) la relazione fra le temperature e volumi iniziali e finali;
(b) la temperatura finale del gas.

Soluzione

Le equazioni dell'equilibrio sono:

$$\begin{cases} R_x - T\sin\alpha = 0 \\ R_y + T\cos\alpha - Mg = 0 \\ Mg\dfrac{L}{2}\sin\beta - Td\cos\beta\sin\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Dalla geometria del sistema si ha:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$$

E dunque:

$$\begin{cases} R_x = T\sin\alpha \\ R_y = Mg - T\cos\alpha \\ Mg\dfrac{L}{2}\cos\alpha = Td\sin\alpha \end{cases}$$

Da cui risolvendo:

$$\begin{cases} T = Mg\dfrac{L}{2d}\cot\alpha \\ R_x = Mg\dfrac{L}{2d}\cos\alpha \\ R_y = Mg\left(1 - \dfrac{L}{2d}\cot\alpha\cos\alpha\right) \end{cases}$$

La trave resta in equilibrio se il suolo riesce ad esplicare una forza di attrito, cioè se:

$$Mg\frac{L}{2d}\cos\alpha \le \mu Mg\left(1 - \frac{L}{2d}\cot\alpha\cos\alpha\right)$$

Da cui risolvendo:

$$\mu \ge \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\dfrac{L}{2d}\cos\alpha} - \cot\alpha\right)}$$

Con i dati del problema si ha:

$$\mu \ge 0.79$$

Esercizio 2

Per trovare la velocita' angolare dopo la sovrapposizione dei dischi possiamo applicare la legge di conservazione del momento angolare perche' le uniche forze esterne peso e reazioni vincolari hanno momento nullo rispetto all'asse di rotazione:

$$I\ \omega_0 \ = \ (I+I)\ \omega_f \ \Rightarrow \ \omega_f \ = \ \frac{\omega_0}{2} \ = \ 5\ rad/s \tag{3}$$

La corrispondente variazione di energia cinetica:

$$\Delta K \ = \frac{1}{2}(2I)\ \omega_f^2 \ - \frac{1}{2}I\ \omega_0^2 \ = - \ \frac{1}{4}\ I\ \omega_0^2 = - \ \frac{m\ R^2\ \omega_0^2}{8} \approx -0,125J \tag{4}$$

Il momento frenante equivalente deve essere tale che:

$$\tau = I\alpha = FR$$

Con l'accelerazione angolare tale che: $\omega(t_f) = \frac{\omega_0}{2} = \omega_0 - \alpha t_f \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0}{2t_f}$. Segue subito:

$$\tau = \frac{1}{2}mR^2\frac{\omega_0}{2t_f} \cong 10^{-3}\,Nm \Rightarrow F = 10^{-2}\,N$$

Esercizio 3

(a) applicando l'equazione dei gas perfetti ai due stati iniziale e finale:

$$\begin{cases} p_0\ V_0 = \ n\ R\ T_0 \\ \frac{1}{2}\ p_0\ V_F = \ n\ R\ T_F \end{cases} \ \Rightarrow \ \frac{V_F}{V_0} \ = \ 2\ \frac{T_F}{T_0} \tag{5}$$

(b) la trasformazione eseguita dal gas e' un'adiabatica irreversibile ($\Delta Q = 0$) nella quale $\Delta U = nC_V\,(T_F - T_0)$ e $W = \frac{1}{2}p_0\,(V_F - V_0)$ perche' il gas lavora contro una pressione esterna pari a $p_0/2$. Applicando la relazione del primo principio della termodinamica ($\Delta U = \Delta Q - \Delta W$) si ottiene:

$$nC_V\,(T_F - T_0) = -\frac{1}{2}p_0\,(V_F - V_0) \Rightarrow \left(\frac{T_F}{T_0} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2C_V}\right)\left(\frac{p_0V_0}{nT_0}\right)\left(\frac{V_F}{V_0} - 1\right) \tag{6}$$

$$\left(\frac{T_F}{T_0} - 1\right) = \left(\frac{R}{2C_V}\right)\left(1 - 2\frac{T_F}{T_0}\right) \Rightarrow \frac{T_F}{T_0}\left(1 + \frac{R}{C_V}\right) = \left(1 + \frac{R}{2C_V}\right) \Rightarrow \frac{T_F}{T_0} = \frac{\left(1 + \frac{R}{2C_V}\right)}{\left(1 + \frac{R}{C_V}\right)} \tag{7}$$

Per un gas monoatomico $C_V = (3/2)R$ e dunque:

$$T_F \ = T_0\,\frac{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}\right)} \ = \frac{4}{5}\ T_0 = 240K \tag{8}$$

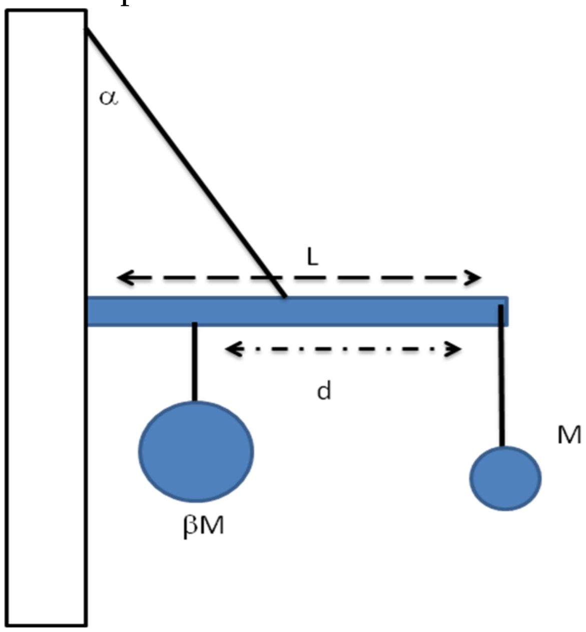
C.d.S. Ingegneria Edile – Gruppo J → Z

Esonero di Fisica Generale I del 12/6/2015

Compito B

Esercizio 1

Una trave di lunghezza L = 2m e massa 20 kg è incernierata ad un muro e ad esso sospesa mediante una fune che può sopportare una tensione massima T_{max} = (100g) N (g = accelerazione di gravità). La sfera sospesa all'estremità libera della trave ha massa M = 15 kg, l'angolo α=45° ed il coefficiente β vale 4. Determinare il valore di d = d_{lim} per il quale la fune si spezza



Esercizio 2

Un solido di massa m=200g, calore specifico medio c=0.38 kJ/(kg.K), inizialmente alla temperatura T_1=1000K è introdotto in un cilindro, a pareti rigide e adiabatiche, contenente 300g di acqua e 100g di ghiaccio in equilibrio alla temperatura di T_2=0 ^oC. Determinare:

a) la quantità di ghiaccio che viene fusa;
b) la temperatura finale del sistema;

Esercizio 3

Un cilindro omogeneo di massa M =3kg e raggio R=40cm ruota con attrito intorno al proprio asse. Sapendo che partendo da una velocità angolare ω_0=10 rad/s il cilindro si ferma dopo avere compiuto trenta giri determinare il momento della forza frenante e la sua accelerazione angolare. Determinare quindi la massa m che andrebbe aggiunta, in assenza di attrito, ad una delle estremità del cilindro se si volesse che questo continuasse a ruotare con velocità angolare pari a quella che aveva in presenza di attrito dopo aver compiuto 15 giri

Esercizio 1

Le condizioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{cases} R_x - T\sin(\alpha) = 0 \\ R_y + T\cos\alpha - g\left(M(1+\beta)+m\right) = 0 \\ \beta Mg(L-d) + MgL + mg\dfrac{L}{2} - T\dfrac{L}{2}\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Dall'equazione dei momenti si ha:

$$T = g\frac{\beta M(L-d) + ML + m\dfrac{L}{2}}{\dfrac{L}{2}\cos\alpha}$$

Da cui, per la condizione sulla tensione

$$d > L\left(1 - \frac{1}{\beta M}\left(\frac{T_{\max}}{g}\cos\alpha - m - 2M\right)\right)$$

Con i dati del problema si ha:

$$d > L\left(1 - \frac{50}{60}\left(\sqrt{2}-1\right)\right) \cong 0.63L$$

Esercizio 2

(a) per stabilire la quaità di ghiaccio che viene fusa dobbiamo confrontare la quantità di calore che il solido è in grado di fornire quando si porta alla temperatura di fusione del ghiaccio $T_=0$ °C $= 273,15$K e quella necessaria per fondere il ghiaccio ($\lambda_g = 334$J/g):

$$\begin{cases} Q_s = m\ c\ (T_1 - T_2) \approx 55,3 \text{ kJ} \\ Q_g = m_g\ \lambda_g \approx 33,4 \text{ kJ} \end{cases} \Rightarrow Q_s \geq Q_g \tag{3}$$

e dunque tutto il ghiaccio fonde.

(b) per determinare la temperatura finale del sistema T_F dobbiamo bilanciare la quantità di calore ceduta dal solido con quella assorbita dal sistema acqua e ghiaccio (fusione di tutto il ghiaccio e salto termico dell'acqua e del ghiaccio fuso):

$$m\ c\ (T_1 - T_F) = m_g\ \lambda_g + (m_a + m_g)\ c_a\ (T_F - T_2) \tag{4}$$

e dunque:

$$T_F = \frac{m\ c\ T_1 + (m_a + m_g)\ c_a\ T_2 - m_g\ \lambda_g}{(m_a+m_g)\ c_a + m\ c} \approx 292 \text{ K} = 18,8 \text{ °C} \tag{5}$$

Esercizio 3

È sufficiente applicare il teorema dell'energia cinetica fra la configurazione iniziale e quella finale utilizzando le grandezze angolari: il momento d'inerzia I ($I = 1/2mR^2$ per il cilindro omogenre), la velocità angolar ω_0, la coppia frenanate M_f e l'angolo $\Delta\theta = 2\pi N_{giri}$. Si ottiene:

$$0 - \frac{1}{2}\ I\ \omega_0^2 = -M_f\ \Delta\theta \Rightarrow M_f = \frac{m\ R^2\ \omega_0^2}{8\pi\ N_{giri}} \approx 0,06 \text{ N.m} \tag{6}$$

La accelerazione angolare si calcola facilmente dalle relazioni cinematiche:

$$\omega\left(\bar{t}\right) = \omega_0 - \alpha\bar{t} = 0 \Rightarrow \bar{t} = \frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$\theta\left(\bar{t}\right) = 2\pi N_{giri} = \omega_0\bar{t} - \frac{1}{2}\alpha\bar{t}^2 = \frac{\omega_0^{\ 2}}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}} \cong 0,26 rad\, s^{-2}$$

Dopo aver compiuto 15 giri il tempo è:

$$\theta\left(t^*\right) = 2\pi\frac{N_{giri}}{2} = \omega_0 t^* - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)t^{*2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)t^{*2} - \omega_0 t^* + \pi N_{giri} = 0$$

Risolvendo per t* si ha:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)t^{*2} - \omega_0 t^* + \pi N_{giri} = 0$$

$$t^* = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^{\ 2} - 4\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)\pi N_{giri}}}{\left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\frac{\omega_0^{\ 2}}{2}}}{\left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)} = 4\pi N_{giri}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\omega_0} \cong 11s$$

Avendo preso la più piccola soluzione perché ci interessano i tempi minori della prima inversione di moto. A questo tempo la velocità angolare è:

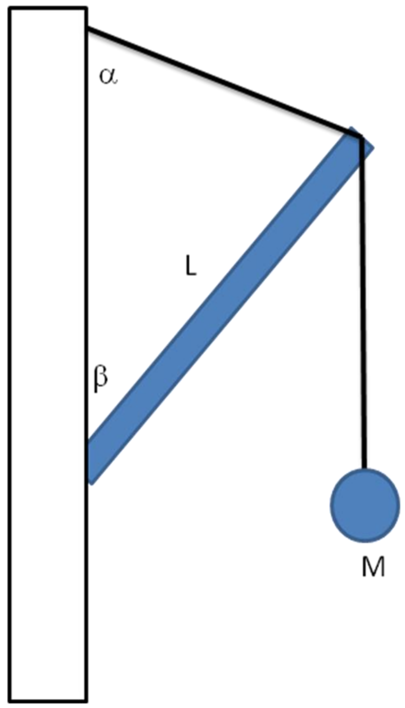
$$\omega = \omega_0 - \left(\frac{\omega_0^{\ 2}}{4\pi N_{giri}}\right)\left(4\pi N_{giri}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\omega_0}\right) = \omega_0 - \omega_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Applicando la conservazione del momento angolare si avrebbe quindi

$$I\omega_0 = \left(I + mR^2\right)\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = M\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \cong 620g$$

C.d.S. Ingegneria Edile – Gruppo J → Z
Esonero di Fisica Generale I del 12/6/2015
Compito C

Esercizio 1
Una trave di lunghezza L = 2m e massa m = 5 kg è disposta come in figura con α = 30° e β = 15°. La massa della sfera vale M = 10 kg. La tensione di rottura della fune vale τ_{max} = (10g) N (g = accelerazione di gravità). Determinare fino a quale distanza d dall'estremo incernierato alla parete si può spostare la massa M senza provocare la rottura della fune. Se si dovesse porre la sfera al centro della trave, quanto dovrebbe valere la tensione del cavo in termini di g e la reazione del muro?



Esercizio 2: Un'asta di lunghezza 20cm e massa 3kg è vincolata ad un asse orizzontale, passante per un suo estremo, intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta, inizialmente nella posizione di equilibrio, viene colpita nel suo estremo inferiore da una pallina, di massa 100g e velocità orizzontale v, che vi rimane attaccata. Dopo l'impatto il sistema si muove con velocità angolare ω = 7rad/s. Determinare: (a) la velocità iniziale del proiettile; (b) se l'asta riesce ad effettuare un giro completo.

Esercizio 3: Si prepara del tè freddo (assimilabile ad acqua) mescolandone una massa m con una massa uguale di ghiaccio alla temperatura di fusione. Determinare la massima temperatura iniziale del tè affinché la temperatura finale sia la minima possibile. Dati numerici: ca=4,2 kJ/(kg.K), λ_{fus}=333 kJ/kg

Soluzione

Le condizioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{cases} R_x - T\sin(\alpha) = 0 \\ R_y + T\cos\alpha - Mg - \dfrac{m}{2} = 0 \\ MgkL + mg\dfrac{L}{2} - TL\sin(\pi - (\alpha+\beta)) = 0 \end{cases}$$

Dove abbiamo imposto d = kL, k < 1. Dall'equazione dei momenti si ha:

$$T = g\frac{Mk + m\frac{1}{2}}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} < \tau_{\max} \Rightarrow k < \frac{\tau_{\max}}{g}\frac{1}{M}\sin(\pi-(\alpha+\beta)) - \frac{m}{2M}$$

Con i valori del problema si ha k circa 0.46 e dunque d = 91 cm.
Se si ponesse la sfera al centro si avrebbe k = 0.5 e dunque ci aspettiamo un valore di T maggiore del calore di rottura. Vediamo:

$$T = g\frac{\frac{M}{2} + m\frac{1}{2}}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = g\frac{\frac{3}{2}m}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = g\frac{3}{\sqrt{2}}m \cong 10.6g$$

La reazione del muro sarà:

$$\begin{cases} R_x = T\sin(\alpha) \cong 5.3g \\ R_y = -T\cos\alpha + Mg + mg \cong 1.3g \\ |R| \cong 5.4g \end{cases}$$

Esercizio 2 Siano M=3kg la massa della sbarra, l=0,2m la sua lunghezza, m=0,1 kg la massa della pallina e v la sua velocità iniziale; mentre ω=7rad/s è la velocità angolare subito dopo l'urto e $I_s = \frac{1}{3}Ml^2$ il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione. Possiamo applicare la conservazione del momento angolare rispetto al punto di sospensione per l'urto completamente anelastico:

$$m.v.l \;=\; \left(I_s + m.l^2\right)\omega \Rightarrow \;v = \left(\frac{I_s + m.l^2}{m.l^2}\right)\,\omega.d = \left(\frac{M+3m}{3m}\right)\,\omega.l \approx \;15,4\text{m/s} \quad (5)$$

(b) per potere compiere un giro completo, il sistema sbarra-pallina deve arrivare nel punto più alto con energia cinetica maggiore di zero. La possiamo ricavare dalla legge di conservazione dell'energia meccanica, prendendo il riferimento dell'energia potenziale gravitazionale nel punto più basso, abbiamo:

$$E_K^{alt} \;+\; \frac{3}{2}M\;g\;l \;+\; 2\;m\;g\;l = \;\frac{1}{2}\left(I_s + m.l^2\right)\omega^2 \;+\; \frac{1}{2}M\;g\;l \quad (6)$$

Pertanto deve risultare:

$$E_K^{alto} \;=\; \frac{1}{2}\left(I_s + m.l^2\right)\omega^2 - (M+2m)\;g\,l \geq 0 \Rightarrow \omega \geq \sqrt{6\,\frac{g}{l}\left(\frac{M+2m}{M+3m}\right)} \approx 17\text{rad/s} \quad (7)$$

e dunque siccome ω = 7 rad/s il sistema, dopo l'urto, non riesce a compiere il giro intero.

Esercizio 3

Fisicamente la minima temperatura che si può raggiungere è quella di fusione del ghiaccio $T_0 = 0°\mathrm{C} = 273,15\mathrm{K}$, che corrisponde alla situazione in cui l'acqua (tè) cede al ghiaccio soltanto la quantità di calore necessari a farlo sciogliere completamente. Detta T_M la temperatura iniziale, imponiamo che la quantità di calore ceduta dall'acqua (in modulo) non supera quella assorbita dal ghiaccio per sciogliersi completamente; visto che le due masse sono uguali scriveremeo:

$$m \cdot c_a \cdot (T_M - T_0) \;\leq\; m\,\lambda_{fus} \;\;\Rightarrow\;\; T_M \;\leq\; T_0 \;+\; \frac{\lambda_{fus}}{c_a} \approx 80°\mathrm{C} \approx 353\ \mathrm{K} \qquad (8)$$