1. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA

$$M = \rho V \tag{1}$$

$$\left[Variazione\ nel\ Tempo\right] = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dV}{dt} \tag{2}$$

$$\left[Flusso\ Convettivo\right] = \rho c \Omega = \dot{m} \tag{3}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dV}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \tag{4}$$

<u>MOTO STAZIONARIO IN UN CONDOTTO:</u>

Portata massica :

$$\begin{gathered} \dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \cos t. \\ \Downarrow \\ \rho c \Omega = \rho_1 c_1 \Omega_1 = \rho_2 c_2 \Omega_2 = \cos t. \end{gathered} \tag{5}$$

L'equazione (5) governa in generale il flusso attraverso condotti a sezione variabile: le variazioni della superficie di flusso Ω comportano variazioni nella velocità e nella densità del fluido. La soluzione completa del problema richiede quindi l'impiego dell'equazione dell'energia e di una relazione di stato del fluido evolvente. Uno degli esempi più frequenti è quello del flusso adiabatico attraverso condotti acceleranti (ugelli) o deceleranti (diffusori) in cui le variazioni di sezione possono provocare aumenti o diminuzioni dell'energia cinetica compensati da variazioni in senso inverso dell'energia potenziale.
Un caso particolare è rappresentato dal flusso incomprimibile in un condotto a sezione variabile. L'equazione (7) si riduce alla:

Portata volumetrica:

$$\begin{gathered} \rho = \cos t. \Rightarrow c\Omega = c_1\Omega_1 = c_2\Omega_2 = \cos t. \\ \Downarrow \\ \dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \cos t. \end{gathered} \tag{6}$$

In questo caso, le variazioni di velocità seguono, in ragione inversamente proporzionale, quelle di sezione di passaggio

<u>B) PROCESSI DI RICAMBIO DELLA CARICA IN MACCHINE VOLUMETRICHE:</u>

Come e noto, una macchina volumetrica (ad es. : motori alternativi, pompe e compressori alternativi o rotativi) il trasferimento di energia meccanica avviene attraverso le variazioni di volume ($dV/dt \neq 0$)

a disposizione del fluido evolvente. Tali variazioni sono usualmente anche destinate, almeno in parte, al trasferimento del flusso da o verso i condotti esterni. Va quindi considerata la forma completa (6) dell'equazione di bilancio della massa:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V\,\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{dV}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

La variazione temporale della massa contenuta del sistema dipende quindi dal bilancio netto tra le portate in ingresso, $\dot{m}_1$, e in uscita, $\dot{m}_2$.

2. **EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA**

L'equazione di bilancio dell'energia, ricavata sotto le stesse ipotesi di sistema a parametri concentrati già adottate in precedenza, risponde strettamente al principio di conservazione se nella definizione dell'energia totale vengono considerate tutte le forme di energia significative per il fenomeno allo studio. In problemi di fluidodinamica delle macchine è usuale, salvo limitati casi particolari fare riferimento alle energie specifiche:

- Energia interna termodinamica, u
- Energia cinetica specifica, $c^2/2$
- Energia di posizione rispetto a un livello geodetico di riferimento, $g\,z$

Va precisato che l'energia interna *u* non include l'energia di formazione delle specie chimiche. Di conseguenza, la variazione di energia di formazione associata a reazioni chimiche viene considerata come termine "sorgente" nell'equazione di bilancio.
Da quanto sopra, è quindi possibile definire l'energia totale specifica, funzione dello stato termofluidodinamico istantaneo del sistema, l'energia totale e la relativa variazione nel tempo:

$$e = u + \frac{c^2}{2} + gz \quad ; \qquad \textit{energia totale specifica}$$

$$E = M \cdot e = \rho V e \ ; \qquad \textit{energia totale} \tag{7}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(Me)}{dt} = e\frac{dM}{dt} + M\frac{de}{dt}; \quad \textit{variazione nel tempo dell' energia totale}$$

- In base alla nota relazione tra energia interna ed entalpia ($h = u + p/\rho$) è possibile definire, in analogia all'energia totale anche l'entalpia totale:

$$H = e + \frac{p}{\rho} = h + \frac{c^2}{2} + gz \quad ; \qquad \textit{entalpia totale specifica} \tag{8}$$

- Vengono raggruppate, in unico termine, $\dot{Q}$, la potenza termica scambiata con le pareti e quella associata allo sviluppo dire azioni chimiche:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_w + \dot{Q}_{chim} \tag{9}$$

A) <u>Sistemi stazionari a flusso continuo</u> $\left(\frac{d(\ )}{dt} = 0 \ ; \ \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \right)$

E' il caso di molti componenti di macchine e impianti per i quali, in prima ipotesi, si assume la stazionarietà del flusso che implica quindi la validità dell'equazione di continuità nella forma (5). Si fa riferimento, ad esempio, a:

- Scambiatori di calore e camere di combustione
- Elementi rotorici di turbomacchine, sede di trasferimenti di energia meccanica

- Condotti a sezione variabile con comportamento da ugelli o diffusori

Equazione di bilancio dell'energia totale:

$$\dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{Q} - P \tag{10}$$

Diversamente dalla formulazione non stazionaria dell'equazione dell'energia, in cui vengono stimate le variazioni temporali dell'energia totale, la forma stazionaria di tale equazione evidenzia come le variazioni di flusso di energia tra ingresso e uscita dal sistema siano correlate a flussi di energia termica, $\dot{Q}$, o meccanica, *P*, il cui segno va è in accordo alle convenzioni della termodinamica.

La costanza della portata massica attraverso tutte le superfici di flusso rende poi possibile fare riferimento alle **energie specifiche**, attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \dot{Q}/\dot{m} &= Q \\ P/\dot{m} &= L \end{aligned} \tag{11}$$

che fanno quindi riferimento alle quantità di energia trasferite, per unità di massa di fluido evolvente, nel modo "calore" o "lavoro". L'equazione dell'energia per sistemi aperti a flusso continuo si riduce quindi a:

$$\begin{aligned} &H_2 - H_1 = Q - L \\ &h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = Q - L \end{aligned} \tag{12}$$

Si tratta, quindi, di una **forma estesa della relazione di primo principio**, in quanto al bilancio netto di energia in transito ($Q - L$) viene associata la variazione dell'*entalpia totale*. Pertanto, un bilancio positivo dei flussi di energia può contribuire all'incremento di una qualsiasi (o più d'una) delle forme di energia incluse nella definizione di entalpia totale: entalpia termodinamica, energia cinetica, energia di posizione. Al contrario, un bilancio negativo comporta la diminuzione dell'entalpia totale tra uscita e ingresso del sistema e quindi la diminuzione di almeno una delle forme di energia considerate.

Alcuni esempi specifici.

- **Sistema adiabatico che include una macchina operatrice (pompa o compressore).** ($Q = 0$, $L < 0$).
- **Sistema adiabatico che include una macchina motrice (turbina o espansore generico).** ($Q = 0$, $L > 0$).
  - *Una turbina a gas o vapore lavora con cadute di entalpia termodinamica dell'ordine delle centinaia o migliaia di kJ/kg*
  - *Una turbina idraulica che operi sotto un salto geodetico di 1000 m rende disponibile un lavoro specifico teorico di circa 10 kJ/kg*
  - *Un rotore eolico investito da un flusso di aria a 10 m/s realizzerebbe, al massimo, un lavoro specifico di 0.05 kJ/kg*

- **Sistema che include uno scambiatore di calore (con sottrazione di calore) .** ($Q < 0$, $L=0$).
- **Sistema che include una camera di combustione.** ($Q > 0$, $L=0$).

- **Sistema che include un condotto fisso e adiabatico a sezione variabile** (*Q = 0, L=0*). E' il caso degli elementi statorici di turbomacchine motrici ed operatrici o di condotte di alimentazione di turbine idrauliche. L'equazione di bilancio (33) può essere rappresentata come:

$$H_2 = H_1$$
$$h_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 \qquad (13)$$

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = (h_1 - h_2) + g(z_1 - z_2) \qquad \text{(condotti acceleranti)}$$
$$h_2 - h_1 + g(z_2 - z_1) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \qquad \text{(condotti deceleranti)} \qquad (14)$$

B.1) Altre forme dell'equazione dell'energia per sistemi stazionari a flusso continuo

Applicando, la relazione di Gibbs in forma integrale si ottiene:

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 Tds + \int_1^2 vdp \qquad (15)$$

$$\int_1^2 Tds = Q + |L_a| \qquad (16)$$

Combinando le relazioni (36) e (37) si ottiene

$$h_2 - h_1 - Q = \int_1^2 vdp + |L_a|$$

EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER SISTEMI APERTI STAZIONARI:

$$L = h_1 - h_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + Q \qquad (17)$$

$$\textit{Equazione di 1° principio}$$

$$L = \int_2^1 v dp + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - |L_a| \qquad (18)$$

$$\textit{Equazione dell' energia " meccanica"}$$

- In una macchina operatrice ($L < 0$) :

$$|L| = h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) - Q$$

$$|L| = \int_1^2 v dp + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + |L_a|$$

B.2) L'equazione dell'energia meccanica per flussi incomprimibili

$$L = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - |L_a| \qquad (19)$$

$$\textit{Equazione dell' energia " meccanica" per flussi incomprimibili}$$

Definizione di *pressione totale*:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz \quad ; \quad p_0 = p + \rho\frac{c^2}{2} + \rho gz$$

$$L = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho} - |L_a| \qquad \textit{(per macchine motrici)}$$

$$|L| = \frac{p_{02} - p_{01}}{\rho} + |L_a| \qquad \textit{(per macchine operatrici)} \tag{20}$$

In condotti fissi (*L = 0*) :

$$\frac{p_{02}}{\rho} = \frac{p_{01}}{\rho} - |L_a|$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^{\,2}}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^{\,2}}{2} + gz_1 - |L_a| \tag{21}$$

<u>B.3) La definizione di "condizioni totali" per flussi comprimibili.</u>

$$H = h + \frac{c^2}{2} \qquad \textit{entalpia totale specifica}$$

$$H - h = \frac{c^2}{2} = c_p (T_0 - T) \quad \Rightarrow T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p} \qquad \textit{Temperatura totale}$$

La temperatura totale (o di *ristagno*) del fluido è quindi quella raggiunta dal fluido se viene rallentato fino alla condizione di velocità nulla, in assenza di scambi di energia con l'esterno.

La corrispondente pressione totale p_0, già definita per i flussi incomprimibili, è legata alle ipotesi di arresto del flusso in condizioni adiabatiche reversibili. Con tali ipotesi risulta:

$$\frac{c^2}{2} = c_p\left(T_0 - T\right) = \int_p^{p_0} v\,dp \quad \Rightarrow \quad \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad \text{Pressione totale}$$

Pertanto, in un flusso adiabatico in un condotto fisso, la temperatura e l'entalpia totale si conservano mentre la pressione totale può progressivamente diminuire per effetto di fenomeni dissipativi. Nel solo caso di flusso adiabatico e reversibile valgono le note relazioni di *Rankine – Hugoniot*:

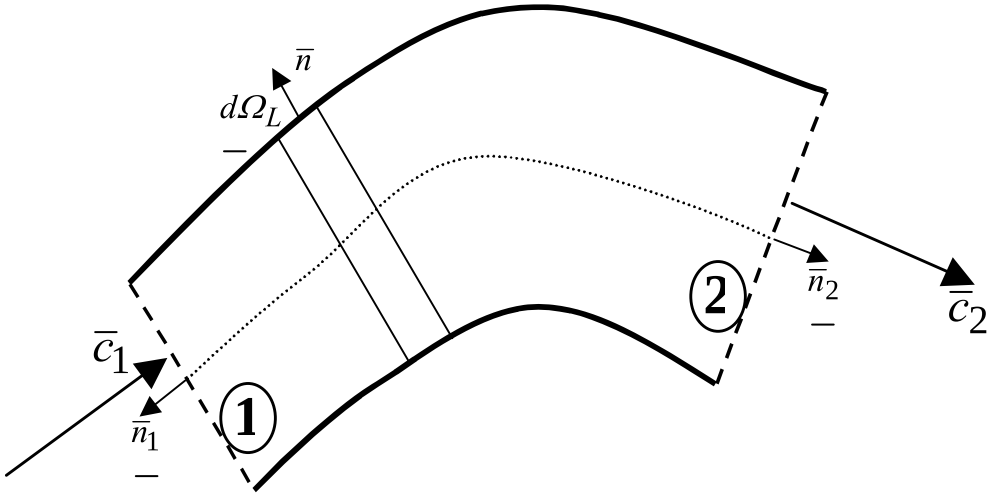
$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

In cui M è il *numero di Mach* definito come il rapporto tra la velocità del flusso e la velocità del suono *laplaciana*:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=cost} = k\frac{p}{\rho} = kRT \qquad ; M = \frac{c}{a}$$

Si può verificare che, nel caso di flusso di gas biatomici come quelli prevalentemente costituenti l'aria ($k = 1.4$), fino a $M = 0.3$ il rapporto di densità totale/statica risulta inferiore a 1.1 ed è quindi giustificata l'assunzione semplificata di flusso incomprimibile.

3. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITA' DI MOTO

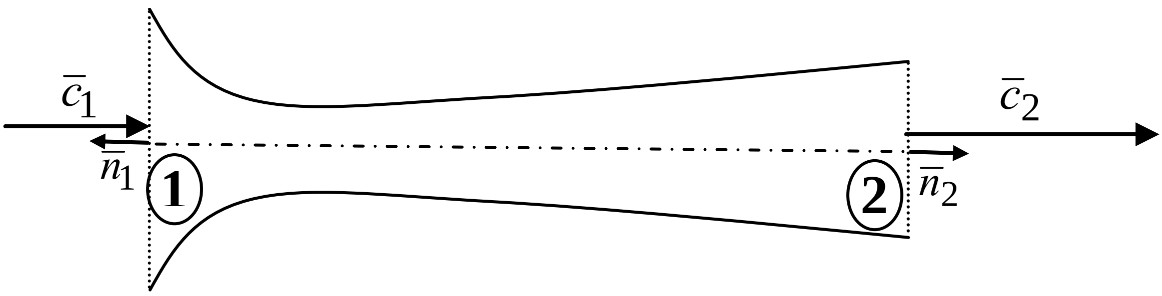


$\overline{\mathcal{M}} = M\bar{c}$ ***Quantità di Moto*** (22)

3.1 Equazione di Bilancio di Quantità di Moto in regime stazionario

$$\underset{\substack{Spinta \\ Totale}}{\bar{F}_{par}} = \underset{\substack{Spinta \\ Dinamica}}{\dot{m}(\bar{c}_1 - \bar{c}_2)} \quad \underset{\substack{Spinta \\ Statica}}{- p_1\Omega_1\bar{n}_1 - p_2\Omega_2\bar{n}_2} \quad \underset{\substack{Forza\ di \\ Massa}}{- M\bar{g}} \tag{23}$$

3.2 Equazione Scalare della Spinta in regime stazionario unidimensionale

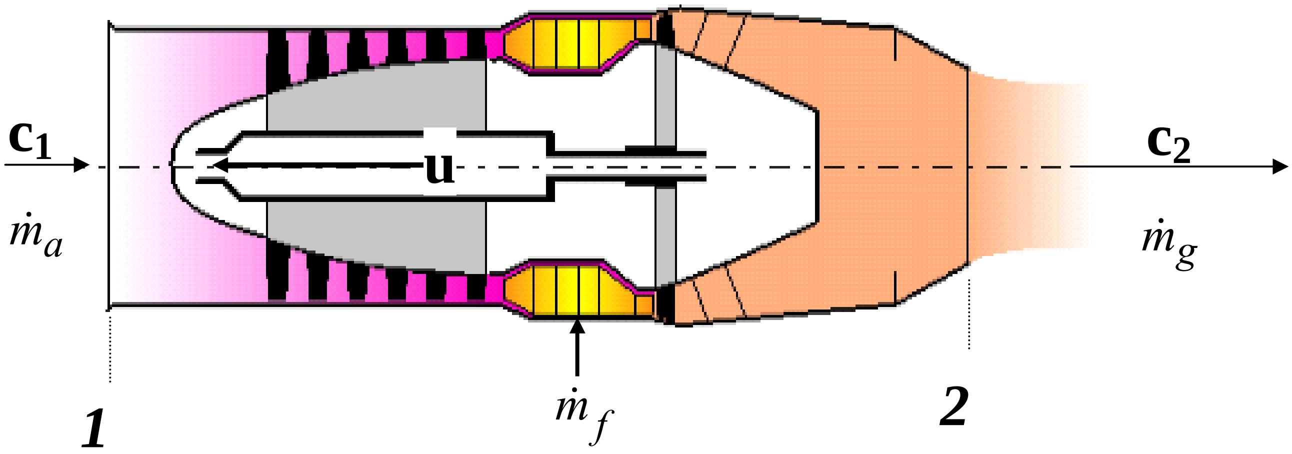


Con tale ipotesi, può essere considerata come significativa la sola componente scalare dell'equazione (51) nella direzione dell'asse del condotto. Ritenendo trascurabili le forze di massa, si ottiene:

$$\underset{\substack{Spinta\\ Totale}}{F} = \underset{\substack{Spinta\\ Dinamica}}{\dot{m}(c_1 - c_2)} \underset{\substack{Spinta\\ Statica}}{+ p_1\Omega_1 - p_2\Omega_2} \tag{24}$$

3.3 L'esempio del turbogetto

TURBOGETTO



Equazione della Massa

$$\dot{m}_g = \dot{m}_a + \dot{m}_f \tag{25}$$

Equazione dell'Energia

$$P = \dot{m}_f H_i - \dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{m}_f H_i - \dot{m}\left[\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + (h_2 - h_1)\right] \tag{26}$$

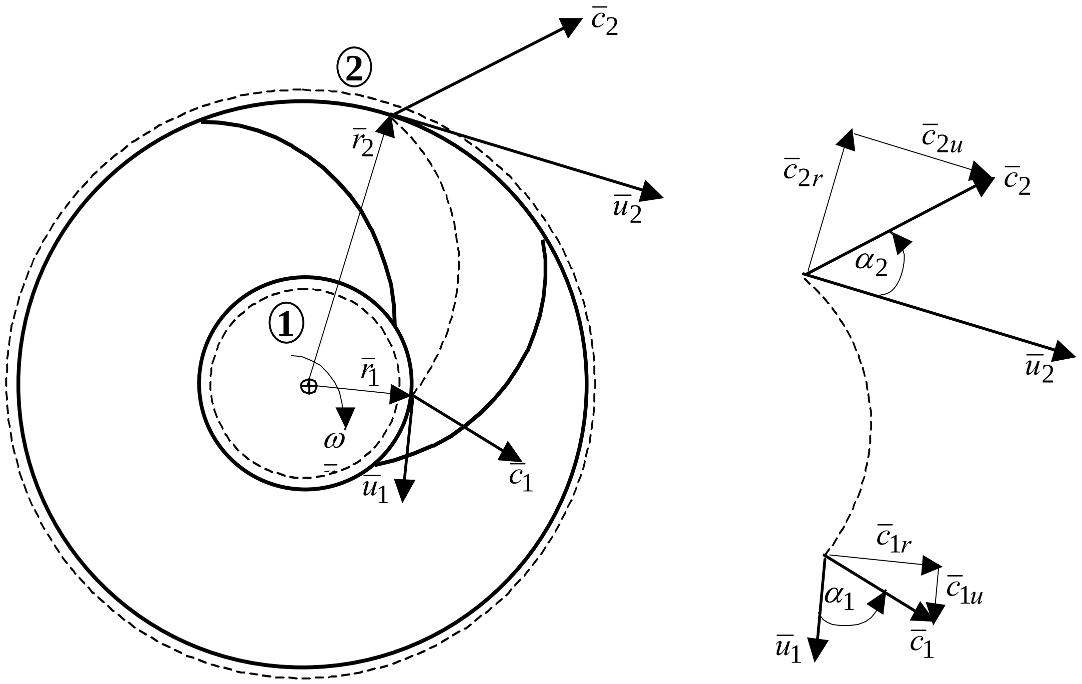
Equazione di Q.d.M (ipotesi di spinta statica nulla)

$$F = \dot{m}(c_1 - c_2) \tag{27}$$

$$P = \text{-}Fu = \dot{m}(c_2 - c_1)u \tag{28}$$

4. EQUAZIONE DI BILANCIO DEL MOMENTO DI QUANTITA' DI MOTO (In Regime Stazionario)

Questa equazione viene ricavata per un volume di controllo che include il rotore di una turbomacchina: nel caso in figura si tratta di una macchina a flusso radiale centrifugo di cui, per completezza, si è rappresentata anche la forma della palettatura.



Forza Totale dal Bilancio di Quantità di Moto:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \dot{m}\bar{c}_1 - \dot{m}\bar{c}_2 - p_1\Omega_1\bar{n}_1 - p_2\Omega_2\bar{n}_2 = \\ &= \overline{F}_{c_1} - \overline{F}_{c_2} - \overline{F}_{p_1} - \overline{F}_{p_2} \end{aligned} \tag{29}$$

Momento delle Forze rispetto all'asse di rotazione:

$$\overline{\boldsymbol{M}_o} = \overline{F}_{c_1} \times \bar{r}_1 - \overline{F}_{c_2} \times \bar{r}_2 - \overline{F}_{p_1} \times \bar{r}_1 - \overline{F}_{p_2} \times \bar{r}_2 \tag{30}$$

Componenti della velocità assoluta:

$$\overline{c} = \underset{\text{assiale}}{\overline{c}_x} + \underset{\text{radiale}}{\overline{c}_r} + \underset{\text{tangenziale}}{\overline{c}_u} = c_x \overline{i}_x + c_r \overline{i}_r + c_u \overline{i}_u$$

$$\overline{c} \times \overline{r} = \underset{\equiv \mathbf{0}}{\overline{c}_x \times \overline{r}} + \underset{\equiv \mathbf{0}}{\overline{c}_r \times \overline{r}} + \overline{c}_u \times \overline{r} = c_u r \, \overline{i}_x$$

$$\overline{F}_p \times \overline{r} \equiv \mathbf{0}$$

Modulo del momento risultante (del fluido sull'asse di rotazione):

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{o}} = \dot{m} c_{1u} r_1 - \dot{m} c_{2u} r_2 = \dot{m}\left(c_{1u} r_1 - c_{2u} r_2\right) \qquad (31)$$

Potenza trasferita dal fluido alla macchina:

($u = r\omega$ velocità periferica)

$$P = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{o}} \omega = \dot{m}(c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2) \qquad (32)$$

Lavoro trasferito dal fluido alla macchina:

$$L = \frac{P}{\dot{m}} = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u} = u_1 c_1 \cos\alpha_1 - u_2 c_2 \cos\alpha_2 \qquad (33)$$

EQUAZIONE DI EULERO PER LE TURBOMACCHINE

$$u_1 c_{1u} \neq u_2 c_{2u} \Rightarrow \begin{cases} r_1 \neq r_2 \\ c_{1u} \neq c_{2u} \end{cases}$$

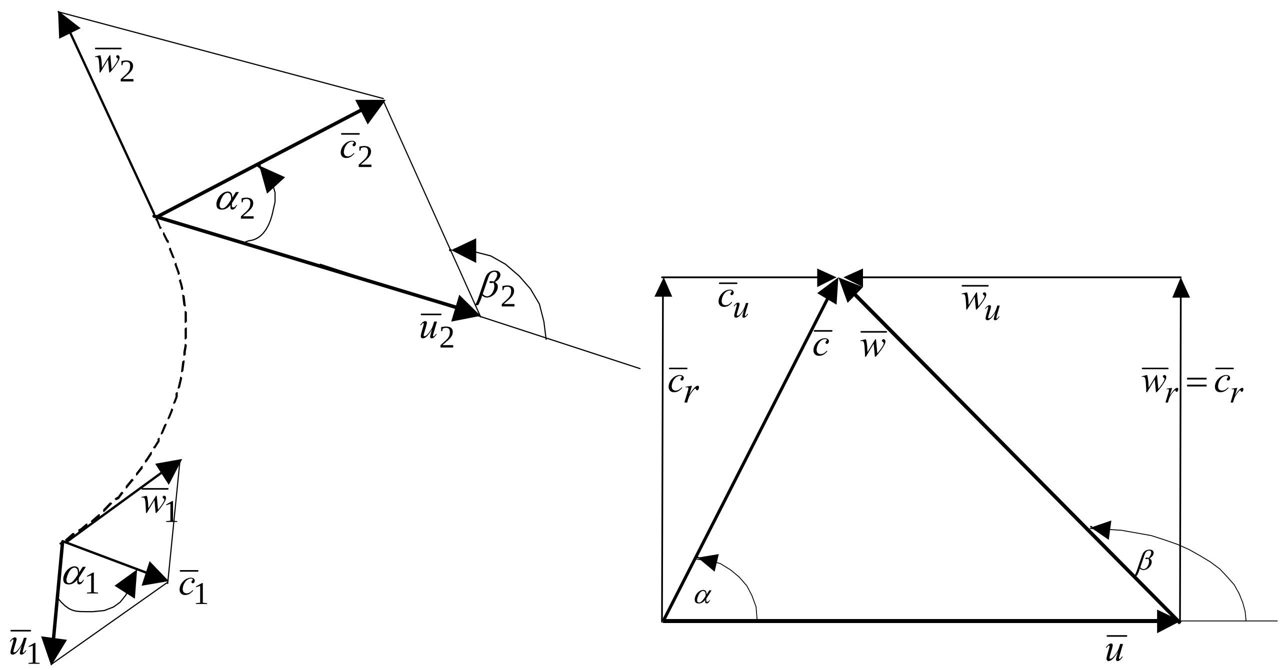
4.1 Lo studio delle turbomacchine nel riferimento relativo

Triangoli di Velocità:

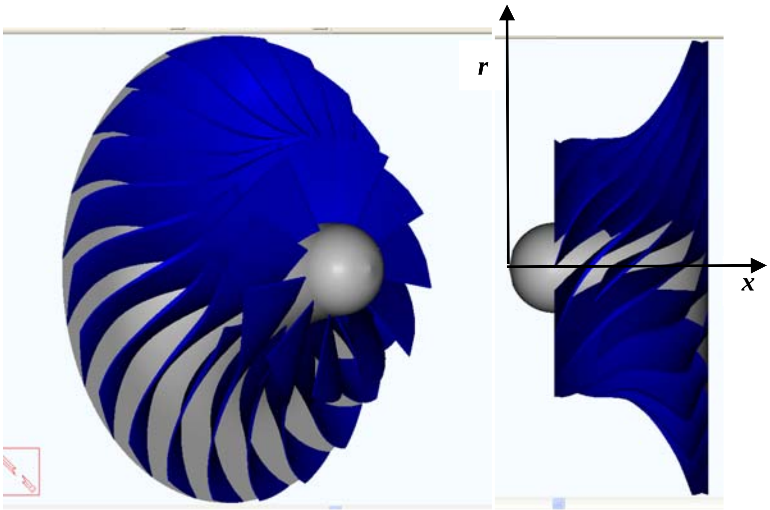
Il disegno dei condotti rotorici di una turbomacchine richiede quindi la conoscenza delle velocità del flusso nel sistema di riferimento relativo. Il condotto rotorico dovrà infatti avere andamento e curvatura tali da garantire le traiettorie desiderate dl fluido rispetto alla macchina in rotazione. Le velocità relative, *w* , sono legate a quelle assolute, *c*, dalla nota regola di composizione:

$$\overline{c} = \overline{w} + \overline{u} \qquad \Rightarrow \begin{cases} c_x = w_x \\ c_r = w_r \\ c_u = w_u + u \end{cases} \tag{34}$$

Che consente la costruzione dei *triangoli di velocità* in ingresso e in uscita:



$$\bar{c}_m = \bar{c}_x + \bar{c}_r \qquad \Rightarrow c_m = \sqrt{c_x^2 + c_r^2}$$



4.2 Un'ulteriore Formulazione dell'Equazione di Eulero

Dai triangoli di velocità illustrati in precedenza, la velocità relativa w è calcolabile una volta noti i moduli della velocità assoluta e periferica, c e u, e l'angolo α compreso tra i vettori orientati:

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2uc\cos\alpha$$

$$uc\cos\alpha = uc_u = \frac{c^2}{2} - \frac{w^2}{2} + \frac{u^2}{2}$$

Ed è quindi possibile trasformare i termini rappresentativi dello scambio di lavoro nelle turbomacchine:

$$\mathrm{L} = u_1 \mathrm{c}_{1\mathrm{u}} - u_2 \mathrm{c}_{2\mathrm{u}} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{35}$$

1) **Turbomacchina motrice**

In base alla (67), il lavoro positivo è dato da:

$$\mathrm{L} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

La situazione più favorevole per il lavoro positivo è data, ovviamente, da un contributo positivo da parte di ciascun termine. Dovrà essere, quindi:

- $c_1 > c_2$. In tal modo, viene sfruttata la diminuzione di energia cinetica nel moto assoluto per la sua conversione in energia meccanica disponibile. Peraltro, si vedrà nel seguito che in una turbina è sempre opportuno minimizzare l'energia cinetica, $c_2^2 / 2$, allo scarico dal rotore.
- $w_2 > w_1$. Il flusso relativo deve essere invece accelerato dall'ingresso verso l'uscita. Si vedrà nel seguito che l'aumento dell'energia cinetica relativa contribuisce alla realizzazione di una caduta di entalpia termodinamica direttamente nei condotti rotorici.
- $u_1 > u_2$. Infine, il lavoro di macchina motrice è favorito se il flusso procede da una sezione di ingresso collocata a un raggio maggiore a una di uscita caratterizzata da un raggio inferiore ($r_1 > r_2$); ne consegue che la maggior parte delle turbomacchine motrici radiali è a flusso *centripeto*.

2) Turbomacchina operatrice

Il lavoro di macchina operatrice è negativo. In base alla (67), il suo valore assoluto è dato da:

$$|\mathrm{L}| = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

In questo caso, ai fini di un contributo positivo da parte di ciascun termine, dovrà essere:

- $c_2 > c_1$. Una parte del lavoro trasferito dalla macchina al fluido è quindi convertito in aumento di energia cinetica del fluido
- $w_1 > w_2$. Il flusso relativo deve essere decelerato dall'ingresso verso l'uscita. Si vedrà nel seguito che la diminuzione dell'energia cinetica relativa contribuisce alla realizzazione di un aumento di entalpia termodinamica direttamente nei condotti rotorici.
- $u_2 > u_1$. Infine, il lavoro di macchina motrice è favorito se il flusso procede da una sezione di ingresso collocata a un raggio minore a una di uscita caratterizzata da un raggio maggiore ($r_2 > r_1$); per tale motivo, le turbomacchine operatrici radiali sono a flusso *centrifugo*. Anche l'aliquota di variazione dell'energia cinetica associata alla velocità periferica si traduce in un aumento di entalpia del fluido. Tale variazione, può essere interpretata come lavoro delle forze centripete sul flusso. In questo caso, il verso del moto del fluido è discorde con quello delle forze centripete e quindi la corrispondente aliquota di lavoro è negativa.

4.3 Il confronto tra equazione di Eulero ed equazione dell’energia

$$\textbf{\textit{Equazione dell' energia :}} \quad L = H_1 - H_2 + Q = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + h_1 - h_2 + Q$$

$$\textbf{\textit{Equazione di Eulero :}} \quad L = \qquad = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{36}$$

$$h_1 - h_2 + Q = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{37}$$

Nel caso più frequente di turbomacchina a flusso adiabatico sarà:

$$h_1 - h_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{38}$$

La ripartizione tra l’aliquota di energia potenziale e quella di energia cinetico che contribuiscono al lavoro è fornita dalla definizione generale del *grado di reazione del rotore*:

$$\textit{Grado di Reazione :} \quad R = \frac{h_1 - h_2}{L} = 1 - \frac{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2}}{L} = \frac{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}}{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}} \tag{39}$$

$$\textbf{\textit{Equazione dell' energia meccanica :}} \quad L = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \int_2^1 v\,dp - |L_a|$$

$$\textbf{\textit{Equazione di Eulero :}} \quad L = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{40}$$

In questo caso, è possibile un’interpretazione più diretta del ruolo delle variazioni di energia cinetica nel riferimento della macchina in rotazione:

$$\int_2^1 v\,dp - |L_a| = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{41}$$

4.5 Esempi di stadi e triangoli di velocità di turbomacchina assiale

Nelle turbomacchine assiali si assume, in prima approssimazione, che il flusso appartenga a superfici cilindriche il cui asse coincide con quello di rotazione della macchina. Pertanto le velocità periferiche in ingresso e in uscita da ciascun elemento rotorico sono uguali tra loro ($u_1 = u_2$) ed è quindi possibile riferirsi a un'unica velocità periferica, *u*. Inoltre, le velocità del flusso nei riferimenti assoluto e relativo saranno caratterizzate dalle sole componenti assiale e tangenziale. Tutte le equazioni fin qui viste vanno quindi modificate in base a queste semplificazioni e, risulta, in particolare:

$$\overline{c} = \overline{w} + \overline{u} \qquad \Rightarrow \begin{cases} c_x = w_x \\ c_u = w_u + u \end{cases} \tag{42}$$

$$\textbf{\textit{Equazione di Eulero :}} \qquad L = \begin{cases} u(c_{1u} - c_{2u}) = u(w_{1u} - w_{2u}) \\ \dfrac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \dfrac{w_2^2 - w_1^2}{2} \end{cases} \tag{43}$$

$$\textbf{\textit{Grado di Reazione :}} \qquad R = \frac{h_1 - h_2}{L} = 1 - \frac{\dfrac{c_1^2 - c_2^2}{2}}{L} = \frac{\dfrac{w_2^2 - w_1^2}{2}}{\dfrac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \dfrac{w_2^2 - w_1^2}{2}} \tag{44}$$

In base alla prima formulazione dell'equazione di Eulero (78), l'entità del lavoro scambiato dipende da due fattori fondamentali:

- La velocità periferica
- La *deviazione* del flusso, rappresentata dalla variazione delle componenti tangenziali, c_u e w_u , tra ingresso e uscita del condotto rotorico. In base alla (77) la variazione osservata nel riferimento assoluto è uguale a quella nel riferimento relativo: $\Delta c_u = \Delta w_u$.

Osservando gli esempi, riportati nel seguito, di palettature e triangoli di velocità di stadi di turbomacchina assiale, è evidente che la deviazione del flusso rotorico avviene in verso contrario a quello della velocità periferica, nel caso di una turbina; nel caso di compressore assiale, la deviazione è invece concorde con la rotazione della macchina e quindi con la velocità periferica. La deviazione è provocata dalla forma e dalla curvatura delle pale; la reazione del flusso sulla palettatura è valutabile attraverso il bilancio di quantità di moto in direzione periferica:

$$F_u = \dot{m}(c_{1u} - c_{2u}) = \dot{m}(w_{1u} - w_{2u}) = \dot{m}\Delta w_u$$

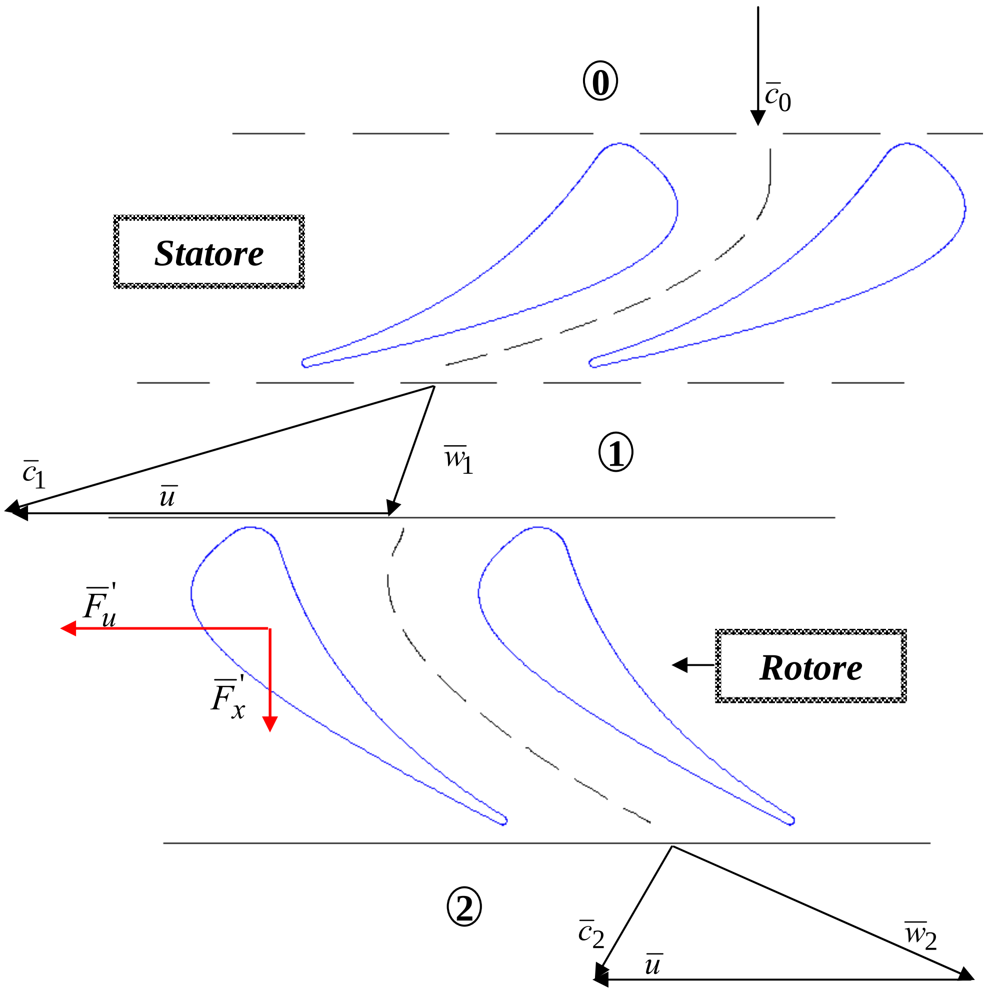
La forza F_u rappresenta quindi la spinta dinamica nella direzione della velocità periferica; è quindi possibile valutare il trasferimento di energia meccanica, ritrovando l'equazione di Eulero nella prima forma (78):

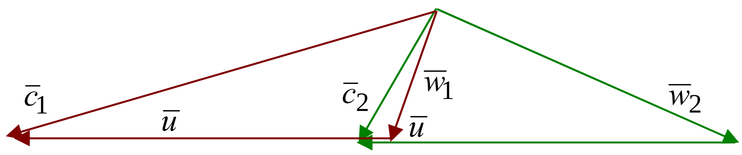
$$P = F_u u = \dot{m} u \Delta w_u$$
$$L = \frac{P}{\dot{m}} = u \Delta w_u$$

Il termine Δw_u è quindi fortemente rappresentativo delle *azioni aerodinamiche* scambiate tra fluido e palettatura. La realizzazione di tali forze richiede un accurato disegno del profilo delle pale e al crescere della loro entità aumentano le sollecitazioni sulle pale. Del resto, anche l'aumento della velocità periferica provoca un incremento di sollecitazioni, associate questa volta alle forze centrifughe cui è soggetta la pala. Ricordando che l'accelerazione centrifuga vale $r\omega^2 = u^2 / r$, l'importanza relativa tra le forze aerodinamiche e quelle centrifughe può essere stimata attraverso il *coefficiente di carico*:

$$\psi = \frac{L}{u^2/2} = \frac{2\Delta w_u}{u}$$

A) Stadio di Turbina Assiale





B) Stadio di Compressore Assiale