Soluzioni esame del 16/06/2015

Domanda 1: Un condensatore cilindrico, con armature di raggio $R_1 = 6\,\mathrm{mm}$ e $R_2 = 9\,\mathrm{mm}$ e lunghezza $l = 10\,\mathrm{cm}$, è stato caricato con una carica $q = 3\,\mathrm{nC}$. Calcolare (a) il campo elettrico $E(r)$ all'interno del condensatore in funzione dalla distanza dall'asse del cilindro, (b) la differenza di potenziale tra le armature, (c) la capacità del condensatore e (d) l'energia elettrica nel condensatore.

Soluzione: (a) Per trovare il campo elettrico si applica la legge di Gauss ad un cilindro di raggio r e lunghezza l,

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 2\pi r l E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} ,$$

per cui

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{r} = \frac{540\,\mathrm{V}}{r} .$$

(b) La differenza di potenziale tra le armature si ottiene proprio dalla definizione come integrale del campo elettrico,

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 540\,\mathrm{V} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = 540\,\mathrm{V} \ln\frac{R_2}{R_1} = 220\,\mathrm{V} .$$

(c) $C = q/V = 14\,\mathrm{pF}$ (d) $U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV = 3.3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}$.

Domanda 2: Una spira quadrata di lato $a = 6\,\mathrm{cm}$ è percorsa da una corrente i. Il momento magnetico della spira è $\mathbf{m} = m_x\hat{\mathbf{u}}_x + m_z\hat{\mathbf{u}}_z$, con $m_x = 0.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Am}^2$ e $m_z = -0.9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Am}^2$. La spira è immersa in un campo magnetico $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{u}}_x + B_y\hat{\mathbf{u}}_y$, con $B_x = 0.4\,\mathrm{T}$ e $B_y = 0.2\,\mathrm{T}$. Calcolare (a) la corrente i, (b) il momento meccanico che agisce sulla spira (vettore e modulo) e (c) l'angolo α tra $\mathbf{m}$ e $\mathbf{B}$.

Soluzione: (a) Siccome $\mathbf{m} = i\mathbf{\Sigma}$, e abbiamo dato $\Sigma = |\mathbf{\Sigma}| = a^2 = 36 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, occorre trovare il modulo di $\mathbf{m}$:

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_z^2} = 1.03 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Am}^2 ,$$

per cui, $i = m/\Sigma = 0.286\,\mathrm{A}$.
(b) Calcoliamo direttamente il vettore

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} &= (m_x\hat{\mathbf{u}}_x + m_z\hat{\mathbf{u}}_z) \times (B_x\hat{\mathbf{u}}_x + B_y\hat{\mathbf{u}}_y) = m_xB_y\hat{\mathbf{u}}_z + m_zB_x\hat{\mathbf{u}}_y - m_zB_y\hat{\mathbf{u}}_x \\
&= (0.1\hat{\mathbf{u}}_z - 0.36\hat{\mathbf{u}}_y + 0.18\hat{\mathbf{u}}_x) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm} \\
M &= \sqrt{0.1^2 + 0.36^2 + 0.18^2} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm} = 0.415 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}
\end{aligned}$$

(c) Dal prodotto scalare $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = mB\cos\alpha$ troviamo

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}}{mB} = \frac{m_xB_x}{mB}$$

Ci serve ancora il modulo di $\mathbf{B}$, $B = \sqrt{0.4^2 + 0.2^2}\,\mathrm{T} = 0.45\,\mathrm{T}$. Allora,

$$\cos\alpha = \frac{0.5 \cdot 0.4}{1.03 \cdot 0.45} = 0.43 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 64^\circ .$$

Domanda 3: Un solenoide circolare con raggio interno $r_i = 12\,\mathrm{cm}$, composto da $N = 500$ spire di sezione quadrata, lati $a = 4\,\mathrm{cm}$, è percorsa da una corrente $i = 20\,\mathrm{A}$. Calcolare (a) il valore del campo magnetico $B(r)$ all'interno del solenoide in funzione della distanza dall'asse, (b) il flusso del campo magnetico attraverso una spira del solenoide, (c) l'induttanza del solenoide e (d) l'energia magnetica nel solenoide.

Soluzione: (a) Per trovare il campo magnetico si applica la legge di Ampere con un cerchio di raggio r all'interno del solenoide.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 N i \ ,$$

per cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tm}\frac{1}{r} \ .$$

(b)

$$\Phi_i(B) = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma} = a \int_{r_i}^{r_i+a} dr B(r) = a(2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tm}) \ln \frac{r_i + a}{r_i} = 2.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Tm}^2 \ .$$

(c) Da $\Phi_N(B) = N\Phi_1(B)$ e $\Phi_N(B) = Li$ si trova

$$L = \frac{N\Phi_1(B)}{i} = 5.75 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{H} \ .$$

(d) $U_m = \frac{1}{2}Li^2 = 0.115\,\mathrm{J}$.