

**Prova scritta di Analisi matematica II – 10 maggio 2011**

Docente Pietro Baldi

**Esercizio 1.** Calcolare la soluzione  $u(t)$  del problema di Cauchy

$$u^2 u' + u^3 = t, \quad u(0) = 1.$$

**Esercizio 2.** Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 - x^2y^2.$$

- (a) Scrivere la derivata direzionale  $\partial_v f(2, 0)$ , dove  $v = (2, 3)$ .
- (b) Trovare tutti i punti critici di  $f$ .
- (c) Classificare tutti i punti critici di  $f$ .

**Esercizio 3.** Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , e sia  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{1+y}{y}, -\frac{x}{y^2} \right).$$

- (a) Stabilire se  $F$  è un campo conservativo in  $D$ .
- (b) Calcolare il lavoro del campo  $F$  lungo l'arco di circonferenza

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [\pi/4, 3\pi/4].$$

**Esercizio 4.** Calcolare il baricentro del semicerchio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$