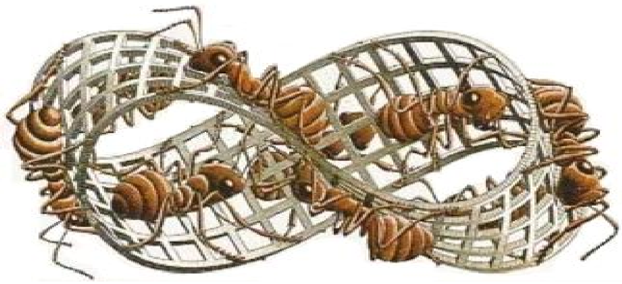
SECONDA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

APPUNTI DEL CORSO DI GEOMETRIA 3

(Topologia Generale - Omotopia e Gruppo Fondamentale)

FRANCESCO MAZZOCCA



Anno Accademico 2014/15

Disegno di copertina:
Il nastro di Möbius,
di Maurits Cornelis Escher, 1963

Indice

Prefazione

Questi appunti raccolgono buona parte degli argomenti delle lezioni del corso di *Geometria 3* per gli studenti del *Corso di Laurea in Matematica* della Seconda Università degli Studi di Napoli, a Caserta. Essi si presentano spesso schematici e mancano molti dei commenti e delle dimostrazioni indispensabili per una presentazione completa degli argomenti trattati. È pertanto consigliabile integrare la loro lettura con quella di un buon libro.

Avvertiamo che nella preparazione del corso, e quindi nella stesura di queste note, sono state tenute presenti le conoscenze acquisite dagli studenti nei precedenti corsi di algebra, analisi matematica e geometria.

Nel concludere, desideriamo ringraziare in anticipo quanti vorranno segnalarci eventuali errori e/o omissioni.

Caserta, dicembre 2014.

Francesco Mazzocca

Capitolo 1

Elementi di Topologia Generale

" Per comprendere la matematica occorre far funzionare il cervello, e questo costa sempre un certo sforzo. Non è possibile fare la matematica "a fumetti", non è possibile trasformare la sua storia in una novellina. Chi è pigro di mente, chi non prova gioia nel far lavorare il suo cervello, è meglio che non cominci neppure a leggere. Chi invece non si spaventa per le fatiche della mente, non si scoraggi se qua e là, a prima vista, non capisce, e non pretenda di leggere tutto di seguito; ma legga attentamente, un poco per volta, saltando le cose più difficili, o facendosele spiegare da chi ha studiato più di lui."

Lucio Lombardo Radice
(*"La Matematica da Pitagora a Newton", Prefazione*)

1.1 Notazioni, richiami e preliminari

Nel seguito useremo le seguenti notazioni standard:

- $\mathbb{Z}$ = anello dei numeri interi.
- $\mathbb{Q}$ = campo dei numeri razionali.
- $\mathbb{R}$ = campo dei numeri reali.
- $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ = insiemi dei numeri interi, razionali e reali positivi, rispettivamente.
- $\mathbb{C}$ = campo dei numeri complessi.
- $\mathbb{R}^n$ = spazio euclideo $n-$dimensionale.

- $\mathbb{R}^{n,m}$ = spazio vettoriale delle matrici con n righe e m colonne a coefficienti reali.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo, o segmento, di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato di estremi a, b).
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (intervallo, o segmento, di $\mathbb{R}$ limitato, chiuso a sinistra e aperto a destra di estremi a, b; un intervallo di questo tipo sarà detto intervallo c.a.).
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervallo, o segmento, di $\mathbb{R}$ limitato, aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi a, b).
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervallo, o segmento, di $\mathbb{R}$ aperto e limitato di estremi a, b).
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}$ (intervallo chiuso semilimitato a sinistra, o semiretta destra chiusa di estremo a).
- $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo aperto semilimitato a sinistra, o semiretta destra aperta di estremo a).
- $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo chiuso semilimitato a destra, o semiretta sinistra chiusa di estremo a).
- $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo aperto semilimitato a destra, o semiretta sinistra aperta di estremo a).
- $|a|$ = valore assoluto del numero reale a.
- $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\,$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (norma di $\boldsymbol{a}$).
- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}\,$, $a + ib \in \mathbb{C}$ (modulo del numero complesso $a + ib$).
- $GL(n, \mathbb{F})$ = Gruppo delle matrici quadrate invertibili sul campo $\mathbb{F}$ (gruppo lineare di grado n su $\mathbb{F}$).

DEFINIZIONE 1.1.1. Sia X un insieme non vuoto. Una famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$ di sottoinsiemi di X prende il nome di ***ricoprimento di*** X se

$$X = \bigcup_{j \in J} A_j\,,$$

cioè se, per ogni $x \in X$, esiste un indice $t \in J$ tale che $x \in A_t$. Un ricoprimento i cui elementi sono sottoinsiemi a due a due disgiunti è una ***partizione*** di X. Ricordiamo che le classi d'equivalenza di una relazione d'equivalenza su X sono una partizione di X e, viceversa, gli elementi di una partizione di X sono le classi d'equivalenza di un'unica relazione d'equivalenza su X. Più in generale, un ***ricoprimento di un sottoinsieme*** Y ***di*** X è una famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$ di sottoinsiemi di

X tali che

$$Y \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j \,.$$

□

Ricordiamo che, per un sottoinsieme Y di X, si definisce ***complemento*** o ***complementare*** di Y in X, e si denota con $\mathscr{C}_X(Y)$ l'insieme

$$\mathscr{C}_X(Y) = X \setminus Y = \{a \in X \ : \ a \notin Y\}.$$

L'insieme $\mathscr{C}_X(Y)$ si denota anche con $\mathscr{C}(Y)$ se X è chiaro dal contesto. Se $\{Y_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, risulta

$$\mathscr{C}\big(\bigcup_{j\in J} Y_j\big) = \bigcap_{j\in J} \mathscr{C}(Y_j) \quad \text{e} \quad \mathscr{C}\big(\bigcap_{j\in J} Y_j\big) = \bigcup_{j\in J} \mathscr{C}(Y_j)\,. \tag{1.1}$$

1.2 Spazi metrici e funzioni continue

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ saranno indifferentemente chiamati ***punti*** o ***vettori***. Ricordiamo che si definisce ***distanza euclidea*** tra due punti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ di $\mathbb{R}^n$, e si denota con $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, il numero reale non negativo

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}\,. \tag{1.2}$$

Osserviamo che nel caso $n = 1$, la (1.2) si riduce a

$$d(a, b) = |b - a|\,,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. La distanza in $\mathbb{R}^n$ è, dunque, una funzione $d \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed è ben noto che verifica le seguenti ***proprietà fondamentali***:

- $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq 0$,
- $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ se, e solo se, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ (**proprietà di coincidenza**),
- $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (**proprietà simmetrica**),
- $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (**proprietà triangolare**),

per ogni $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

La distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ permette di dare la classica definizione di *funzione continua,* nota al Lettore dai corsi di analisi matematica.

DEFINIZIONE 1.2.1. (Funzioni continue tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$) Una funzione $f \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice ***continua in un punto*** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ se, per ogni numero reale positivo ϵ, esiste un numero reale positivo δ_ϵ tale che

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{a})) < \epsilon\,. \tag{1.3}$$

La funzione $f \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice ***continua*** in $\mathbb{R}^n$ se è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^n$.

□

Il concetto di distanza in $\mathbb{R}^n$, utilizzando le sue proprietà fondamentali, si generalizza in modo naturale ad insiemi arbitrari nel seguente modo.

DEFINIZIONE 1.2.2. (Spazi metrici) Sia X un insieme non vuoto. Una funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

prende il nome di ***distanza***, o ***metrica*** su X, se, per ogni $a, b, c \in X$, verifica le seguenti proprietà (***assiomi di spazio metrico***):

(M1) $d(a, b) \geq 0$,

(M2) $d(a, b) = 0$ se, e solo se, $a = b$ (**proprietà di coincidenza**),

(M3) $d(a, b) = d(b, a)$ (**proprietà simmetrica**),

(M4) $d(a, b) \leq d(a, c) = d(c, b)$ (**proprietà triangolare**).

Quando d è una metrica su X, il numero reale $d(a, b)$ prende il nome di ***distanza tra*** a ***e*** b, la coppia (X, d) si chiama ***spazio metrico*** e gli elementi di X si dicono ***punti***. Uno spazio metrico (X, d), si dice ***limitato*** se l'insieme

$$\{d(a, b) \ : \ a, b \in X\}$$

è limitato superiormente, cioè se ammette l'estremo superiore (***diametro di*** X). In questo caso anche la distanza d si dice ***limitata***. Se (X, d) non è limitato si dice ***illimitato*** o ***non limitato***. □

DEFINIZIONE 1.2.3. (Sottospazi metrici) Siano (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme di X. La funzione $d_{|_Y}$(restrizione di d a $Y \times Y$), definita da

$$d_{|_Y}(a, b) = d(a, b)\,, \text{ per ogni } \ a, b \in Y,$$

risulta una metrica su Y, detta ***metrica indotta da*** d ***su*** Y o ***restrizione di*** d ***a*** Y. Lo spazio metrico $(Y, d_{|_Y})$ si dice ***sottospazio*** (metrico) di (X, d) e, se non vi è luogo ad equivoci, la metrica $d_{|_Y}$ si denota semplicemente con d e $(Y, d_{|_Y})$ semplicemente con Y. Il sottoinsieme Y si dice ***limitato*** se è limitato come sottospazio metrico. □

ESEMPIO 1.2.4. (Spazi euclidei) La distanza euclidea d in $\mathbb{R}^n$, definita dalla (1.2), è chiaramente una metrica (non limitata) su $\mathbb{R}^n$. Lo spazio metrico relativo $(\mathbb{R}^n, d)$ si chiama ***spazio euclideo n-dimensionale*** e si denota con $\mathbb{E}^n$, o semplicemente con $\mathbb{R}^n$. Per $n = 1, 2$ si parla di ***retta euclidea*** e ***piano euclideo***, rispettivamente. □

ESEMPIO 1.2.5. (Metrica euclidea su $\mathbb{R}^{n,m}$) Sia $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo $n \times m$ ad elementi in $\mathbb{R}$. Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

e
$$\boldsymbol{a} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{2,m} \cdots a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,m}) \in \mathbb{R}^{nm},$$
la funzione $f : A \in \mathbb{R}^{n,m} \to \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{nm}$ è biunivoca e induce su $\mathbb{R}^{n,m}$ una metrica d, ponendo $d(A, B) = d(f(A), f(B))$. Tale metrica si dice ***metrica euclidea di*** $\mathbb{R}^n$. □

La nozione di continuità di cui alla **Definizione 1.2.1** si generalizza agli spazi metrici nel seguente modo.

DEFINIZIONE 1.2.6. (Funzioni continue tra spazi metrici) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice ***continua*** in un punto $a \in X$ se, per ogni numero reale positivo ϵ, esiste un numero reale positivo δ_ϵ tale che
$$x \in X \text{ e } d_X(x, a) < \delta_\epsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon\,. \tag{1.4}$$
La funzione $f : X \to Y$ si dice ***continua*** in X se è continua in ogni punto di X. □

Nel seguito riterremo assegnato uno spazio metrico (X, d), che spesso denoteremo semplicemente con X, se non vi è luogo ad equivoci.

Per ogni $a \in X$ e $r \geq 0$ numero reale, si definiscono i seguenti sottoinsiemi di X:

- $B_r(a) := \{x \in X \,:\, d(a, x) < r\}$,
  l'***intorno sferico aperto*** di centro a e raggio r;
- $D_r(a) := \{x \in X \,:\, d(a, x) \leq r\}$,
  l'***intorno sferico chiuso*** di centro a e raggio r;
- $S_r(a) := D_r(a) \setminus B_r(a) = \{x \in S \,:\, d(a, x) = r\}$,
  la ***superficie sferica*** di centro a e raggio r.

Gli intorni sferici aperti e chiusi, vengono anche chiamati ***sfere***, ***palle*** o ***dischi*** aperti e chiusi, rispettivamente. Essi sono evidentemente insiemi limitati.

Spesso parleremo semplicemente di intorni sferici, sfere, palle e dischi, omettendo gli aggettivi aperti e chiusi, se questi sono chiari dal contesto o non sono necessari. Per esempio, se diciamo "intorno sferico $B_r(a)$", è chiaro dalla notazione che stiamo parlando di un intorno sferico aperto.

OSSERVAZIONE 1.2.7. Nel caso della retta euclidea, gli intorni sferici aperti e chiusi si riducono agli intervalli limitati rispettivamente aperti e chiusi; più precisamente si ha:
$$B_r(a) = (a - r, a + r) \text{ e } D_r(a) = [a - r, a + r]\,.$$

Inoltre, la superficie sferica $S_r(a)$ si riduce all'insieme di due punti $\{a-r, a+r\}$. Nel caso del piano euclideo, gli intorni sferici e le superfici sferiche si dicono rispettivamente ***intorni circolari*** e ***circonferenze***. □

OSSERVAZIONE 1.2.8. Nella **Definizione 1.2.6** di funzione continua la (1.4) può riscriversi, usando gli intorni sferici, nel seguente modo:

$$x \in B_{\delta_\epsilon}(a) \Rightarrow\ f(x) \in B_\epsilon(f(a))\,, \tag{1.5}$$

ove, evidentemente, $B_{\delta_\epsilon}(a)$ e $B_\epsilon(f(a))$ sono intorni sferici negli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y), rispettivamente. □

ESERCIZIO 1.2.9. Provare che, per ogni $a \in X$,

1. le famiglie $\{B_r(a)\}_{r\geq 0}$, $\{D_r(a)\}_{r\geq 0}$, $\{S_r(a)\}_{r\geq 0}$ sono ricoprimenti di X;
2. risulta
$$B_r(a) \cap B_s(a) = B_t(a), \tag{1.6}$$
ove $t = min\{r, s\}$ è il più piccolo tra r e s. □

PROPOSIZIONE 1.2.10. *Sia x un punto dell'intorno sferico $B_r(a)$. Allora esiste un numero reale positivo $s > 0$ tale che $B_s(x)$ è contenuto in $B_r(a)$.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo s tale che $0 < s < r - d(a, x)$. Allora, applicando la disuguaglianza triangolare ad ogni punto $y \in B_s(x)$, abbiamo

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s < d(a, x) + r - d(a, x) = r$$

e l'asserto è provato. □

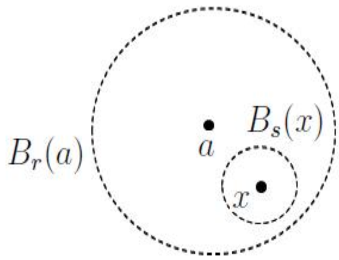


Figura 1.1: Proposizione 1.2.10

PROPOSIZIONE 1.2.11. *Siano $B_r(a)$ e $B_t(b)$ due intorni sferici ad intersezione non vuota. Allora, per ogni $c \in B_r(a) \cap B_t(b)$, esiste un numero reale positivo s tale che*

$$B_s(c) \subseteq B_r(a) \cap B_t(b).$$

Equivalentemente, l'intersezione di due intorni sferici aperti, se non è vuota, è unione di intorni sferici aperti.

DIMOSTRAZIONE. In forza della **Proposizione 1.2.10** esistono due intorni sferici $B_h(c)$ e $B_k(c)$ di centro c contenuti rispettivamente in $B_r(a)$ e $B_t(b)$. Allora, se s è un numero reale positivo minore di $min\{h,k\}$, risulta $B_s(c) \subseteq B_r(a) \cap B_t(b)$. □

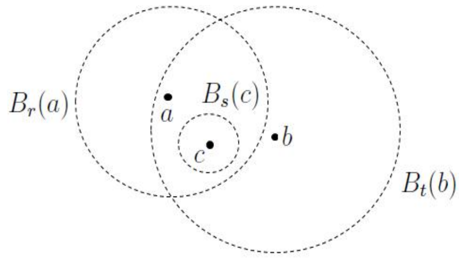


Figura 1.2: Proposizione 1.2.11

PROPOSIZIONE 1.2.12. (Proprietà di Hausdorff) *Se a, b sono punti distinti di X, esistono due intorni sferici di centro rispettivamente a e b che risultano ad intersezione vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Sia r un numero reale tale che $0 < r < \frac{1}{2}d(a,b)$. Allora gli intorni sferici $B_r(a)$ e $B_r(b)$ sono ad intersezione vuota. Infatti, se esistesse un punto $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$, avremmo

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{d(a,b)}{2} + \frac{d(a,b)}{2} = d(a,b),$$

il che è assurdo. □

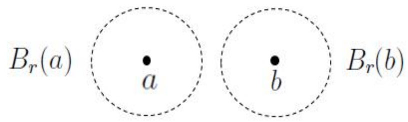


Figura 1.3: Proprietà di Hausdorff

PROPOSIZIONE 1.2.13. Per ogni punto a di uno spazio metrico, risulta

$$\bigcap_{r>0} B_r(a) = \{a\}. \tag{1.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo l'esistenza di un punto $b \neq a$ in $\bigcap_{r>0} B_r(a)$ e poniamo $s = d(a,b)$. Allora $b \notin B_s(a)$ e ciò è assurdo. □

DEFINIZIONE 1.2.14. (Insiemi aperti e chiusi, intorni) Sia assegnato uno spazio metrico (X,d). Un insieme di punti A di X prende il nome di ***insieme aperto***, o semplicemente ***aperto***, se è unione di sfere aperte di (X, d) o se è vuoto. Un insieme di punti C di X prende il nome di ***insieme chiuso***, o semplicemente ***chiuso***, se risulta il complementare di un aperto. Un insieme di punti U di X prende il nome di ***intorno*** di un punto $a \in X$ se contiene un aperto contenente a. □

ESERCIZIO 1.2.15. Provare che in uno spazio metrico valgono le seguenti proprietà:

- *gli intorni sferici aperti sono aperti;*
- *un insieme A è aperto se, per ogni suo punto a, esiste un intorno sferico aperto di centro a contenuto in A;*
- *gli intorni sferici chiusi e le superfici sferiche sono chiusi;*
- *i punti sono chiusi e non sono aperti ;*
- *un insieme aperto è intorno di ogni suo punto.* □

PROPOSIZIONE 1.2.16. **(Proprietà degli aperti)** *L'insieme $\tau_d(X)$ di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) verifica le seguenti proprietà:*

- *l'insieme vuoto e X sono aperti;*
- *l'unione di un insieme di aperti è un aperto;*
- *l'intersezione di due (e quindi di un numero finito) aperti è un aperto.*

DIMOSTRAZIONE. È una facile conseguenza dell'**Esercizio 1.2.9** e della **Proposizione 1.2.11**. □

ESEMPIO 1.2.17. **(Intersezione di un insieme infinito di aperti)** L'intersezione di tutti gli intorni sferici aperti con centro un fissato punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ è uguale ad $\{\boldsymbol{a}\}$, che ovviamente non è unione di sfere aperte. Abbiamo così un esempio di un insieme infinito di aperti la cui intersezione non è un aperto. Osserviamo che in $\mathbb{R}^n$ esistono anche insiemi infiniti di aperti la cui intersezione è un aperto. Per esempio, con $r > 0$, l'intersezione di tutti gli intorni sferici aperti di centro $\boldsymbol{a}$ e contenenti $B_r(\boldsymbol{a})$ è uguale ad $B_r(\boldsymbol{a})$, che è un aperto. □

PROPOSIZIONE 1.2.18. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ è continua in un punto $a \in X$ se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:*

(i) *per ogni aperto A' di Y contenente $f(a)$, esiste un aperto A di X contenente a tale che $f(A) \subseteq A'$;*

(ii) *per ogni intorno U' di $f(a)$ in Y, esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq U'$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia f continua in $a \in X$ e, fissato un aperto A' di Y contenente $a' = f(a)$, consideriamo un intorno sferico $B_s(a')$ in Y contenuto in A'. Allora, per la continuità di f in a, esiste un intorno sferico aperto $B_r(a)$ in X tale che

$f(B_r(a)) \subseteq B_s(a') \subseteq A'$. Così, essendo $B_r(a)$ un aperto di X, abbiamo che la continuità di f in a implica la (i).
Supponiamo ora che la f verifichi la (i), fissiamo un intorno U' di $f(a)$ in Y e consideriamo un aperto A' di Y contenente a' e contenuto in U'. Allora esiste un aperto U di X contenente a tale che $f(U) \subseteq A' \subseteq U'$ e U è un intorno di a. Abbiamo, così che (i) implica (ii).
Per finire, supponiamo che valga la (ii) e fissiamo un numero reale $\epsilon > 0$. Allora esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq B_\epsilon((f(a))$ e, scelto $\delta_\epsilon > 0$ in modo che $B_{\delta_\epsilon}(a) \subseteq U$, risulta

$$x \in B_{\delta_\epsilon}(a) \subseteq U \;\Rightarrow\; f(x) \in B_\epsilon((f(a)) .$$

Questo significa che f è continua in a (*cfr.* (1.5)) e l'asserto è completamente provato. □

PROPOSIZIONE 1.2.19. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ è continua in X se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:*

(i) *per ogni aperto A' di Y, $f^{-1}(A')$ è un aperto di X;*
(ii) *Per ogni $a \in X$ e per ogni intorno U' di $f(a)$ in Y, $f^{-1}(U')$ è un intorno di a in X.*

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla proposizione precedente. □

OSSERVAZIONE 1.2.20. Notiamo esplicitamente che le proprietà (i) e (ii) delle **Proposizioni 1.2.18** e **1.2.19** utilizzano soltanto nozioni relative agli aperti. Questo significa che potrebbero essere utilizzate per una definizione equivalente di funzione continua, senza un esplicito riferimento alla metrica. □

1.2.1 Complementi ed esempi

ESEMPIO 1.2.21. (Distanza euclidea su $\mathbb{C}^n$) Ricordiamo che è possibile identificare $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ (nel caso $n = 1$ abbiamo il *piano di Gauss*) mediante la funzione biunivoca

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \;\to\; (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n) \in \mathbb{C}^n .$$

Allora la distanza euclidea di $\mathbb{R}^{2n}$ può trasportarsi in $\mathbb{C}^n$ ponendo

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2 + \cdots + |y_n - x_n|^2} ,$$

per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. La distanza su $\mathbb{C}^n$ così ottenuta si chiama ***distanza euclidea su*** $\mathbb{C}^n$. □

ESEMPIO 1.2.22. (Metrica discreta) Sia X un insieme non vuoto e, per ogni due elementi $a, b \in X$, si ponga

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a = b \\ \\ 1 & \text{se} \quad a \neq b \end{cases} . \tag{1.8}$$

La funzione d, come facilmente si verifica, è una metrica su X, detta ***metrica discreta***. □

ESEMPIO 1.2.23. Per ogni due punti $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ del piano euclideo $\mathbb{R}^2$, si ponga

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = max\{|a_1 - b_1|, \, |a_2 - b_2|\} . \tag{1.9}$$

La funzione d, come facilmente si verifica, è una metrica su $\mathbb{R}^2$. □

ESEMPIO 1.2.24. Sia X l'insieme delle funzioni dell'intervallo $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ e si ponga

$$d(f, g) = min\{|f(x) - g(x)| \ : \ x \in [0, 1]\},$$

per ogni $f, g \in X$. Osserviamo che, se per due elementi f, g di X, risulta $d(f, g) = 0$, non necessariamente deve essere $f = g$. Ne segue che d non verifica la proprietà (M3) e, quindi, d *non è una metrica su* X. □

ESEMPIO 1.2.25. Siano (X, d) uno spazio metrico e r un numero reale positivo. Posto, per ogni $a, b \in X$,

$$d'(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)} \quad \text{e} \quad d''(a, b) = rd(a, b) \, ,$$

si ha che d' e d'' sono due distanze su X. Per la metrica d', risulta $d'(a, b) \leq 1$, per ogni $a, b \in X$ e, quindi, d' è un esempio di metrica limitata. □

Considerato uno spazio metrico (X, d), siano x un punto di X e A, B due sottoinsiemi di X. Gli insiemi di numeri reali

$$\{d(a, x) \ : \ a \in A\} \, , \ \{d(a, b) \ : \ a \in A \, , \, b \in B\}$$

sono limitati inferiormente da 0 e, quindi, ammettono estremi inferiori che denoteremo rispettivalente con $d(x, A)$ e $d(A, B)$. I numeri reali $d(x, A)$ e $d(A, B)$ si chiamano rispettivamente ***distanza tra*** x ***e*** A e ***distanza tra*** A ***e*** B. Valgono le seguenti proprietà di facile verifica:

(1) $x \in A \ \Rightarrow \ d(x, A) = 0$;

(2) $d(A, B) = d(B, A)$;

(3) $A \cap B \neq \emptyset \ \Rightarrow \ d(A, B) = 0$;

(4) $x \in S_r(a)\,,\ A = B_r(a) \ \Rightarrow \ d(x, A) = 0$;

(5) $d(a, b) = 2r\,,\ A = B_r(a)\,,\ B = B_r(b) \ \Rightarrow \ d(A, B) = 0\,.$

1.2.2 Isometrie e proprietà metriche

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \to Y$ un'applicazione di X in Y. Si dice che f ***conserva le distanze*** se risulta

$$d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b))\,,\ \text{ per ogni } a, b \in X\,. \tag{1.10}$$

In questo caso la f, in forza della proprietà (M2), è necessariamente iniettiva.

DEFINIZIONE 1.2.26. **(Isometrie)** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione biunivoca $f : X \to Y$ che conserva le distanze prende il nome ***isometria*** di X in Y. Un'isometria di (X, d_X) in sé prende anche il nome di ***movimento*** di (X, d_X). □

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (T, d_T) spazi metrici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ isometrie. È facile provare che:

- la funzione identità di X è un'isometria di X in sé;
- la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ dell'isometria $f : X \to Y$ è un'isometria di Y in X;
- la funzione composta $g \circ f : X \to Z$ delle due isometrie f e g è un'isometria di X in Z.

Le tre precedenti proprietà assicurano che la relazione

"$X \sim Y$ *se esiste un'isometria di* X *su* Y"

è una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi metrici. Due spazi metrici di una stessa classe d'equivalenza si dicono ***isometrici***. L'insieme delle isometrie di uno spazio metrico X in se stesso, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, risulta un gruppo che si chiama ***gruppo delle isometrie*** o ***gruppo dei movimenti*** di X e si denota con $Mov(X)$.

ESEMPIO 1.2.27. **(Movimenti di $\mathbb{R}^n$)** Ricordiamo che una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ si dice *ortogonale* se l'inversa A^{-1} coincide con la trasposta A^t. Le matrici ortogonali d'ordine n formano un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$, che si denota con $\mathbb{O}(n)$. Dai corsi di *Geometria 1* e *Geometria 2* è noto che:

- un movimento F di $\mathbb{R}^n$ è rappresentato da un'equazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

  ove $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è un generico vettore, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e A_F è la matrice ortogonale d'ordine n le cui colonne sono ordinatamente uguali alle componenti dei vettori $F(1, 0, \dots, 0), F(0, 1, 0, \dots .0)$, ..., $F(0, \dots, 0, 1)$;
- se $A \in \mathbb{O}(n)$ è una matrice ortogonale, l'applicazione F_A di $\mathbb{R}^n$ in sé rappresentata dall'equazione (1.11), ove si è posto $A_F = A$, è un movimento di $\mathbb{R}^n$.

L'applicazione

$$A \in \mathbb{O}(n) \rightarrow F_A \in Mov(\mathbb{R}^n)$$

è un isomorfismo tra i gruppi $\mathbb{O}(n)$ e $Mov(\mathbb{R}^n)$. □

Le ***proprietà metriche*** di uno spazio metrico (X, d) sono le proprietà di X invarianti per isometrie, ovvero invarianti rispetto al gruppo $Mov(X)$. Si ha, dunque, che ogni proprietà metrica di X è tale in un qualsiasi spazio isometrico a X. Quanto detto ci permette di identificare due spazi metrici che siano isometrici; in altre parole, *lo studio degli spazi metrici, rispetto alle proprietà metriche, si fa a meno di isometrie.*

OSSERVAZIONE 1.2.28. (Geometria euclidea) La ***geometria euclidea*** è lo studio delle proprietà metriche di $\mathbb{E}^n$. □

ESEMPIO 1.2.29. La proprietà di uno spazio metrico di essere limitato è una proprietà metrica. Si ha subito, infatti, che non può esistere un'isometria tra uno spazio metrico limitato ed uno illimitato. □

1.3 Spazi topologici: prime proprietà ed esempi

Molte nozioni e proprietà di uno spazo metrico dipendono essenzialmente dalle proprietà degli insiemi aperti piuttosto che da quelle della metrica. Per questo motivo, usando le proprietà fondamentali degli aperti di uno spazio metrico, si introducono delle strutture più generali degli spazi metrici stessi: ***gli spazi topologici***.

DEFINIZIONE 1.3.1. (Spazi topologici) Siano X un insieme non vuoto, i cui elementi chiamiamo ***punti***, e τ una famiglia di sottoinsiemi di X, i cui elementi chiamiamo ***insiemi aperti*** o, più semplicemente ***aperti***. L'insieme τ prende il nome di ***topologia*** su X se valgono le seguenti proprietà (***assiomi degli aperti***):

(A1) *l'insieme vuoto e X sono aperti* (aperti banali);
(A2) *l'unione di un insieme di aperti è un aperto;*
(A3) *l'intersezione di due aperti (e quindi di un numero finito) è un aperto.*

Quando τ è una topologia su X, la coppia (X, τ) prende il nome di ***spazio topologico*** e X si dice ***sostegno*** dello spazio. □

DEFINIZIONE 1.3.2. (Confronto di topologie) Siano τ e σ due topologie su uno stesso insieme X. Si dice che τ è ***meno fine*** di σ, e si scrive $\tau \leq \sigma$, se ogni aperto di τ è anche un aperto di σ, cioè $\tau \subseteq \sigma$. Quando τ è meno fine di σ si dice anche che σ è ***più fine*** di τ. Se $\tau \nleq \sigma$ e $\sigma \nleq \tau$ si dice che τ e σ sono ***inconfrontabili***. □

OSSERVAZIONE 1.3.3. Nell'insieme di tutte le topologie su un insieme X, la relazione di finezza risulta un ordine parziale. □

DEFINIZIONE 1.3.4. (Sottospazi) Se (X, τ) è uno spazio topologico e Y un sottoinsieme non vuoto di X, la famiglia

$$\tau_{|Y} = \{Y \cap A \text{ con } A \in \tau\}$$

è una topologia su Y, detta ***topologia indotta***. Lo spazio topologico $(Y, \tau_{|Y})$ prende il nome di ***sottospazio topologico*** o, più semplicemente ***sottospazio***, di X. □

OSSERVAZIONE 1.3.5. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X. Ogni aperto di X contenuto in Y è un aperto nella topologia indotta su Y. □

ESERCIZIO 1.3.6. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X. Provare che gli aperti nella topologia indotta su Y sono tutti e soli gli aperti di X contenuti in Y se, e solo se, Y è un aperto in X. □

Nel seguito riterremo sempre assegnato uno spazio topologico (X, τ), che spesso denoteremo soltanto con X, se ciò non darà luogo ad equivoci. Inoltre, ogni sottoinsieme di X sarà sempre riguardato come suo sottospazio.

DEFINIZIONE 1.3.7. (Insiemi chiusi) Un sottoinsieme C di uno spazio topologico X si dice ***insieme chiuso*** o, più semplicemente ***chiuso***, se il suo complementare $\mathscr{C}(C)$ è un aperto in X. Se Y è un sottoinsieme di X, un ***chiuso di*** Y è un sottoinsieme di Y chiuso nella topologia indotta. □

ESERCIZIO 1.3.8. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X. Provare che i chiusi nella topologia indotta su Y sono tutte e sole le intersezioni dei chiusi di X con Y, in particolare, ogni chiuso di X contenuto in Y è un chiuso nella topologia indotta su Y. Provare, inoltre, che i chiusi nella topologia indotta su Y sono tutti e soli i chiusi di X contenuti in Y se, e solo se, Y è un chiuso in X. □

L'insieme di tutti i chiusi dello spazio topologico (X, τ) sarà denotato con $\mathscr{C}_\tau$ o, più semplicemente, con $\mathscr{C}$. È chiaro che, essendo il complemento di un chiuso un aperto e valendo le (1.1), vi è una dualità tra l'insieme τ degli aperti e quello $\mathscr{C}_\tau$ dei chiusi, che scambia tra loro "aperti con chiusi", "unione con intersezione" e "contenente con contenuto". Questo, tra l'altro, significa che la conoscenza di $\mathscr{C}_\tau$ equivale alla conoscenza di τ. Utilizzando le (1.1) è facile provare che i chiusi di uno spazio topologico X verificano le seguenti proprietà:

- *l'insieme vuoto e X sono chiusi (**chiusi banali**);*
- *l'unione di due chiusi (e quindi di un numero finito) è un chiuso;*
- *l'intersezione di un insieme di chiusi è un chiuso.*

Se un insieme di chiusi di una topologia τ su X verifica le tre precedenti proprietà, non è detto che sia la famiglia di tutti i chiusi di τ. Per esempio, supponiamo che esista in (X, τ) un chiuso non contenente un fissato punto $a \in X$. Allora l'insieme costituito dal vuoto e da tutti i chiusi contenenti a verifica le nostre proprietà e non è l'insieme di tutti i chiusi di (X, τ). Ciò nonostante, le proprietà in questione possono considerarsi caratteristiche dei chiusi e possono essere usate come assiomi per definire una topologia, nel senso precisato dalla proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 1.3.9. *Siano X un insieme non vuoto e $\mathscr{C}$ un insieme di sottoinsiemi di X, i cui elementi chiamiamo chiusi. Supponiamo che siano verificate le seguenti proprietà (**assiomi dei chiusi**):*

(C1) *l'insieme vuoto e X sono chiusi;*
(C2) *l'unione di due chiusi (e quindi di un numero finito) è un chiuso;*
(C3) *l'intersezione di un insieme di chiusi è un chiuso.*

Allora $\tau = \{\mathscr{C}(C) \ : \ C \in \mathscr{C}\}$ è l'unica topologia su X per cui $\mathscr{C}$ è l'insieme dei chiusi; cioè $\mathscr{C} = \mathscr{C}_\tau$.

DIMOSTRAZIONE. È una facile conseguenza delle (1.1). □

ESEMPI 1.3.10. Siano X un insieme non vuoto e $P(X)$ l'insieme delle sue parti.

- $\{\emptyset, X\}$ è una topologia su X, detta ***banale***. Questa topologia ha solo due aperti (il minimo numero possibile), che sono anche chiusi. Essa è la meno fine fra tutte le topologie definite su X.

- $P(X)$ è una topologia su X, detta ***discreta***. In questa topologia ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso. La topologia discreta è la più fine fra tutte le topologie definite su X e coincide con quella banale solo nel caso in cui X è un singleton, cioè un insieme con un unico elemento.
- $\{\emptyset, Y, X\}$, con $\emptyset \neq Y \subset X$, è una topologia su X, detta ***topologia con tre aperti***. I chiusi di questa topologia sono: $\emptyset, \mathscr{C}(Y), X$.
- X e i suoi sottoinsiemi finiti sono i chiusi di una topologia su X, detta ***topologia cofinita***. Gli aperti non vuoti di questa topologia sono i *sottoinsiemi cofiniti,* cioè i complementari degli insiemi finiti. Quando X è finito, la topologia cofinita coincide con quella discreta. □

ESEMPIO 1.3.11. **(Topologia somma)** Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici con sostegni disgiunti e poniamo

$$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{A_1 \cup A_2 \subseteq X_1 \cup X_2 \text{ con } A_1 \in \tau_1\,,\ A_2 \in \tau_2\}\,. \tag{1.12}$$

La famiglia τ, come subito si prova, è una topologia sull'unione $X_1 \cup X_2$ che prende il nome di ***topologia somma*** di τ_1 e τ_2. Lo spazio topologico $(X_1 \cup X_2, \tau)$ si chiama ***spazio somma*** di (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) e sarà denotato con $X_1 \sqcup X_2$. È facile rendersi conto che valgono le seguenti propiertà:

- ogni aperto in X_1 e X_2 è aperto anche in $X_1 \sqcup X_2$, in particolare X_1 e X_2 sono aperti in $X_1 \sqcup X_2$;
- la topologia indotta da τ su X_i è τ_i, $i = 1, 2$; □

ESEMPIO 1.3.12. **(Topologia indotta su X da $f : X \to Y$)** Siano X un insieme, (Y, σ) uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una funzione. La famiglia

$$f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A)\ :\ A \in \sigma\}$$

è una topologia su X che prende il nome di ***topologia indotta da f su X***. □

ESEMPIO 1.3.13. **(Topologia indotta su Y da $f : X \to Y$)** Siano (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ una funzione. La famiglia

$$\tau_f = \{T \subseteq Y \text{ tale che } f^{-1}(T) \in \tau\}$$

è una topologia su Y che prende il nome di ***topologia indotta da f su Y***. □

ESEMPIO 1.3.14. **(Topologia naturale di $\mathbb{R}$)** Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice ***aperto naturale*** se è vuoto o se è unione di intervalli aperti. L'insieme degli aperti naturali di $\mathbb{R}$ è una topologia su $\mathbb{R}$, detta ***topologia naturale*** (*cfr.* **Proposizione 1.2.16**). □

ESEMPIO 1.3.15. (Topologia naturale di $\mathbb{R}^n$) Sia n un intero positivo. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice ***aperto naturale*** se è vuoto o se è unione di sfere aperte. L'insieme degli aperti naturali di $\mathbb{R}^n$ è una topologia su $\mathbb{R}^n$, detta ***topologia naturale***. Ovviamente, nel caso $n = 1$, si ritrova la topologia naturale di $\mathbb{R}$ (*cfr.* **Proposizione 1.2.16**) $\square$

ESEMPIO 1.3.16. (Topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$) Sia $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo $n \times m$ ad elementi in $\mathbb{R}$. Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{a} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{2,m} \cdots a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,m}),$$

la funzione $f : A \in \mathbb{R}^{n,m} \to \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{nm}$ è biunivoca e la topologia indotta su $\mathbb{R}^{n,m}$ dalla funzione f si dice ***topologia naturale di*** $\mathbb{R}^{n,m}$**.** Chiaramente la topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$ è proprio quella indotta dalla metrica euclidea d **(***cfr.* **Esempio 1.2.5)**. $\square$

ESEMPIO 1.3.17. (Topologia associata ad una metrica) L'insieme $\tau_d(X)$ di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) è una topologia su X, detta ***topologia associata alla metrica*** d. Per esempio, la topologia associata alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$ è la topologia naturale di $\mathbb{R}^n$ (*cfr.* **Proposizione 1.2.16**). $\square$

ESEMPIO 1.3.18. (Topologia del tiro a bersaglio) Sia a un punto di uno spazio metrico X. Allora l'insieme vuoto, X e gli intorni sferici aperti di centro a sono gli aperti di una topologia su X, che si dice ***topologia del tiro a bersaglio***. $\square$

ESEMPIO 1.3.19. (Topologia delle semirette sinistre aperte) Per ogni numero reale a, chiamiamo ***semiretta sinistra aperta di vertice*** a, e la denotiamo con S_a, l'intervallo $(-\infty, a)$. È chiaro che, se $a < b$, risulta $S_a \cap S_b = S_a$. D'altra parte, se $\{S_a\}_{a \in A}$ è una famiglia di semirette sinistre aperte, risulta

$$\bigcup_{a \in A} S_a = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{se } A \text{ non è limitato superiormente} \\ \\ S_e, & \text{se } A \text{ è limitato superiormente e } e = \sup\{A\} \end{cases}.$$

Allora, l'insieme vuoto, $\mathbb{R}$ e le semirette sinistre aperte sono gli aperti di una topologia su $\mathbb{R}$, che si chiama ***topologia delle semirette sinistre aperte*** o ***topologia della semicontinuità superiore*** di $\mathbb{R}$. In questa topologia i chiusi non banali sono le semirette destre chiuse. Osserviamo che ogni semiretta S_a è unione di intervalli aperti perché risulta

$$S_a = \bigcup_{b<a} (b, a) .$$

Ne segue che la *topologia delle semirette sinistre aperte è meno fine di quella naturale di* $\mathbb{R}$. □

Nel seguito, tranne esplicito avviso, supporremo sempre che $\mathbb{R}^n$, $n > 0$, sia dotato della topologia naturale e, se non vi è luogo ad equivoci, i suoi aperti naturali saranno chiamati semplicemente aperti. Analogamente, supporremo sempre che uno spazio metrico (X, d) sia dotato della topologia associata a d.

DEFINIZIONE 1.3.20. Uno spazio tolopologico (X, τ) si dice ***metrizzabile*** se esiste una metrica d su X la cui topologia associata τ_d coincide con τ. □

ESEMPI 1.3.21. Le topologie associate alle metriche, ovviamente, sono metrizzabili "*per costruzione*". La topologia con tre aperti su un insieme X, con $|X| > 2$, e la topologia di $\mathbb{R}$ delle semirette sinistre aperte non sono metrizzabili perché i loro punti non sono tutti chiusi (*cfr.* **Esercizio 1.2.15**). □

DEFINIZIONE 1.3.22. (Basi) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una sua famiglia di aperti. Si dice che $\mathcal{B}$ è una ***base*** (per la topologia τ) se ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$. □

ESEMPIO 1.3.23. (Sfere aperte e basi) Una base della topologia associata ad uno spazio metrico è, per costruzione, l'insieme di tutte le sfere aperte. In particolare, gli intorni circolari aperti di $\mathbb{R}^2$ e gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ sono basi rispettivamente per $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$. □

ESERCIZIO 1.3.24. Provare che l'insieme delle sfere aperte di uno spazio metrico costituiscono una base per la topologia associata. □

ESERCIZIO 1.3.25. Siano X uno spazio topologico, Y un suo sottospazio e $\mathcal{B}$ una base di X. Provare che la famiglia degli aperti di Y ottenuti intersecando gli elementi di $\mathcal{B}$ con Y è una base di Y. □

Tenendo presente che l'intersezione di due elementi di una base è un aperto, si ha subito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3.26. *Sia X uno spazio topologico. Se $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ è una base di X, allora sono verificate le seguenti proprietà:*

- *$\mathcal{B}$ è un ricoprimento di aperti di X;*

- *per ogni* $x \in B_s \cap B_t$, *esiste* $k \in J$ *tale che* $x \in B_k \subseteq B_s \cap B_t$, *per ogni* $s, t \in J$ *(cioè* $B_s \cap B_t$ *è unione di elementi di* $\mathcal{B}$*).*

Se un insieme di aperti $\mathcal{B}$ di una topologia τ su X verifica le due precedenti proprietà, non è detto che $\mathcal{B}$ sia una base per τ. Per esempio, gli intorni sferici di centro un fissato punto di $\mathbb{R}^n$ verificano le nostre proprietà e, evidentemente, non costituiscono una base della topologia naturale. Anche le proprietà in questione, però, possono essere usate come assiomi per una topologia nel senso precisato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3.27. *Siano* X *un insieme non vuoto e* $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* X *per cui siano verificate le seguenti proprietà (**assiomi delle basi**):*

(B1) $\mathcal{B}$ *è un ricoprimento di* X.

(B2) *Per ogni* $x \in B_s \cap B_t$, *esiste* $k \in J$ *tale che* $x \in B_k \subseteq B_s \cap B_t$, *per ogni* $s, t \in J$.

Allora l'insieme vuoto e le unioni di elementi di $\mathcal{B}$ *sono gli aperti di un'unica topologia* $\tau_{\mathcal{B}}$ *su* X *per cui* $\mathcal{B}$ *è una base (**topologia associata a** $\mathcal{B}$).*

DIMOSTRAZIONE. È lasciata al Lettore. □

È chiaro che, se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia τ su X, la topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ associata a $\mathcal{B}$ coincide con τ.

ESEMPIO 1.3.28. (La retta di Sorgenfrey) L'insieme $\mathcal{B}_{ca}$ degli intervalli c.a. di $\mathbb{R}$, cioè del tipo $[a, b)$, verifica gli assiomi delle basi e quindi esiste un'unica topologia su $\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{B}_{ca}$ è una base (*cfr.* **Proposizione 1.3.27**). Questa topologia si chiama topologia di ***Sorgenfrey*** o ***degli intervalli c.a.*** e i suoi aperti non vuoti sono le unioni di intervalli c.a.. L'insieme dei numeri reali con questa topologia si chiama ***retta di Sorgenfrey***. Osserviamo che ogni intervallo aperto (a, b) è unione di intervalli c.a. perché risulta

$$(a, b) = \bigcup_{a<c<b} [c, b)\,.$$

Ne segue che *la topologia naturale di* $\mathbb{R}$ *è meno fine di quella di Sorgenfrey.* □

DEFINIZIONE 1.3.29. (Secondo assioma di numerabilità) Si dice che uno spazio topologico X verifica il ***secondo assioma di numerabilità***, o che è uno spazio $\mathscr{N}_2$, se possiede una base finita o numerabile. □

ESEMPIO 1.3.30. ($\mathbb{R}^n$ è $\mathscr{N}_2$) In $\mathbb{R}^n$ la famiglia

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{a}) \,:\, n \geq 1 \text{ intero e } \boldsymbol{a} \text{ punto a coordinate razionali}\}$$

è una base numerabile e, quindi, $\mathbb{R}^n$ è $\mathscr{N}_2$. □

ESEMPIO 1.3.31. (La retta di Sorgenfrey non è $\mathscr{N}_2$) Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Sorgenfrey. Allora, fissato un numero reale positivo a, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq [x, x+a)$. Se $y \in \mathbb{R}$ e $y > x$, risulta $x \notin [y, y+a)$ e quindi $x \notin B_y$. Ne segue che la funzione

$$x \in \mathbb{R} \to B_x \in \mathcal{B}$$

è iniettiva e, di conseguenza, la cardinalità di $\mathcal{B}$ non può essere minore di $|\mathbb{R}|$, la potenza del continuo. Abbiamo così che $\mathcal{B}$ non è numerabile. $\square$

DEFINIZIONE 1.3.32. (Intorni e sistemi fondamentali di intorni) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e a un suo punto.

- Un sottoinsieme U di X si dice ***intorno di*** a se contiene un aperto contenente a.
- Una famiglia $\mathcal{U}_a = \{U_j\}_{j \in J}$ di intorni di a si dice ***sistema fondamentale di intorni di*** a se ogni aperto A contenente a contiene un intorno $U_s \in \mathcal{U}_a$.
- Un ***sistema fondamentale di intorni di*** X è una famiglia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$, ove $\mathcal{U}_a$ è un sistema fondamentale di intorni di a, per ogni $a \in X$. $\square$

PROPOSIZIONE 1.3.33. (Intorni e aperti) *Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme A di X è aperto se, e solo se, ogni punto di A possiede almeno un intorno contenuto in A.*

DIMOSTRAZIONE. Se A è aperto, risulta intorno di ogni suo punto. Se ogni punto a di un insieme $A \subseteq X$ possiede un intorno U_a contenuto in A, esiste un aperto A_a tale che $a \in A_a \subseteq U_a \subseteq A$. Allora risulta $A = \cup_{a \in A} A_a$ e A, in quanto unione di aperti, è un aperto. $\square$

ESERCIZIO 1.3.34. Siano (X, τ) uno spazio topologico e Y un sottospazio con la topologia indotta τ_Y. Provare che:

- se $a \in Y$ e U è un intorno di a in X, allora $U \cap Y$ è un intorno di a in τ_Y;
- se $a \in Y$ e $\mathcal{U}_a$ è un sistema fondamentale di intorni di a in X, allora $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}_a\}$ è un sistema fondamentale di intorni di a in τ_Y.

PROPOSIZIONE 1.3.35. (Sistemi fondamentali di intorni e basi) *Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico, si ha:*

- *se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X, allora $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \bigcup_{a \in X} \mathcal{U}_a$ è una base di X;*
- *se $\mathcal{B}$ è una base di X, posto $\mathcal{U}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in \mathcal{B}\}$ per ogni $a \in X$, la famiglia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a\in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X, allora $\mathcal{B}_\mathcal{U} = \bigcup_{a\in X} \mathcal{U}_a$ è un ricoprimento di aperti di X. Inoltre, se A è un aperto, ogni punto $a \in A$ appartiene ad un intorno $U \in \mathcal{U}_a$ contenuto in A e, così, $\mathcal{B}_\mathcal{U}$ è una base di X.
D'altra parte, se $\mathcal{B}$ è una base di X e, per $a \in X$, si pone $\mathcal{U}_a = \{B \in \mathcal{B} \,:\, a \in \mathcal{B}\}$, ogni aperto A contenente a contiene un elemento di $\mathcal{U}_a$ contenuto in A. Ne segue che $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a\in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X. □

DEFINIZIONE 1.3.36. (Primo assioma di numerabilità) Si dice che uno spazio topologico X verifica il ***primo assioma di numerabilità***, o che è uno spazio $\mathscr{N}_1$, se possiede un sistema fondamentale di intorni finito o numerabile. □

ESEMPIO 1.3.37. (Gli spazi metrici sono $\mathscr{N}_1$) Per ogni punto a di uno spazio metrico X, la famiglia
$$\mathcal{U}_a = \{B_{\frac{1}{n}}(a) \,:\, n \geq 1 \text{ intero}\}$$
è un sistema fondamentale di intorni di a finito o numerabile e, quindi, X è $\mathscr{N}_1$. □

PROPOSIZIONE 1.3.38. ($\mathscr{N}_2 \Rightarrow \mathscr{N}_1$) *Se uno spazio topologico X è $\mathscr{N}_2$, allora è anche $\mathscr{N}_1$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla seconda parte **Proposizione 1.3.35**. □

ESEMPIO 1.3.39. (La retta di Sorgenfrey è $\mathscr{N}_1$) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la famiglia
$$\{[a, a + \frac{1}{n})\,,\, n \text{ intero positivo}\}$$
è un sistema fondamentale di intorni numerabile di a nella topologia di Sorgenfrey. La retta di Sorgenfrey è dunque $\mathscr{N}_1$. Questo è un esempio di spazio $\mathscr{N}_1$ che non è $\mathscr{N}_2$ (*cfr.* **Esempio 1.3.31**); così abbiamo che la proposizione precedente non può invertirsi. □

DEFINIZIONE 1.3.40. (Chiusura e interno di un insieme) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X. L'intersezione di tutti i chiusi di X contenenti Y si chiama ***chiusura di*** Y e si denota con $\overline{Y}$. L'unione di tutti gli aperti di X contenuti in Y si chiama ***interno***, o ***parte interna***, di Y e si denota con $\overset{\circ}{Y}$. Un punto appartenente $\overset{\circ}{Y}$ si dice ***interno a*** Y. Un punto interno al complemento di Y si dice ***esterno a*** Y. □

Se $Y \subseteq X$, l'insieme dei chiusi contenenti Y è non vuoto perché X stesso è un chiuso contenente Y. Così, la chiusura $\overline{Y}$ di Y, essendo intersezione di chiusi, è un chiuso contenente Y e, se Y è non vuoto, anche $\overline{Y}$ è non vuoto. L'interno $\mathring{Y}$ di Y, essendo unione di aperti, è un aperto contenuto in Y e può essere vuoto pur essendo Y non vuoto. Le funzioni

$$Y \in P(X) \to \overline{Y} \in P(X) \quad \text{e} \quad Y \in P(X) \to \overline{Y} \in P(X)$$

prendono rispettivamente il nome di ***operatore di chiusura*** e ***operatore di passaggio all'interno*** dello spazio topologico X.

ESERCIZIO 1.3.41. **(Proprietà della chiusura e dell'interno)** Provare che valgono le seguenti proprietà per la chiusura e l'interno di un insieme $Y \subseteq X$:

- $Y \subseteq \overline{Y}$
- $Y = \overline{Y} \Leftrightarrow Y$ è chiuso
- $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$
- $\overline{\emptyset} = \emptyset$
- $\mathring{Y} \subseteq Y$
- $Y = \mathring{Y} \Leftrightarrow Y$ è aperto
- $\mathring{\mathring{Y}} = \mathring{Y}$
- $\mathring{X} = X$ □

PROPOSIZIONE 1.3.42. *Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X, risulta*

$$\overline{Y} \cup \overline{T} = \overline{Y \cup T} \quad e \quad \mathring{Y} \cap \mathring{T} = \overbrace{Y \cap T}^{\circ}\,. \tag{1.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'essere $Y \subseteq \overline{Y}$, $T \subseteq \overline{T}$ segue $Y \cup T \subseteq \overline{Y} \cup \overline{T}$ e, quindi, $\overline{Y \cup T} \subseteq \overline{\overline{Y} \cup \overline{T}} = \overline{Y} \cup \overline{T}$. D'altra parte, dall'essere $Y, T \subseteq Y \cup T$ segue $\overline{Y}$, $\overline{T} \subseteq \overline{Y \cup T}$ e, quindi, $\overline{Y} \cup \overline{T} \subseteq \overline{Y \cup T}$. Abbiamo così la prima delle (1.13); la seconda si prova in modo analogo. □

ESERCIZIO 1.3.43. Siano X un insieme non vuoto e

$$Y \in P(X) \to \overline{Y} \in P(X) \tag{1.14}$$

una funzione tale che

$$Y \subseteq \overline{Y}\,, \;\; \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}\,, \;\; \overline{\emptyset} = \emptyset\,, \;\; \overline{Y} \cup \overline{T} = \overline{Y \cup T}\,,$$

per ogni $Y, T \subseteq X$. Provare che la famiglia $\mathscr{C} = \{C \subseteq X \;:\; C = \overline{C}\}$ è la famiglia dei chiusi dell'unica topologia su X per cui la funzione (1.14) è l'operatore di chiusura. □

ESERCIZIO 1.3.44. Siano X un insieme non vuoto e

$$Y \in P(X) \to \mathring{Y} \in P(X) \tag{1.15}$$

una funzione tale che

$$\overset{\circ}{Y} \subseteq Y\,,\quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{Y}} = \overset{\circ}{Y}\,,\quad \overset{\circ}{X} = X\,,\quad \overset{\circ}{Y} \cap \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{\overbrace{Y \cap T}}\,,$$

per ogni $Y, T \subseteq X$. Provare che la famiglia $\tau = \{A \subseteq X \;:\; A = \overset{\circ}{A}\}$ è la famiglia degli aperti dell'unica topologia su X per cui la funzione (1.15) è l'operatore di passaggio all'interno. □

ESERCIZIO 1.3.45. Provare che in uno spazio metrico X risulta:

$$\overline{B_r(a)} = D_r(a)\,,\ \overset{\circ}{D_r}(a) = B_r(a)\,,\ \overset{\circ}{S_r}(a) = \emptyset\,,$$

per ogni $a \in X$ e ogni numero reale positivo r. □

DEFINIZIONE 1.3.46. (Aderenza) Siano X uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X. Un punto $a \in X$ di dice ***di aderenza per*** Y, o ***aderente ad*** Y, se ogni intorno di a è ad intersezione non vuota con Y. □

PROPOSIZIONE 1.3.47. (Aderenza e chiusura) *L'insieme dei punti di aderenza di un insieme di punti Y di uno spazio topologico coincide con la chiusura $\overline{Y}$ di Y.*

DIMOSTRAZIONE. Proveremo, per contrapposizione, che *un punto y non è di aderenza per Y se, e solo se, y non appartiene alla chiusura di Y.*
Se y non è aderente a Y, esiste un aperto A contenente y e disgiunto da Y. Allora il complemento di A è un chiuso contenente Y cui y non appartiene e ciò significa che y non appartiene alla chiusura di Y. Viceversa, se $y \notin \overline{Y}$, il complemento di $\overline{Y}$ è un aperto contenente y disgiunto da Y e, così, y non è aderente a Y. □

DEFINIZIONE 1.3.48. (Punti di accumulazione, isolati e di frontiera, insiemi densi) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X. Un punto a aderente a Y si dice

- ***di accumulazione per*** Y se ogni intorno di a contiene qualche punto di Y diverso da a;
- ***isolato per*** Y se esiste un intorno di a che interseca Y nel solo punto a;
- ***di frontiera per*** Y se è aderente anche a $\mathscr{C}(Y)$.

L'insieme dei punti di accumulazione di Y prende il nome di ***derivato di*** Y e si denota con $D(Y)$. L'insieme dei punti isolati di Y prende il nome di ***isolato di*** Y e si denota con $I(Y)$. L'insieme dei punti di frontiera di Y prende il nome di ***frontiera di*** Y e si denota con ∂Y. Se ogni punto di X è aderente a Y, cioè $\overline{Y} = X$, si dice che Y è ***denso in*** X. □

ESERCIZIO 1.3.49. Provare che, per $Y \subseteq X$, valgono le seguenti relazioni:

$$\overline{Y} = Y \cup D(Y) = Y \cup \partial Y\,, \quad I(Y) = \overline{Y} \setminus D(Y)\,. \tag{1.16}$$

□

DEFINIZIONE 1.3.50. (Spazi separabili) Uno spazio topologico X si dice ***separabile*** se contiene un sottoinsieme D finito o numerabile che sia denso in X, cioè $\overline{D} = X$. □

PROPOSIZIONE 1.3.51. ($\mathscr{N}_2 \Rightarrow$ separabilità) *Se uno spazio topologico X è $\mathscr{N}_2$, allora è anche separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una base di X, con J insieme finito o numerabile. Allora, usando l'assioma della scelta, possiamo considerare un punto $x_j \in B_j$, per ogni $j \in J$, e costruire l'insieme $D = \{x_j \,:\, j \in J\}$. Ora, se y è un punto di X, ogni intorno di y contiene un elemento di $\mathcal{B}$ contenente y e, quindi, un punto di D. Così ogni punto di X è aderente a D, che per costruzione è finito o numerabile. □

ESEMPIO 1.3.52. (La retta di Sorgenfrey è separabile) Ogni intervallo di $\mathbb{R}$ del tipo $[a, b)$ contiene numeri razionali. Ciò significa che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, che è numerabile, è denso in $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey. In altre parole, la retta di Sorgenfrey è separabile. Questo è un *esempio di spazio separabile che non è $\mathscr{N}_2$* (*cfr.* **Esempio 1.3.31**); così abbiamo che la proposizione precedente non può invertirsi. □

La **Proposizione 1.3.51** si inverte nel caso degli spazi metrici.

PROPOSIZIONE 1.3.53. (Negli spazi metrici la separabilità implica $\mathscr{N}_2$) *Uno spazio metrico (X, d) che sia separabile è anche $\mathscr{N}_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Se D è un insieme numerabile di punti di X tale che $\overline{D} = X$, vogliamo provare che la famiglia

$$\mathcal{B} = \{B_q(y) \,:\, y \in D\,,\, q \in \mathbb{Q}^+\}\,,$$

che è numerabile, risulta una base di X. A tale scopo, osservato che $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X, basta far vedere che ogni intorno sferico $B_r(x), x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.
Per ogni punto $z \in B_r(x)$, sia $\rho \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$B_\rho(z) \subseteq B_r(x)$$

e, considerato un punto $y \in B_{\frac{\rho}{2}}(z) \cap D$, sia $q \in \mathbb{Q}^+$ tale che

$$d(y, z) < q < \frac{\rho}{2},$$

da cui

$$z \in B_q(y) \in \mathcal{B}\,.$$

Proviamo che $B_q(y) \subseteq B_\rho(z)$:

$$t \in B_q(y) \;\Rightarrow\; d(t, z) \leq d(t, y) + d(y, z) < q + q < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho\,,$$

quindi z appartiene a $B_q(y)$ e l'asserto è provato. □

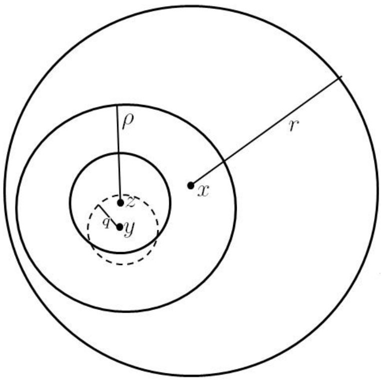


Figura 1.4: Proposizione 1.3.53

1.4 Complementi

1.4.1 La topologia di Zariski

Siano $\mathbb{F}$ un campo infinito, $X_1, X_2, \dots, X_n$ indeterminate e, posto

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

sia $\mathbb{F}[\boldsymbol{X}] = \mathbb{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi su $\mathbb{F}$ in $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ricordiamo che un elemento $\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}^n$ è uno ***zero*** di un polinomio $f(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{F}[\boldsymbol{X}]$, o dell'equazione algebrica $f(\boldsymbol{X}) = 0$, se risulta $f(\boldsymbol{a}) = 0$. Un insieme di punti di F^n prende il nome di ***insieme algebrico***, o ***varietà algebrica***, se è il luogo degli zeri di un sistema di equazioni algebriche. Se

$$S = \{f_i(\boldsymbol{X})\}_{i \in \mathcal{I}}$$

è un insieme di polinomi di $\mathbb{F}[\boldsymbol{X}]$, denotiamo con $V(S)$ l'insieme algebrico luogo degli zeri del sistema

$$\{f_i(\boldsymbol{X}) = 0\}_{i\in\mathcal{I}} \tag{1.17}$$

e diciamo che $V(S)$ è rappresentato dalle (1.17), o che le (1.17) sono le equazioni di $V(S)$. Vale il risultato fondamentale seguente.

PROPOSIZIONE 1.4.1. (Teorema della base di Hilbert) *Ogni sistema di equazioni algebriche a coefficienti in un campo $\mathbb{F}$ è equivalente ad un sistema finito. Equivalentemente, ogni insieme algebrico può essere rappresentato da un numero finito di equazioni.* □

Un sistema incompatibile, per esempio $\{X_1 = 0\,, X_1 = 1\}$, e un'identità, per esempio $\{0 = 0\}$, rappresentano rispettivamente l'insieme vuoto e l'intero spazio $\mathbb{F}^n$. Abbiamo così che:

(C1) *l'insieme vuoto e $\mathbb{F}^n$ sono insiemi algebrici.*

Siano $X = V(S)$ e $Y = V(T)$ due insiemi algebrici rappresentati rispettivamente da S e T. Posto

$$W = \{f(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X}) \;:\; f \in S \;e\; g \in T\}$$

consideriamo l'insieme algebrico $Z = V(W)$. Un punto $\boldsymbol{a} \in X \cup Y$ è tale che $f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) = 0$, per ogni $f \in S \;e\; g \in T$, e quindi

$$X \cup Y \subseteq Z\,.$$

D'altra parte, se un punto $\boldsymbol{a} \in Z$ non appartiene a X (risp. a Y), esiste $\overline{f} \in S$ (risp. $\overline{g} \in T$) tale che $\overline{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ (risp. $\overline{g}(\boldsymbol{a}) \neq 0$) e, dovendo essere $\overline{f}(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) = 0$ per ogni $g \in T$ (risp. $f(\boldsymbol{a})\overline{g}(\boldsymbol{a}) = 0$ per ogni $f \in S$), risulta $\boldsymbol{a} \in Y$ (risp. $\boldsymbol{a} \in S$), e quindi

$$Z \subseteq X \cup Y\,.$$

Risulta dunque $Z = X \cup Y$ e abbiamo che:

(C2) *l'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico,*

Siano ora $\{V_i = V(S_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di insiemi algebrici ove ogni V_i è rappresentato da S_i, per ogni $i \in \mathcal{I}$. Allora si ha subito che il sistema associato a $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i$ rappresenta l'intersezione degli insiemi algebrici V_i, al variare di $i \in \mathcal{I}$. Ne segue che:

(C3) *l'intersezione di una famiglia di insiemi algebrici è un insieme algebrico.*

Gli insiemi algebrici di $\mathbb{F}^n$ verificano dunque gli assiomi dei chiusi e, quindi, essi sono i chiusi di un'unica topologia su $\mathbb{F}^n$, che prende il nome di ***topologia di Zariski*** di $\mathbb{F}^n$. In questa topologia gli aperti sono i complementari delle varietà algebriche.

PROPOSIZIONE 1.4.2. *Se l'unione di due insiemi algebrici* $V(S)$ *e* $V(T)$ *è* $\mathbb{F}^n$, *allora uno dei due insiemi coincide con* $\mathbb{F}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi $V(S) \neq \mathbb{F}^n$, esiste un polinomio $f(X) \in S$ non identicamente nullo. Allora, ogni $g(X) \in T$ è identicamente nullo perché è identicamente nullo il prodotto $f(X)g(X)$. Ne segue che $V(T) = \mathbb{F}^n$. Allo stesso modo si ragiona se si assume $V(T) \neq \mathbb{F}^n$ e l'asserto è completamente provato. □

Il corollario che segue è immediata conseguenza della proposizione precedente.

COROLLARIO 1.4.3. *Nella topologia di Zariski di* $\mathbb{F}^n$, *l'intersezione di due aperti non vuoti è non vuota.*

ESERCIZIO 1.4.4. Provare che la topologia di Zariski di $\mathbb{F}^n$ verifica le seguenti proprietà:

- ogni punto è chiuso;
- ogni insieme algebrico è intersezione di (un numero finito di) insiemi algebrici ciascuno dei quali è rappresentato da una sola equazione (***ipersuperfici algebriche***);
- i complementari delle ipersuperfici algebriche costituiscono una base.

OSSERVAZIONE 1.4.5. La topologia di Zariski può definirsi anche quando $\mathbb{F}$ è un campo finito. In questo caso si ottiene la topologia discreta su $\mathbb{F}^n$ (provarlo per esercizio). □

1.4.2 Assiomi di separazione

DEFINIZIONE 1.4.6. Sia X uno spazio topologico. Si dice che X è

- ***uno spazio*** T_0 se, per ogni coppia di punti distinti di X, esiste un intorno di uno dei due che non contiene l'altro (*assioma di separazione* T_0 *o di Kolmogoroff*);
- ***uno spazio*** T_1 se, per ogni coppia di punti distinti a, b di X, esiste un intorno di a non contenente b e uno di b non contenente a (*assioma di separazione* T_1 *o di Fréchet*);
- ***uno spazio*** T_2 se, per ogni coppia di punti a, b distinti di X, esistono un intorno di a e uno di b ad intersezione vuota (*assioma di separazione* T_1 *o di Hausdorff*). □

PROPOSIZIONE 1.4.7. ($T_1 \Leftrightarrow$ **punti chiusi)** *Uno spazio topologico* X *è* T_1 *se, e solo se, ogni suo punto è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che X sia T_1, consideriamo un suo punto a. Allora, ogni punto $b \neq a$ appartiene ad un intorno contenuto in $X \setminus \{a\}$ e, quindi, questo insieme è aperto. Da ciò segue che $\{a\}$ è un chiuso. Viceversa, se ogni punto di X è chiuso e $a, b \in X$ sono punti distinti, allora $X \setminus \{a\}$ è un intorno di b non contenente a e $X \setminus \{b\}$ è un intorno di a non contenente b. Abbiamo così che X è T_1. □

È immediato rendersi conto che *ogni spazio* T_2 *è anche* T_1 e che *ogni spazio* T_1 *è anche* T_0. Queste due implicazioni non possono invertirsi, come provano gli esempi che seguono.

ESEMPIO 1.4.8. **(Spazi T_0 e non T_1)** La topologia con tre aperti non è T_0. La topologia del tiro a bersaglio e la topologia di $\mathbb{R}$ delle semirette sinistre aperte sono T_0 e non sono T_1. □

ESEMPIO 1.4.9. **(Spazi T_1 e non T_2)** La topologia di Zariski è T_1 e non è T_2. □

ESEMPIO 1.4.10. **(Spazi T_2)** Gli spazi metrici e la retta di Sorgenfrey sono T_2. In particolare, lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è T_2. □

PROPOSIZIONE 1.4.11. *Sia X uno spazio topologico T_2 i cui aperti non vuoti siano infiniti. Sia y un punto di accumulazione per un sottoinsieme Y di X. Allora, per ogni aperto A contenete y, l'insieme $A \cap Y$ è infinito.*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto contenente y, esiste un punto $y_1 \in A \cap Y$ diverso da y e possiamo definire l'insieme

$$A_1 = A \setminus \{y_1\} = A \cap (X \setminus \{y_1\}),$$

che è un aperto in quanto intersezione di due aperti. Poiché $y \in A_1$, esiste un punto $y_2 \in A_1$ diverso da y, y_1 e possiamo definire l'insieme

$$A_2 = A \setminus \{y_1, y_2\} = A \cap (X \setminus \{y_1, y_2\}),$$

che è un aperto contenente y. Ora, continuando in questo modo, possiamo costruire per induzione l'insieme infinito $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ di punti di $A \cap Y$. □

1.4.3 Successioni

Se X è uno spazio topologico denotiamo con $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o semplicemente con $\{x_n\}$, una successione di suoi punti.

DEFINIZIONE 1.4.12. **(Successioni convergenti)** Una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio topologico X si dice ***convergente ad un punto*** $\ell \in X$ se, per ogni intorno U di ℓ, esiste un intero positivo m tale che, per ogni $n > m$, risulta $x_n \in U$. In questo caso ℓ prende il nome di ***limite*** della successione $\{x_n\}$ e si scrive $x_n \to \ell$. □

PROPOSIZIONE 1.4.13. *In uno spazio topologico T_2 una successione convergente ammette un unico limite.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che una successione $\{x_n\}$ di uno spazio T_2 abbia due limiti distinti ℓ, ℓ' e siano U, U' rispettivamente un intorno di ℓ e uno di ℓ' ad intersezione vuota. Allora, esistono due interi positivi m, m' tali che per $n > m$, $x_n \in U$ e per $n > m'$, $x_n \in U'$. Ora, per $n > m, m'$, risulta $x_n \in U$ e $x_n \in U'$; ciò è assurdo essendo U e U' disgiunti. □

DEFINIZIONE 1.4.14. (Successioni di Cauchy) Una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio metrico (X, d) si dice ***di Cauchy*** se, per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un intero positivo m tale che $d(x_p, x_q) < \epsilon$, per ogni $p, q > m$. □

PROPOSIZIONE 1.4.15. (Le successioni convergenti sono di Cauchy) In uno spazio metrico X ogni successione convergente è di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{x_n\}$ sia una successione di X convergente ad un punto ℓ e fissiamo un numero reale $\epsilon > 0$. Allora esiste un intero m tale che $x_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\ell)$, per ogni $n > m$. Ne segue che

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \,,$$

per ogni $p, q > m$. Abbiamo così che $\{x_n\}$ è di Cauchy. □

ESEMPIO 1.4.16. (Successioni di Cauchy non convergenti) La successione $\{\frac{1}{n}\}$ della retta euclidea converge a 0 e, quindi, è di Cauchy. La stessa successione, quindi, considerata come successione di $\mathbb{R}^+$ con la topologia indotta da quella della retta euclidea, è ancora di Cauchy ma non è convergente. □

DEFINIZIONE 1.4.17. (Spazi metrici completi) Uno spazio metrico X si dice ***completo*** se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Un sottoinsieme Y di X si dice completo se è tale rispetto alla metrica indotta in esso da quella di X. □

ESEMPIO 1.4.18. (Completezza di $\mathbb{R}$) È noto dai corsi di analisi matematica che ogni successione di Cauchy di $\mathbb{R}$ è convergente. $\mathbb{R}$ è dunque un esempio di spazio metrico completo. □

PROPOSIZIONE 1.4.19. (Sottospazi completi e insiemi chiusi) Sia X uno spazio metrico completo. Un sottospazio Y di X è completo se, e solo se, Y è un chiuso di X.

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che Y sia completo, sia $y \in \overline{Y}$ e, per ogni intero positivo n, scegliamo un punto $x_n \in Y \cap B_{\frac{1}{n}}(y)$. La successione $\{x_n\}$ converge evidentemente a y, quindi è di Cauchy e, per la completezza di Y, abbiamo $y \in Y$.

Allora risulta $Y = \overline{Y}$ e Y è chiuso.
Viceversa, assumiamo che Y sia chiuso e consideriamo una successione di Cauchy $\{x_n\}$ di suoi punti. Per la completezza di X, abbiamo che $\{x_n\}$ converge ad un punto $y \in X$; inoltre ogni intorno U di y contiene punti di $\{x_n\}$ e quindi di Y. Ne segue che y è aderente a Y e, essendo Y chiuso, risulta $y \in Y$. Abbiamo così che Y è completo. □

1.5 Funzioni continue e omeomorfismi

In questo paragrafo generalizziamo agli spazi topologici la nozione di *continuità,* già introdotta e discussa nel caso degli spazi metrici.

DEFINIZIONE 1.5.1. (Funzioni continue) Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice ***continua*** in un punto $a \in X$ se, per ogni intorno V di $f(a)$ in Y, esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq V$. La funzione $f : X \to Y$ si dice ***continua*** in X se è continua in ogni punto di X. □

Nel seguito per indicare una funzione f tra i sostegni di due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) useremo anche la notazione $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$.

OSSERVAZIONE 1.5.2. È chiaro che, se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono spazi metrizzabili rispettivamente con le metriche d_X, d_Y, la definizione precedente si riduce a quella di funzione continua tra spazi gli metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) (*cfr.* **Definizione 1.2.6**). In particolare risultano continue secondo quest'ultima definizione le funzioni continue tra gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ studiate nei corsi di analisi matematica (*cfr.* **Definizione 1.2.1**). □

ESEMPIO 1.5.3. Risultano continue:

- tutte le funzioni tra un qualunque spazio topologico e una spazio banale;
- tutte le funzioni tra uno spazio discreto e un qualunque spazio topologico;
- l'***immersione*** $i : a \in Y \to a \in X$ di un sottospazio Y di X in X;
- l'***identità*** $i : a \in X \to a \in X$ di (X, τ) in (X, σ) con σ meno fine di τ;

PROPOSIZIONE 1.5.4. (Caratterizzazioni delle funzioni continue) *Sia* $f : X \to Y$ *una funzione tra i sostegni dei due spazi topologici* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y). *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) f *è continua;*
(ii) *la controimmagine* $f^{-1}(A)$ *di ogni aperto* A *di* Y *è un aperto di* X;
(iii) *la controimmagine* $f^{-1}(C)$ *di ogni chiuso* C *di* Y *è un chiuso di* X;
(iv) *le controimmagini degli aperti di una fissata base di* Y *sono aperti di* X;

(v) *per ogni punto* $b = f(a) \in f(X)$, *la controimmagine* $f^{-1}(U')$ *di ogni intorno* U *di* $b \in Y$ *di un sistema fondamentale di intorni di* Y *è un intorno di* a *in* X.

DIMOSTRAZIONE. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Se f è continua e A un aperto di Y, sia a un arbitrario punto di $f^{-1}(A)$. Poiché A è un intorno di $f(a)$, esiste un intorno U di a tale che $f(U) \subseteq A$. Ne segue che U è contenuto in $f^{-1}(A)$ e, così, $f^{-1}(A)$ è aperto. Ora, nell'ipotesi (ii), siano $a \in X$ e U un intorno di $f(a)$. Detto A un aperto di Y contenente $f(a)$ e contenuto in U, si ha che $f^{-1}(A)$ è un intorno (perché aperto) di a la cui immagine mediante f è contenuta in U. Ne segue che f è continua.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Se vale la (ii) e C è un chiuso di Y, allora $\mathscr{C}(C)$ è un aperto in Y e $f^{-1}(\mathscr{C}(C))$ un aperto in X. Da ciò segue che $f^{-1}(C) = \mathscr{C}(f^{-1}(\mathscr{C}(C)))$ è un chiuso di X. In modo analogo si vede che da (iii) segue (ii).
La dimostrazione delle altre equivalenze è lasciata al Lettore. $\square$

ESEMPIO 1.5.5. (La topologia di Zariski di $\mathbb{R}^n$ è meno fine di quella naturale) Se $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ è un polinomio in n variabili a coefficienti reali, la *funzione polinomiale* associata

$$f : (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \to f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}$$

è continua rispetto alle topologie naturali di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$. Ne segue che l'ipersupercie algebrica di $\mathbb{R}^n$ definita da

$$f^{-1}(0) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0\}$$

è un chiuso di $\mathbb{R}^n$ con la topologia naturale (perché controimmagine di un chiuso mediante una funzione continua) e, di conseguenza, sono chiuse tutte le loro intersezioni, cioè gli insiemi algebrici (*cfr.* **Esercizio 1.4.4**). Ne segue che la topologia di Zariski di $\mathbb{R}^n$ è meno fine della topologia naturale. $\square$

ESERCIZIO 1.5.6. Sia $f : X \to Y$ una funzione iniettiva e continua tra gli spazi topologici X e Y. Provare che se Y è uno spazio T_j, $j = 0, 1, 2$, allora anche X è uno spazio T_j.

PROPOSIZIONE 1.5.7. (Funzioni continue e aderenza) *Una funzione* $f : X \to Y$ *tra i sostegni dei due spazi topologici* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *è continua se, e solo se, per ogni sottoinsieme* $T \subseteq X$, *trasforma punti aderenti a* T *in punti aderenti a* $f(T)$, *cioè* $f(\overline{T}) \subseteq \overline{f(T)}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f continua e sia a un punto aderente a T. Allora, per ogni aperto A' di Y contenente $f(a)$, $A = f^{-1}(A')$ è un aperto di X contenente a e $A \cap T$ contiene almeno un punto b. Ne segue che $A' \cap f(T) \neq \emptyset$, essendo $f(b) \in A' \cap f(T)$, e quindi $f(a)$ è aderente a $f(T)$.

Viceversa, supponiamo $f(\overline{T}) \subseteq \overline{f(T)}$, per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$. Detto C' un chiuso di Y, poniamo $C = f^{-1}(C')$ e osserviamo che da $f(C) \subseteq C'$ segue $\overline{f(C)} \subseteq C'$, perché C' è un chiuso. Allora, essendo $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq C'$, risulta $\overline{C} \subseteq f^{-1}(C') = C$, così C è chiuso e f è continua. □

PROPOSIZIONE 1.5.8. (Funzioni continue e convergenza di successioni) *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra gli spazi topologici X e Y. Se $\{x_n\}$ è una successione di punti di X convergente ad un punto ℓ, la successione $\{f(x_n)\}$ di punti di Y converge al punto $f(\ell)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U' un intorno di $f(\ell)$ in Y e consideriamo l'intorno $U = f^{-1}(U')$ di ℓ in X. Allora, esiste un intero positivo m tale che, per ogni $n > m$, $x_n \in U$ e quindi $f(x_n) \in U'$. Ne segue che $\{f(x_n)\}$ converge ad $f(\ell)$. □

PROPOSIZIONE 1.5.9. (Composizione di funzioni continue) *Siano X, Y, e T spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni continue. Allora, la funzione composta $g \circ f : X \to Z$ è continua.* □

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto A di T, $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y perché g è continua e, quindi, essendo continua anche f, $f^{-1}(g^{-1}(A))$ è un aperto di X. D'altra parte, risulta $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ e da ciò segue che $g \circ f$ è continua. □

DEFINIZIONE 1.5.10. (Omeomorfismi) Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice ***omeomorfismo*** se valgono le seguenti proprietà:

- f è biunivoca;
- le funzioni $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$ sono continue. □

ESEMPIO 1.5.11. (Le isometrie sono omeomorfismi) Sia $f : X \to Y$ un'isometria tra gli spazi metrici X e Y. Allora f deve essere biunivoca. Inoltre, in forza dell'**Esempio 1.3.23** e della **Proposizione 1.5.4**-(iv) le funzioni f e f^{-1} risultano continue. Ne segue che ogni isometria è anche un omeomorfismo. □

ESERCIZIO 1.5.12. Siano $f : X \to Y$ un omeomorfismo tra gli spazi topologici X, Y e a un punto di X. Provare che la restrizione di f a $X \setminus \{a\}$ è un omeomorfismo tra $X \setminus \{a\}$ e $Y \setminus \{f(a)\}$. □

Siano X, Y e T spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ omeomorfismi. È facile verificare che:

(H1) la funzione identità di X è un omeomorfismo di X sé;

(H2) la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ dell'omeomorfismo $f : X \to Y$ è un omeomorfismo di Y in X;

(H3) la funzione composta $g \circ f : X \to Z$ dei due omeomorfismi f e g è un omeomorfismo di X in Z.

Le tre precedenti proprietà assicurano che la relazione

$$\text{“}X \simeq Y \text{ se esiste un omeomorfismo di } X \text{ su } Y\text{”}$$

è una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi topologici. Due spazi topologici di una stessa classe di omeomorfismo si dicono ***omeomorfi***. L'insieme degli omeomorfismi di uno spazio topologico X in se stesso, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, risulta un gruppo che si chiama ***gruppo degli omeomorfismi*** di X e si denota con $H(X)$.

Le ***proprietà topologiche*** di uno spazio topologico (X, τ) sono le proprietà di X invarianti per omeomorfismi, ovvero invarianti rispetto al gruppo $H(X)$. Si ha, dunque, che ogni proprietà topologica di X è tale in un qualsiasi spazio omeomorfo a X. Quanto detto ci permette di identificare due spazi topologici che siano omeomorfi; in altre parole, lo studio degli spazi topologici si fa a meno di omeomorfismi.

ESERCIZIO 1.5.13. Provare che sono invarianti per omeomorfismi le seguenti nozioni: *base, intorno, sistema fondamentale di intorni, chiusura, interno, punto di aderenza, punto isolato, punto di accumulazione, proprietà* $\mathscr{N}_1$ *e* $\mathscr{N}_2$*, separabilità, proprietà* T_0, T_1, T_2. □

1.5.1 Proprietà topologiche di uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico. Le proprietà della toplogia τ_d associata a d si dicono ***proprietà topologiche di*** X. Poiché un'isometria tra due spazi metrici è anche un omeomorfismo, come osservato nell'**Esempio 1.5.11**, si ha che *ogni proprieà invariante per omeomorfismi è invariante anche per isometrie.* Di contro, vedremo che *esistono proprietà invarianti per isometrie ma non per omeomorfismi.*

Due spazi metrici si dicono ***topologicamente equivalenti*** se sono omeomorfi rispetto alle loro topologie associate; in questo caso le rispettive metriche si dicono ***equivalenti***. Quanto prima osservato assicura che spazi metrici isometrici sono topologicamente equivalenti ma, in generale, non è vero il viceversa. Può, infatti, accadere che metriche diverse su uno stesso insieme diano luogo ad una stessa topologia. Una condizione necessaria e sufficiente affinché due metriche sullo stesso insieme siano equivalenti è espressa dalla seguente proposizione, la cui semplice dimostrazione è lasciata al Lettore.

PROPOSIZIONE 1.5.14. *Due metriche d e d' su un insieme X individuano la stessa topologia, cioè $\tau_d = \tau_{d'}$, se e solo se:*

- *l'insieme degli intorni sferici aperti nella metrica d è una base della topologia $\tau_{d'}$;*
- *l'insieme degli intorni sferici aperti nella metrica d' è una base della topologia τ_d.*

ESEMPIO 1.5.15. Sia (X, d) uno spazio metrico non limitato. Abbiamo osservato che la metrica d' su X definita nell'**Esempio 1.2.25** è limitata e, quindi, (S, d) e (S, d') non sono isometrici. È facile, però, rendersi conto che d e d' sono equivalenti. Abbiamo così che *la proprietà di uno spazio metrico di essere limitato è metrica ma non topologica.* □

1.5.2 Complementi ed esempi

Un sottoinsieme J di $\mathbb{R}$ prende il nome di ***intervallo*** se, per ogni due suoi punti a, b con $a < b$, l'intervallo chiuso $[a, b]$ è contenuto in J. È un esercizio provare la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.5.16. *Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli insiemi dei seguenti tipi:*

$$\emptyset,\ \mathbb{R},\ [a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b),\ [a, +\infty),\ (a, +\infty),\ (-\infty, a],\ (-\infty, a),$$

$a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$

ESERCIZIO 1.5.17. Provare che gli estremi di un intervallo limitato J di $\mathbb{R}$ sono punti di accumulazione di J. □

ESEMPIO 1.5.18. (Omeomorfismi tra intervalli limitati di $\mathbb{R}$) Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. La funzione lineare $f : [0, 1] \to [a, b]$ definita da

$$f(x) = (b - a)x + a \tag{1.18}$$

è invertibile e la sua inversa f^{-1} è definita da

$$f^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $[0, 1]$ e $[a, b]$. Da notare che, essendo $f(0) = a$ e $f(1) = b$, le restrizioni di f a $[0, 1)$, $(0, 1]$ e $(0, 1)$ sono omeomorfismi tra tali intervalli e $[a, b)$, $(a, b]$ e (a, b), rispettivamente. Anche la funzione $g : [0, 1] \to [a, b]$ definita da

$$g(x) = (a - b)x + b$$

è un omeomorfismo tra $[0,1]$ e $[a,b]$ e risulta $g(0)=b$ e $g(1)=a$. Ne segue che le restrizioni di g a $[0,1)$ e $(0,1]$ sono omeomorfismi tra tali intervalli e $(a,b]$ e $[a,b)$, rispettivamente.
Sarà utile per il seguito osservare che anche la funzione lineare $g:[0,1]\to[a,b]$ definita da

$$g(x)=(b-a)(1-x)+a \tag{1.19}$$

è un omeomorfismo tra $[0,1]$ e $[a,b]$ e risulta $g(0)=b$ e $g(1)=a$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.5.19. Gli omeomorfismi (1.18) e (1.19) sono gli uninci omeomorfismi lineari tra $[0,1]$ e $[a,b]$.

ESEMPIO 1.5.20. (Omeomorfismi tra intervalli non limitati di $\mathbb{R}$) Si consideri l'intervallo $[a,+\infty)$ di $\mathbb{R}$. La funzione $f:[0,+\infty)\to[a,+\infty)$ definita da

$$f(x)=x+a$$

è invertibile e la sua inversa f^{-1} è definita da

$$f^{-1}(x)=x-a.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $[0,+\infty)$ e $[a,+\infty)$. Da notare che, essendo $f(0)=a$, la restrizione di f a $(0,+\infty)$ è un isomorfismo tra tale intervallo e $(a,+\infty)$. Anche la funzione $g:(-\infty,0]\to[a,+\infty)$ definita da

$$g(x)=a-x$$

è un omeomorfismo tra $(-\infty,0]$ e $[a,+\infty)$ e risulta $g(0)=a$. Ne segue che la restrizione di g a $(-\infty,0)$ è un isomorfismo tra tale intervallo e $(a,+\infty)$. $\square$

ESEMPIO 1.5.21. (Omeomorfismi tra intervalli limitati e non limitati di $\mathbb{R}$) La funzione

$$f\,:\,x\in(-1,1)\,\to\,\tan(\frac{\pi x}{2})\in\mathbb{R}$$

è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1}\,:\,x\in\mathbb{R}\,\to\,\frac{2}{\pi}\arctan(x)\in(-1,1)\,.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $(-1,1)$ e $\mathbb{R}$. La restrizione di f a $[0,1)$ è un omeomorfismo tra $[0,1)$ e $[0,+\infty)$. La restrizione di f a $(0,1)$ è un omeomorfismo tra $(0,1)$ e $(0,+\infty)$. $\square$

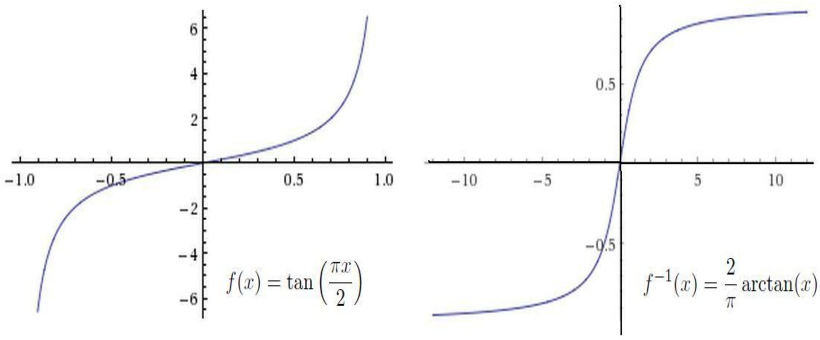


Figura 1.5: Esempio 1.5.21

ESEMPIO 1.5.22. (Omeomorfismi tra intervalli non limitati di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$) Le funzioni biunivoche $exp : x \in \mathbb{R} \to e^x \in (0, +\infty)$ e $log : x \in (0, +\infty) \to \log x \in \mathbb{R}$ sono l'una l'inversa dell'altra e continue e, quindi, $(0, +\infty)$ e $\mathbb{R}$ sono omeomorfismi. □

PROPOSIZIONE 1.5.23. *In $\mathbb{R}$, con la topologia naturale, si ha che:*
- *intervalli dello stesso tipo sono omeomorfi;*
- *intervalli del tipo $[a, b), (a, b], [a, +\infty), (-\infty, a]$ sono tra loro omeomorfi;*
- *intervalli del tipo $(a, b), (a, +\infty), (-\infty, a)$ sono tra loro omeomorfi e omeomorfi a $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. È una semplice conseguenza dei quattro esempi precedenti. □

ESEMPIO 1.5.24. (Omeomorfismi tra circonfernze e poligoni regolari) Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ siano X e Y rispettivamente i punti di una circonferenza e di un poligono regolare con lo stesso centro C.

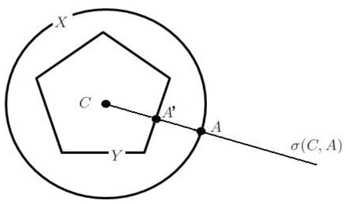


Figura 1.6: Esempio 1.5.24

Per ogni punto A diverso da C, denotiamo con $\sigma(C, A)$ la semiretta di origine C passante per A. La funzione

$$f : A \in X \to A' = Y \cap \sigma(C, A) \in Y$$

è invertibile e la sua inversa è definita da

$$f^{-1} \,:\, A \in Y \;\rightarrow\; X \cap \sigma(C, A) \in X.$$

Le funzioni f e f^{-1} trasformano tra loro le basi di X e Y costituite dalle intersezioni dei cerchi aperti di $\mathbb{R}^2$ con X e Y stessi e, di conseguenza, sono continue. Così f è un omeomorfismo tra X e Y. Allo stesso modo si vede che sono tra loro omeomorfi due poligoni regolari e due circonferenze. □

ESEMPIO 1.5.25. (Omeomorfismi tra superfici sferiche e poliedri convessi) Generalizzando l'**Esempio 1.5.24,** si prova che nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ le superfici sferiche e i poliedri convessi appartengono ad una stessa classe di omeomorfismo. Analogamente, si può provare che due superfici sferiche di $\mathbb{R}^n$ sono tra loro omeomorfe. □

ESEMPIO 1.5.26. (Proiezione stereografica) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano S e Y rispettivamente i punti di una superficie sferica di centro un punto C e di un piano tangente a X in un punto T.

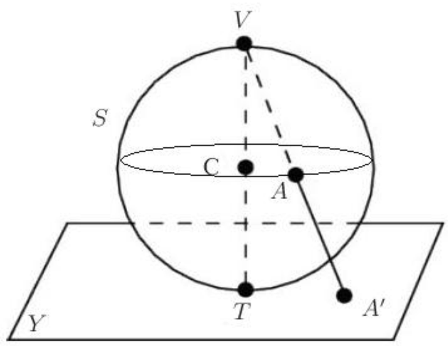


Figura 1.7: Esempio 1.5.26

Siano $\mathcal{B}_X$ la base di X e $\mathcal{B}_Y$ la base di Y ottenute intersecando gli intorni sferici aperti di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente con X e Y. Detto V il punto di S diametralmente opposto a T, poniamo $X = S \setminus \{V\}$ e, per ogni punto $A \in X$, denotiamo con A' il punto di intersezione della retta passante per V e A con il piano Y. La funzione biunivoca

$$f \,:\, A \in X \;\rightarrow\; A' \in Y$$

prende il nome di ***proiezione stereografica della sfera***. La proiezione stereografica f e la sua inversa f^{-1} trasformano rispettivamente un elemento di $\mathcal{B}_X$ in un aperto di Y e un elemento di $\mathcal{B}_Y$ in un aperto di X e, di conseguenza, sono continue. Così f è un omeomorfismo tra X e Y. Resta dunque provato che una superficie sferica meno un punto in $\mathbb{R}^3$ e il piano euclideo $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfi. Se consideriamo la restrizione di f a $S \setminus \{V, T\} = X \setminus \{T\}$ otteniamo un omeomorfismo tra $X \setminus \{T\}$ e $Y \setminus \{T\}$. Abbiamo, così, che una superficie sferica di $\mathbb{R}^3$ meno due punti è omeomorfa al piano euclideo $\mathbb{R}^2$ meno un punto. Questi esempi sono una riprova del fatto che la limitatezza di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è una proprietà metrica ma non topologica. Per ogni $n > 1$, la proiezione stereografica si può definire, come nel caso $n = 3$, per una superficie sferica di $\mathbb{R}^n$ e, in questo modo, si ottiene un omeomorfismo tra la superficie sferica di $\mathbb{R}^n$ meno un punto (risp. meno due punti) e lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{n-1}$ (risp. meno un punto). In particolare si ha che una circonferenza meno un punto è omeomorfa alla retta reale. $\square$

ESEMPIO 1.5.27. (Omeomorfismi tra superfici sferiche meno due punti e cilindri) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano X e Y rispettivamente i punti di una superficie sferica S, di centro un punto C, meno due punti V, T e di un cilindro circolare retto (non limitato) Y disposti come in **Figura 1.8**. Siano $\mathcal{B}_X$ la base di X e $\mathcal{B}_Y$ la base di Y ottenute intersecando gli intorni sferici aperti di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente con X e Y. Per ogni punto $A \in X$, denotiamo con A' il punto di intersezione della semiretta di origine C passante per A col cilindro Y. La funzione biunivoca

$$f \,:\, A \in X \;\to\; A' \in Y$$

e la sua inversa f^{-1} trasformano rispettivamente un elemento di $\mathcal{B}_X$ in un aperto di Y e un elemento di $\mathcal{B}_Y$ in un aperto di X e, di conseguenza, sono continue.

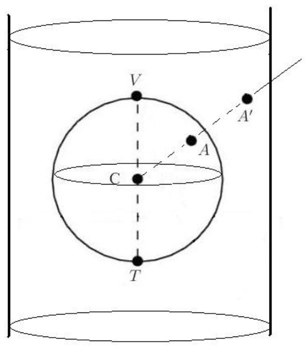


Figura 1.8: Esempio 1.5.27

Così f è un omeomorfismo tra X e Y. Resta dunque provato che una superficie sferica meno due punti in $\mathbb{R}^3$ e un cilindro circolare sono omeomorfi. $\square$

ESEMPIO 1.5.28. (Omeomorfismi tra $\mathbb{R}^2$ meno un punto e $\mathbb{R}^2$ meno un cerchio chiuso) Siano X e Y rispettivamente i punti del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ meno un punto $O = (0, 0)$ e quelli di $\mathbb{R}^2$ meno il cerchio chiuso di centro O e raggio 1. Identifichiamo ogni punto A di $\mathbb{R}^2$ col segmento orientato $\boldsymbol{a} = (O, A)$ e consideriamo la funzione biunivoca

$$f \,:\, \boldsymbol{a} \in X \,\to\, \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{a}}{\parallel \boldsymbol{a} \parallel} \in Y \,.$$

La funzione f e la sua inversa f^{-1} sono continue, così f è un omeomorfismo tra X e Y. Resta dunque provato che il piano euclideo meno un punto (***piano bucato***) e quello meno un cerchio chiuso sono omeomorfi. Allo stesso modo si vede che, per $n > 2$, $\mathbb{R}^n$ meno un punto e $\mathbb{R}^n$ meno un intorno sferico chiuso sono omeomorfi. □

DEFINIZIONE 1.5.29. (Funzioni aperte e funzioni chiuse) Una funzione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici si dice ***aperta*** se trasforma aperti di X in aperti di Y e si dice ***chiusa*** se trasforma chiusi di X in chiusi di Y.

Osserviamo esplicitamente che le nozioni di funzione continua, funzione aperta e funzione chiusa sono indipendenti l'una dall'altra.

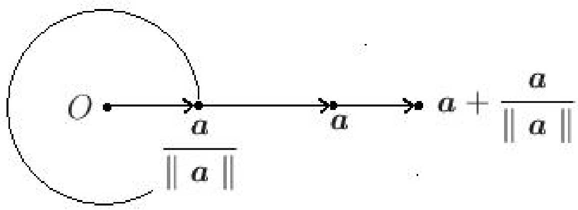


Figura 1.9: Esempio 1.5.28

ESEMPIO 1.5.30. (Omeomorfismi) Un omeomorfismo $f : X \to Y$ fra due spazi topologici è una funzione aperta e chiusa. È un esercizio provare che :

- $f : X \to Y$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow$ f è biunivoca, continua e aperta;
- $f : X \to Y$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow$ f è biunivoca, continua e aperta. □

ESEMPIO 1.5.31. (Funzioni continue non aperte) La funzione continua $f : x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ con la topologia naturale, non è aperta. Infatti, per esempio, $f(-1, 1) = [0, 1)$. □

ESEMPIO 1.5.32. (Funzioni chiuse, non aperte e non continue) La funzione $f : x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ con la topologia delle semirette sinistre aperte, è chiusa, non aperta e non continua. Infatti, per esempio, $f(-\infty, 1) = [0, +\infty)$, $f^{-1}(-\infty, 1) = [0, 1)$, quindi f non è aperta e non è continua. Risulta, però, $f[a, +\infty) = [0, +\infty)$, se $a \leq 0$, e $f[a, +\infty) = [a^2, +\infty)$, se $a > 0$; cioè f è chiusa. □

ESEMPIO 1.5.33. Ogni funzione tra uno spazio topologico X e uno spazio Y con la topologia discreta è aperta e chiusa. In questo modo si ottengono esempi di funzioni non continue, aperte e chiuse considerando funzioni non continue di X in Y. Analogamente le funzioni continue di X in Y danno esempi di funzioni continue, aperte e chiuse. Si osservi che queste ultime funzioni, se non sono biunivoche, non possono essere omeomorfismi. □

ESEMPIO 1.5.34. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2. Allora la funzione identità $a \in (X, \tau_1) \to a \in (X, \tau_2)$ è aperta ma non continua. □

1.6 Spazi connessi

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$ come le sfere o i poliedri, parlando in modo informale, possono considerarsi figure *"indivisibili"*, costituite cioè da *"un solo pezzo"*. Tale proprietà, per esempio, non può essere attribuita alla figura formata da due facce opposte di un cubo, come si evince dalla Figura 1.10.

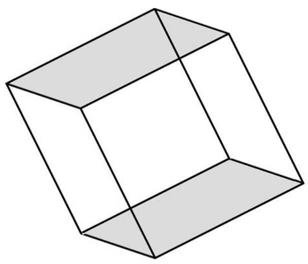


Figura 1.10: Facce opposte di un cubo

La propietà in questione è intuitivamente una proprietà topologica e può essere formalmente descritta dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.6.1. Uno spazio topologico (X, τ) si dice ***connesso*** se non è unione di due suoi aperti non vuoti e disgiunti. In tal caso si side anche che τ è una ***topologia connessa***. Uno spazio non connesso si dice ***sconnesso***. Un sottoinsieme Y di X si dice ***connesso*** o ***sconnesso*** se è tale come sottospazio di X. □

Tornando all'osservazione iniziale, è chiaro che, secondo la precedente definizione, la figura costituita da due facce opposte di un cubo in $\mathbb{R}^3$ è uno spazio sconnesso. Vedremo più avanti che le sfere e i poliedri, come avevamo euristicamente intuito, sono spazi connessi.

ESEMPIO 1.6.2. Gli spazi topologici per i quali due arbitrari aperti non vuoti sono ad intersezione non vuota sono connessi. Tali spazi si dicono ***irriducibili***. Tra questi ritroviamo, per esempio, la topologia del tiro a bersaglio, la topologia di $\mathbb{R}$ delle semirette sinistre aperte e la topologia di Zariski di $\mathbb{F}^n$, con $\mathbb{F}$ campo infinito. □

ESERCIZIO 1.6.3. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2. Provare che:

- τ_2 connessa $\Rightarrow \tau_1$ connessa,
- τ_1 sconnessa $\Rightarrow \tau_2$ sconnessa. □

PROPOSIZIONE 1.6.4. *Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti proprietà:*

- *X è connesso;*
- *X non è unione di due chiusi non vuoti e disgiunti;*
- *X non contiene alcun sottoinsieme proprio e non vuoto che sia aperto e chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza di due aperti non vuoti e disgiunti A, A' di X tali che $A \cup A' = X$ equivale all'esistenza di due chiusi non vuoti e disgiunti $C(= \mathscr{C}(A) = A'), C' = (\mathscr{C}(A') = A)$ tali che $C \cup C' = X$ e, in queste ipotesi, A e A' sono entrambi insiemi aperti e chiusi. □

ESERCIZIO 1.6.5. Sia Y un sottospazio di uno spazio topologico X. Provare che un sottoinsieme T di Y è connesso in Y se, e solo se, è connesso in X. □

ESERCIZIO 1.6.6. Sia X uno spazio topologico discreto. Provare che X è connesso se, e solo se, contiene un solo punto. □

ESERCIZIO 1.6.7. Provare che lo spazio somma (*cfr.* **Esempio 1.3.11**) di due spazi topologici è sconnesso. □

PROPOSIZIONE 1.6.8. *Se ogni due punti distinti di uno spazio topologico X appartengono ad un sottospazio connesso di X, allora X è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che X sia sconnesso, esistano cioè due aperti non vuoti e disgiunti A, A' tali che $A \cup A' = X$. Se a, a' sono due punti rispettivamente di A e A', detotiamo con T un sottospazio connesso di X contenente a e a'. Allora risulta

$$(A \cap T) \cap (A' \cap T) = \emptyset\,, \quad (A \cap T) \cup (A' \cap T) = T\,,$$

con $A \cap T\,,\ A' \cap T \neq \emptyset$. Ne segue che T è sconnesso, un assurdo. □

PROPOSIZIONE 1.6.9. *Siano X uno spazio topologico e Y_1, Y_2 due suoi sottospazi connessi ad intersezione non vuota. Allora $Y_1 \cup Y_2$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, $Y = Y_1 \cup Y_2$ fosse sconnesso, esisterebbe un suo sottoinsieme non vuoto T chiuso e aperto. Tale sottoinsieme avrebbe intersezione non vuota con almeno uno tra Y_1 e Y_2, per esempio con Y_1. Allora $Y_1 \cap T$ sarebbe un sottospazio non vuoto di Y_1 chiuso e aperto e ciò è assurdo, essendo Y_1 connesso per ipotesi. $\square$

COROLLARIO 1.6.10. *Siano X uno spazio topologico e $\{Y_j\}_{j\in J}$ una famiglia di sottospazi connessi di X ad intersezione non vuota. Allora*

$$Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$$

è un sottospazio connesso.

DIMOSTRAZIONE. Siano c un punto in $\cap_{j\in J} Y_j$ e a, b punti di Y tali che $a \in Y_s$, $b \in Y_t$, $s, t \in J$. Allora $Y_s \cup Y_t$, essendo Y_s, Y_t ad intersezione non vuota, è un connesso per a, b contenuto in Y e ciò prova che Y è connesso di X. $\square$

ESERCIZIO 1.6.11. Siano X uno spazio topologico, $\{Y_j\}_{j\in J}$ una famiglia di sottospazi connessi di X ed esista $k \in J$ tale che $Y_k \cap Y_j$ è connesso per ogni $j \in J$. Allora,

$$Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$$

è un sottospazio connesso di X. $\square$

PROPOSIZIONE 1.6.12. *Siano X uno spazio topologico e Y un suo sottospazio connesso. Allora la chiusura di Y è connessa.*

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, $\overline{Y}$ fosse sconnesso, esisterebbero due aperti A_1, A_2 di X tali che

$$(A_1 \cap \overline{Y}) \cup (A_2 \cap \overline{Y}) = \overline{Y}\,, \ \ (A_1 \cap \overline{Y}) \cap (A_2 \cap \overline{Y}) = \emptyset\,,$$

con $A_1 \cap \overline{Y}, A_2 \cap \overline{Y}$ non vuoti e avremmo

$$(A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = Y\,, \ \ (A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y) = \emptyset\,.$$

Ora, un punto $y_1 \in A_1 \cap \overline{Y}$ è di aderenza per Y, quindi Y contiene un punto $a_1 \in A_1$, essendo A_1 un aperto per y_1, e risulta $A_1 \cap Y \neq \emptyset$. In modo analogo si vede che $A_2 \cap Y \neq \emptyset$. Le ultime due osservazioni provano che Y è sconnesso, il che è contro le ipotesi. $\square$

PROPOSIZIONE 1.6.13. *Siano X uno spazio topologico e Y un suo sottospazio connesso. Allora ogni sottospazio T di X tale che $Y \subseteq T \subseteq \overline{Y}$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La chiusura di Y nel sottospazio T è uguale a T e l'asserto segue dalla proposizione precedente. □

PROPOSIZIONE 1.6.14. **(La connessione si conserva per continuità)** *Siano $f : X \to Y$ una funzione continua e X uno spazio connesso. Allora $f(X)$ è un sottospazio connesso di Y; in particolare, se f è suriettiva, Y è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo $f(X)$ sconnesso e sia $T \subseteq f(X)$ un sottospazio di $f(X)$ aperto e chiuso, con $\emptyset \neq T \neq f(X)$. Allora X risulta sconnesso, contenendo $f^{-1}(T)$ che è non vuoto, diverso da X, aperto e chiuso. Ciò è contro le ipotesi e l'asserto è provato. □

Osserviamo esplicitamente che, in forza della proposizione precedente, abbiamo che *la connessione è invariante per omeomorfismi* e che *una funzione continua trasforma sottospazi connessi in sottospazi connessi.*

1.6.1 Connessione in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ e connessione per poligonali

Nel presente paragrafo supporremo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ dotati della topologia naturale.

PROPOSIZIONE 1.6.15. **(L'intervallo $[a, b]$ è connesso)** *Ogni intervallo chiuso $[a, b]$ di $\mathbb{R}$, con la topologia naturale, è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo $[a, b]$ unione di due suoi chiusi C_1, C_2 non vuoti e disgiunti e supponiamo $b \in C_2$. Notiamo esplicitamente che nelle nostre ipotesi C_1, C_2 sono chiusi anche in $\mathbb{R}$. Allora b è un maggiorante di C_1 e l'estremo superiore c di C_1, essendo di aderenza per C_1, appartiene a C_1 ed è diverso da b. Ne segue che $(c, b] \subseteq C_2$, quindi c, risultando aderente a C_2, appartiene a C_2; un assurdo, essendo C_1, C_2 insiemi disgiunti. □

PROPOSIZIONE 1.6.16. **(Connessi di $\mathbb{R}$)** *I sottospazi connessi di $\mathbb{R}$, con la topologia naturale, sono tutti e soli gli intervalli.*

DIMOSTRAZIONE. Un intervallo di $\mathbb{R}$ è connesso in forza delle **Proposizioni 1.6.8** e **1.6.15**. Ora, consideriamo un sottospazio connesso di $\mathbb{R}$ e, per assurdo, supponiamo che non sia un intervallo. Allora esistono due punti $a, b \in Y$ e un punto $z \notin Y$ tali che $a < z < b$. Ne segue che

$$Y = (Y \cap (-\infty, z)) \cup (Y \cap (z, +\infty)),$$

un assurdo perché Y è connesso. □

ESERCIZIO 1.6.17. Siano J un intervallo di $\mathbb{R}$ e c un punto di J diverso da eventuali estremi di J. Provare che $J \setminus \{c\}$ è un sottospazio sconnesso di $\mathbb{R}$. □

PROPOSIZIONE 1.6.18. *Gli intervalli* $[0,1]$, $[0,1)$ *e* $(0,1)$ *di* $\mathbb{R}$ *sono a due a due non omeomorfi. Ne segue che ogni intervallo di* $\mathbb{R}$ *(e quindi ogni sottospazio connesso di* $\mathbb{R}$*) è omeomorfo ad uno degli intervalli* $[0,1]$, $[0,1)$ *o* $(0,1)$.

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse un omeomorfismo $f : [0,1] \to [0,1)$, la restrizione di f all'intervallo $(0,1) = [0,1] \setminus \{0,1\}$ sarebbe un omeomorfismo tra $(0,1)$ e $f(0,1) = [0,1[\setminus\{f(0), f(1)\}$ e ciò è assurdo perché $(0,1)$ è connesso mentre $f(0,1)$ non lo è. In modo analogo si prova che $[0,1]$ e $[0,1)$ non sono omeomorfi a $(0,1)$. La seconda parte dell'asserto segue dalle **Proposizioni 1.5.23 e 1.6.16.** □

Ricordiamo che, se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sono due elementi di $\mathbb{R}^n$, la retta ℓ per $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ ha equazione parametrica

$$\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})t - \boldsymbol{a}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

e quando t varia in $[0,1]$ il punto corrispondente $\boldsymbol{x}(t)$ descrive il segmento di estremi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Poiché la funzione

$$t \in \mathbb{R} \ \to \ \boldsymbol{x}(t) \in \ell$$

è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ (con la topologia naturale) e ℓ (con la topologia indotta da quella naturale di $\mathbb{R}^n$), la **Proposizione 1.6.16** può riformularsi nel seguente modo (*cfr.* **Proposizione 1.5.16**).

PROPOSIZIONE 1.6.19. (Connessi di una retta euclidea) *I sottospazi connessi di una retta di* $\mathbb{R}^n$*, con la topologia indotta da quella naturale di* $\mathbb{R}^n$*, sono la retta stessa, le semirette (aperte e chiuse) e i segmenti (aperti, chiusi, semiaperti).*

ESEMPIO 1.6.20. (Insiemi convessi) Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ si dice ***convesso*** se il segmento di estremi due suoi punti distinti qualsiasi è contenuto in C. Dalle **Proposizioni 1.6.8, 1.6.19** segue che *i sottoinsiemi convessi di* $\mathbb{R}^n$ *sono connessi.* In particolare *risultano connessi, perché convessi, i seguenti sottoinsiemi:* $\mathbb{R}^n$ *e i suoi sottospazi affini, i semispazi (aperti e chiusi), le sfere (aperte e chiuse), i poliedri regolari (aperti e chiusi) di* $\mathbb{R}^3$. Si osservi che nel caso $n = 1$ i sottoinsiemi convessi sono tutti e soli gli intervalli. □

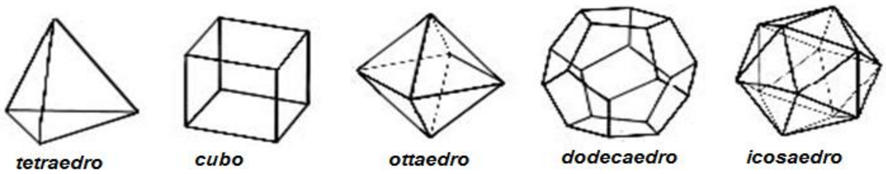


Figura 1.11: I cinque poliedri regolari

ESEMPIO 1.6.21. (Le superfici sferiche sono connesse) La circonferenza S^1 di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ è immagine della funzione continua

$$t \in [0, 2\pi] \to (\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora, in forza delle **Proposizioni 1.6.14 e 1.6.15**, S^1, e quindi tutte le circonferenze di $\mathbb{R}^2$, sono connesse. Ora, se tagliamo una superficie sferica S^{n-1} di $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, con un iperpiano otteniamo una superficie sferica di $\mathbb{R}^{n-1}$. Usando questa osservazione e la **Proposizione 1.6.8** è facile provare per induzione su n che S^n è connessa. Si può provare che S^n, $n > 1$, è connessa anche osservando che S^n è la chiusura di $S^n \setminus \{A\}$, con A punto di S^n. Infatti, $S^n \setminus \{A\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (*cfr.* **Esempio 1.5.26**), che è connesso, e la chiusura di un insieme connesso è connesso (*cfr.* **Proposizione 1.6.12**). □

ESERCIZIO 1.6.22. Provare che, nel piano euclideo, un segmento chiuso e una circonferenza non sono omeomorfi. □

ESERCIZIO 1.6.23. Sia X l'unione di due circonferenze del piano euclideo aventi in comune esattamente un punto. Provare che X non è omeomorfo ad una circonferenza. □

ESEMPIO 1.6.24. (Poligonali in $\mathbb{R}^n$) Si chiama ***poligonale*** in $\mathbb{R}^n$ l'unione di una successione finita di segmenti $s_1, s_2, \ldots, s_m$ con la proprietà che il secondo estremo di s_j è uguale al primo estremo di s_{j+1}, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. In forza delle **Proposizioni 1.6.8, 1.6.19**, *le poligonali risultano insiemi connessi.* □

DEFINIZIONE 1.6.25. (Connessione per poligonali) Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ si dice ***connesso per poligonali*** se due suoi arbitrari punti distinti sono estremi di una poligonale contenuta nell'insieme. □

Risultano, per esempio, connessi per poligonali gli insiemi convessi ed i poliedri. Non sono connesse per poligonali, pur essendo connesse, le superfici sferiche. La **Proposizione 1.6.8** e il fatto che le poligonali sono insiemi connessi assicurano che *ogni insieme connesso per poligonali è connesso.* Esistono, però, insiemi connessi che non sono connessi per poligonali. Le due nozioni, quella di connessione e quella di connessione per poligonali, coincidono nel caso degli aperti di $\mathbb{R}^n$, come prova il prossimo risultato.

PROPOSIZIONE 1.6.26. *Un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, con la topologia naturale, è connesso per poligonali se, e solo se, è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La prima implicazione è conseguenza dell'osservazione precedente. Ora, per assurdo, sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che contenga due punti $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ che non sono estremi di una poligonale contenuta in A.

Consideriamo l'insieme A_1 dei punti di A congiungibili ad $\boldsymbol{x}$ mediante una poligonale contenuta in A e l'insieme $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che A_1, che è non vuoto perché contiene $\boldsymbol{x}$, è aperto. Infatti, un arbitrario punto $\boldsymbol{a} \in A_1$ è centro di un intorno sferico U contenuto in A, essendo A aperto, e, per ogni punto $\boldsymbol{b} \in U$, il segmento di vertici $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ è contenuto in U. Ne segue che $\boldsymbol{b}$ è congiungibile a $\boldsymbol{x}$ mediante una poligonale e, di conseguenza, U è contenuto in A_1 e A_1 è aperto. Allo stesso modo si vede che A_2, che è non vuoto perché contiene $\boldsymbol{y}$, è aperto. Allora A è unione dei due aperti non vuoti e disgiunti A_1 e A_2 e ciò è assurdo. Ne segue che A è connesso per poligonali. □

1.6.2 Componenti connesse

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se, per ogni due punti $a, b \in X$, si pone

$$a \overset{c}{\sim} b \;\Leftrightarrow\; a, b \text{ appartengono ad uno stesso sottospazio connesso di } X\,,$$

si ottiene, come subito si prova, una relazione di equivalenza su X. Ogni classe d'equivalenza, rispetto a questa relazione, si chiama *componente connessa* di X. La componente connessa di X contenente un fissato punto $a \in X$ si chiama *componente connessa di* a *e si denota con* $k(a)$.

PROPOSIZIONE 1.6.27. *Per uno spazio topologico X, valgono le seguenti proprietà:*

- *X possiede un'unica componente connessa se, e solo se, è connesso.*
- *Ogni componente connessa di X è un connesso.*
- *Un connesso Y contenente un punto $a \in X$ è contenuto nella componente connessa di a.*
- *La componente connessa di un punto $a \in X$ è uguale all'unione di tutti i sottospazi connessi di X contenenti a.*
- *Ogni componente connessa di X è un chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. È lasciata per esercizio al Lettore. □

ESEMPIO 1.6.28. ($GL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{R})$) Il *gruppo lineare* $GL(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici quadrate invertibili a coefficienti reali è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n,n}$ con la topologia naturale. La funzione

$$f \;:\; A \in GL(n, \mathbb{R}) \;\to\; \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è continua e suriettiva, da cui segue che $GL(n, \mathbb{R})$ non è connesso. È facile rendersi conto che $GL(n, \mathbb{R})$ possiede esattamente due componenti connesse: una $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ è l'insieme delle matrici a determinante positivo, l'altra $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ quella delle matrici a determinante negativo. Il gruppo lineare speciale $SL(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici in $GL(n, \mathbb{R})$ a determinante uguale a 1, è contenuto nella componente connessa $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ di $GL(n, \mathbb{R})$ ed è connesso. □

ESERCIZIO 1.6.29. Calcolare le componenti connesse dei seguenti spazi:

- $\mathbb{R}$ meno un numero finito k di suoi punti;
- $\mathbb{R}^2$ meno un numero finito k di suoi punti;
- $\mathbb{R}^2$ meno i punti di una iperbole;
- $\mathbb{R}^2$ meno i punti di una ellisse;
- $\mathbb{R}^2$ meno i punti di una parabola;
- $\mathbb{R}^n$ meno i punti di un iperpiano;
- $\mathbb{R}^n$ meno i punti di un sottospazio affine di dimensione k, $0 < k < n-1$. □

ESERCIZIO 1.6.30. Provare che le componenti connesse di $\mathbb{Z}$, considerato come sottospazio di $\mathbb{R}$, sono i singleton dei suoi punti. □

1.7 Spazi compatti

Molte proprietà topologiche dei sottospazi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$, con la topologia naturale, dipendono dalla cosiddetta proprietà di *compattezza*. Tale proprietà, che definisce un'ampia e importante classe di spazi, sarà introdotta e discussa in questo paragrafo.

DEFINIZIONE 1.7.1. (Spazi compatti) Uno spazio topologico (X, τ) si dice ***compatto*** se ogni suo ricoprimento di aperti contiene un sottoricoprimento finito. In altre parole, per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tale che

$$X = \bigcup_{j \in J} A_j$$

esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$X = \bigcup_{i \in F} A_i \, .$$

In tal caso si dice anche che τ è una ***topologia compatta***. Un sottoinsieme Y di X si dice ***compatto*** se è compatto come sottospazio di X, cioè se per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$$

esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i \, .$$

□

ESEMPIO 1.7.2. I sottoinsiemi finiti di un qualunque spazio topologico sono compatti; in particolare sono compatti i punti. □

ESERCIZIO 1.7.3. Provare che la topologia discreta su un insieme X è compatta se, e solo se, X è finito. Provare, inoltre, che la topologia cofinita su X è compatta. □

ESEMPIO 1.7.4. ($\mathbb{R}^n$ non è compatto) L'unione di un numero finito di intorni sferici, con centro un fissato punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, coicide con l'intorno sferico di raggio massimo. Ne segue che il ricoprimento di aperti di $\mathbb{R}^n$ formato da tutti gli intorni sferici di centro $\boldsymbol{a}$ non contiene un sottoricoprimento finito e, quindi, $\mathbb{R}^n$ non è compatto. Allo stesso modo si prova che uno spazio metrico non limitato non è compatto. □

ESEMPIO 1.7.5. (I sottospazi non limitati di uno spazio metrico non sono compatti) L'esempio precedente si generalizza nel seguente modo. Un sottospazio di uno spazio metrico X è limitato se è limitata la metrica in essa indotta da X o, equivalentemente, se è contenuto in un intorno sferico chiuso di X. Allora, se Y è un sottospazio non limitato di X, il ricoprimento di Y formato da tutti gli intorni sferici di centro un fissato punto $a \in X$ non contiene un sottoricoprimento finito di Y e, quindi, Y non è compatto. *In particolare sono non compatti i sottospazi non limitati di* $\mathbb{R}^n$. □

ESERCIZIO 1.7.6. Provare che lo spazio somma (*cfr.* **Esempio 1.3.11**) di due spazi topologici compatti è compatto. □

ESERCIZIO 1.7.7. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2. Provare che:

- τ_2 compatta $\Rightarrow \tau_1$ compatta,
- τ_1 non compatta $\Rightarrow \tau_2$ non compatta. □

DEFINIZIONE 1.7.8. Si dice che una famiglia di chiusi di uno spazio topologico ha la ***proprietà dell'intersezione finita*** se ogni sua sottofamiglia finita è ad intersezione non vuota. □

PROPOSIZIONE 1.7.9. (Una caratterizzazione dei compatti) *Uno spazio topologico X è compatto se, e solo se, ogni sua famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita è ad intersezione non vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Se X è compatto e $\mathfrak{F} = \{C_i\}_{i \in I}$ una sua famiglia di chiusi tale che $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, risulta

$$\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}(C_i) = \mathscr{C}\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = \mathscr{C}(\emptyset) = X$$

e, per la compattezza di X, esiste un sottoinsieme finito F di I tale che

$$X = \bigcup_{f \in F} \mathscr{C}(C_f) = \mathscr{C}\left(\bigcap_{f \in F} C_f\right).$$

Allora $\bigcap_{f \in F} C_f = \emptyset$ e, quindi, $\mathfrak{F}$ non ha la proprietà dell' intersezione finita.
Se ogni famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita è ad intersezione non vuota e se $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti di X, risulta

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in i} \mathscr{C}(A_i) = \emptyset$$

e, quindi, la famiglia di chiusi $\{\mathscr{C}(A_i)\}_{i\in I}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Allora esiste un sottoinsieme finito F di I tale che

$$\bigcap_{f\in F}\mathscr{C}(A_f)=\mathscr{C}\left(\bigcup_{f\in F}A_f\right)=\emptyset$$

e risulta $X=\bigcup_{f\in F}A_f$. Così X è compatto e l'asserto è provato. □

PROPOSIZIONE 1.7.10. (I chiusi di un compatto sono compatti) *Ogni sottoinsieme chiuso Y di uno spazio compatto X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di aperti di X tale che

$$Y\subseteq\bigcup_{j\in J}A_j\,,$$

X risulta unione dell'aperto $X\setminus Y$ e della famiglia $\{A_j\}_{j\in J}$:

$$X=(X\setminus Y)\cup\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right).$$

Allora, essendo X compatto, esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$X=(X\setminus Y)\cup\left(\bigcup_{j\in F}A_j\right),$$

cioè

$$Y\subseteq\bigcup_{j\in F}A_j$$

e Y è compatto. □

OSSERVAZIONE 1.7.11. In generale, i sottospazi compatti di uno spazio topologico non sono necessariamente chiusi. Per esempio, i punti di $\mathbb{R}$, con la topologia delle semirette sinistre aperte, sono compatti ma non sono chiusi. Questa proprietà, invece, è vera nel caso degli spazi T_2, come mostra il prossimo risultato. □

PROPOSIZIONE 1.7.12. (I compatti di uno spazio T_2 sono chiusi) *Sia X uno spazio T_2. Allora ogni sottospazio compatto Y di X è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che $X\setminus Y$ è un aperto e, a tale scopo, fissiamo un punto $x\in X\setminus Y$. Per ogni $y\in Y$, esistono un intorno aperto A_y di y e un intorno aperto V_x^y di x ad intersezione vuota, essendo X uno spazio T_2. Allora è

$$Y\subseteq\bigcup_{y\in Y}A_y$$

e, per la compattezza di Y, esiste un insieme finito $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ di punti di Y tali che

$$Y \subseteq A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \cdots \cup A_{y_n}.$$

Ora consideriamo l'aperto

$$V_x = V_x^{y_1} \cap V_x^{y_2} \cap \cdots \cap V_x^{y_n}$$

e osserviamo che $V_x \cap Y = \emptyset$. Infatti, se esistesse un punto $z \in V_x \cap Y$, avremmo $z \in V_x^{y_j} \cap A_{y_j}$, per qualche intero j; un assurdo. Ne segue che ogni punto di $X \setminus Y$ possiede un intorno disgiunto da Y, cioè $X \setminus Y$ è aperto. □

PROPOSIZIONE 1.7.13. *Ogni sottoinsieme infinito Y di uno spazio compatto X ha almeno un punto di accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE. Si supponga, per assurdo, che Y sia privo di punti di accumulazione e, per ogni punto $x \in X$ si consideri un aperto A_x per x tale che $Y \cap A_x = \emptyset$ oppure $Y \cap A_x = \{x\}$. Allora, per la compattezza di X, esiste un numero finito di suoi punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tali che

$$X = A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \cdots \cup A_{x_n},$$

e quindi

$$Y = Y \cap X = Y \cap (A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \cdots \cup A_{x_n}) = (Y \cap A_{x_1}) \cup (Y \cap A_{x_2}) \cup \cdots \cup (Y \cap A_{x_n}).$$

Ora, poiché $Y \cap A_{x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, contiene al più un elemento, Y risulta finito; un assurdo. □

PROPOSIZIONE 1.7.14. **(La compattezza si conserva per continuità)** *Siano $f : X \to Y$ una funzione continua e X uno spazio compatto. Allora $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y; in particolare, se f è suriettiva, Y è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\{A'_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti di $f(X)$, essendo f continua, la famiglia $\{A_i = f^{-1}(A'_i)\}_{i \in I}$ risulta un ricoprimento di aperti di X e da questo, per la compattezza di X, se ne può estrarre uno finito $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$. Allora si ha subito che $\{A'_{i_1}, A'_{i_2}, \ldots, A'_{i_n}\}$ è un ricoprimento di $f(X)$ e l'asserto è provato. □

Osserviamo esplicitamente che, in forza della proposizione precedente, abbiamo che *la compattezza è invariante per omeomorfismi* e che *una funzione continua trasforma sottospazi compatti in sottospazi compatti.*

PROPOSIZIONE 1.7.15. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua di uno spazio compatto X in uno di Hausdorff Y. Allora f è chiusa. In particolare, se f è biunivoca, è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Un chiuso C di X è compatto, per la compattezza di X. Allora $f(C)$ è un compatto di uno spazio T_2 e, quindi è chiuso. □

1.8 Prodotti

Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici, notazione che manterremo in tutto il paragrafo, e poniamo

$$\mathcal{B} = \tau_1 \times \tau_2 = \{A_1 \times A_2 \subseteq X_1 \times X_2 \text{ con } A_1 \in \tau_1\,,\ A_2 \in \tau_2\}\,.$$

La famiglia $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di $X_1 \times X_2$ e l'intersezione di due suoi elementi $A_1 \times A_2, A_1' \times A_2'$ è ancora un elemento di $\mathcal{B}$, risultando

$$(A_1 \times A_2) \cap (A_1' \times A_2') = (A_1 \cap A_1') \times (A_2 \cap A_2').$$

Ne segue che $\mathcal{B}$ verifica gli assiomi delle basi e, quindi (*cfr.* **Proposizione 1.3.27**), esiste un'unica topologia su $X_1 \times X_2$ che ammette $\mathcal{B}$ come base.

DEFINIZIONE 1.8.1. (Spazio prodotto) L'unica topologia τ sul prodotto $X_1 \times X_2$ dei sostegni di due spazi topologici $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ che ammette $\mathcal{B} = \tau_1 \times \tau_2$ come base prende il nome di ***topologia prodotto di*** τ_1 ***e*** τ_2. Gli aperti della base $\mathcal{B}$ si dicono ***aperti elementari***. Lo spazio topologico $X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, \tau)$ prende il nome di ***spazio prodotto di*** X_1 ***per*** X_2. Le funzioni

$$p_{X_j} \ : \ (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2 \to a_j \in X_j\,,\ j = 1, 2\,,$$

prendono il nome di ***proiezioni*** di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2, rispettivamente. □

Nel seguito denoteremo semplicemente con p_j la proiezione canonica p_{X_j}, $j = 1, 2$.

PROPOSIZIONE 1.8.2. *Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2. Allora la famiglia*

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{B_1 \times B_2 \ : \ B_1 \in \mathcal{B}_1\,,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base per lo spazio prodotto $X_1 \times X_2$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ sono aperti di $X_1 \times X_2$, basta provare che ogni aperto elementare di $X_1 \times X_2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Se, dunque, $A_1 \times A_2$ è un aperto elementare con

$$A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i^1 \quad \text{e} \quad A_2 = \bigcup_{j \in J} B_j^2\,, \quad \text{con } B_i^1 \in \mathcal{B}_1\,,\ B_j^2 \in \mathcal{B}_2\,,\ (i,j) \in I \times J\,,$$

risulta

$$A_1 \times A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i^1\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j^2\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i^1 \times B_j^2)$$

e l'asserto è provato. □

ESERCIZIO 1.8.3. Siano x_1 e x_2 punti rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2. Siano $\mathcal{U}_1(x_1)$ e $\mathcal{U}_2(x_2)$ sistemi fontamentali d'intorni rispettivamente di x_1 in X_1 e x_2 in X_2. Provare che la famiglia

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) = \{U_1 \times U_2 \ : \ U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1)\,,\ U_2 \in \mathcal{U}_2(x_2)\}$$

è un sistema fondamentale d'intorni di (x_1, x_2) nello spazio prodotto $X_1 \times X_2$. Provare anche che, se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ sono sistemi fontamentali d'intorni rispettivamente di X_1 e X_2, allora

$$\mathcal{U} = \{U_1 \times U_2 \ : \ U_1 \in \mathcal{U}_1\,,\ U_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

è un sistema fondamentale di intorni del prodotto $X_1 \times X_2$. □

OSSERVAZIONE 1.8.4. ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$) Il prodotto cartesiano di due intervalli limitati di $\mathbb{R}$, con la topologia naturale, è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, con la topologia naturale, che prende il nome di ***rettangolo***. Nel caso gli intervalli in questione hanno la stessa lunghezza si parla ovviamente di ***quadrato***. Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà:

- un rettangolo prodotto di intervalli aperti (risp. chiusi) è un aperto (risp. chiuso) di $\mathbb{R}^2$ e, in questo caso, si parla di ***rettangolo aperto*** (risp. ***chiuso***);
- i rettangoli aperti costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$;
- i quadrati aperti costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$.

Ne segue che ***Il prodotto*** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ***è omeomorfo a*** $\mathbb{R}^2$. □

PROPOSIZIONE 1.8.5. *Le proiezioni*

$$p_j \ : \ (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2 \to a_j \in X_j \ ,$$

$j = 1, 2$, *sono funzioni continue e aperte. Inoltre, la topologia prodotto è la topologia meno fine di* $X_1 \times X_2$ *per cui le proiezioni risultano continue.*

DIMOSTRAZIONE. La proiezione p_1 trasforma un aperto $A_1 \times A_2$ della base $\mathcal{B}$ nell'aperto A_1 di X_1 e la controimmagine in p_1 di un aperto A_1 di X_1 è l'aperto $A_1 \times X_2$ di $X_1 \times X_2$. Ne segue che p_1 è continua e aperta e in modo analogo si prova che ciò è vero anche per p_2. Sia ora σ una topologia di $X_1 \times X_2$ rispetto alla quale le due proiezioni sono continue. Allora, per $i = 1, 2$, se A_i è un aperto di X_i, $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ e $p_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$ sono aperti di σ. Ne segue che $A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2)$ è un aperto di σ e da ciò segue subito che σ è più fine della topologia prodotto di $X_1 \times X_2$. □

ESEMPIO 1.8.6. (Le proiezioni non sono chiuse) In $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (*cfr.* **Esempio1.8.4**), con la topologia naturale, si consideri il sottoinsiene

$$Y = \{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy - 1 = 0\} \ \ (\textit{iperbole equilatera})\,.$$

Y è chiuso, perchè è un insieme algebrico (*cfr.* **Osservazione 1.5.5**), ma la sua prima proiezione

$$p_1(Y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$$

non è un chiuso di $\mathbb{R}$. Ciò prova che, in generale, le proiezioni non sono funzioni chiuse. $\square$

PROPOSIZIONE 1.8.7. (Proprietà di universalità del prodotto) *Siano T, X_1, X_2 spazi topologici e $f : T \to X_1$, $g : T \to X_2$ due funzioni. Allora la funzione*

$$h : a \in T \to (f(a), g(a)) \in X_1 \times X_2$$

è continua se, e solo se, f e g sono continue.

DIMOSTRAZIONE. Se h è continua, le funzioni $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$ sono continue perché composte di funzioni continue. Se f, g sono continue e $A_1 \times A_2$ è un aperto elementare di $X_1 \times X_2$, risulta

$$h^{-1}(A_1 \times A_2) = \{t \in T \,:\, h(t) = (f(t), g(t)) \in A_1 \times A_2\}$$

$$= \{t \in T \,:\, f(t) \in A_1,\, g(t) \in A_2\} = f^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2)\,,$$

da cui si ricava che la controimmagine in h di un aperto di $X_1 \times X_2$ è un aperto di T. Ne segue che h è continua e l'asserto è provato. $\square$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & X_1 \\
X_2 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_2"] \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}$$

Figura 1.12: Proposizione 1.8.7

COROLLARIO 1.8.8. *Siano X, Y due spazi topologici e $f : X \to Y^2$ una funzione. Allora, posto $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ per ogni $x \in X$, la funzione f è continua se, e solo se, f_1 e f_2 sono continue.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare la proprietà di universalità del prodotto alle funzioni f_1 e f_2. $\square$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f"] & Y \\ Y & Y \times Y \arrow[u, "p_1"'] \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$$

Figura 1.13: Corollario 1.8.8

PROPOSIZIONE 1.8.9. *Siano Y_1, Y_2 sottospazi rispettivamente degli spazi topologico X_1, X_2. Allora la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ su $Y_1 \times Y_2$ coincide con il prodotto delle topologie indotte su Y_1 e Y_2 rispettivamente da X_1 e X_2.*

DIMOSTRAZIONE. Un aperto T di $Y_1 \times Y_2$ con la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ è del tipo $(Y_1 \times Y_2) \cap A$, con A aperto nel prodotto $X_1 \times X_2$, per cui

$$A = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i^1 \times A_j^2)\,,$$

con A_i^1 aperto di X_1 e A_j^2 aperto di X_2, per ogni $i \in I$, $j \in J$. Allora risulta

$$T = (Y_1 \times Y_2) \cap A = (Y_1 \times Y_2) \cap \left(\bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i^1 \times A_j^2) \right)$$

$$= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (Y_1 \times Y_2) \cap (A_i^1 \times A_j^2) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (Y_1 \cap A_i^1) \times (Y_2 \cap A_j^2)$$

da cui si ha che T è aperto nel prodotto delle topologie indotte su Y_1 e Y_2 rispettivamente da X_1 e X_2. Le precedenti uguaglianze, lette a ritroso, provano la seconda parte dell'asserto. □

ESERCIZIO 1.8.10. Siano a e b punti rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2. Provare che le funzioni

$$(x_1, b) \in X_1 \times \{b\} \to x_1 \in X_1\,, \quad (a, x_2) \in \{a\} \times X_2 \to x_2 \in X_2\,,$$

restrizioni a $X_1 \times \{b\}$ e $\{a\} \times X_2$ delle proiezioni canoniche p_1, p_2 di $X_1 \times X_2$ rispettivamente su X_1 e X_2, sono omeomorfismi. □

PROPOSIZIONE 1.8.11. **(Prodotti di connessi)** *Il prodotto di due spazi topologici X_1, X_2 è connesso se, e solo se, X_1 e X_2 sono connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni canoniche di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 sono continue e suriettive e quindi, se $X_1 \times X_2$ è connesso, sono connessi anche X_1 e X_2. Supponiamo ora che X_1 e X_2 siano connessi e consideriamo due punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ di $X_1 \times X_2$. In forza dell'**Esercizio 1.8.10**, i sottospazi $X_1 \times \{b_2\}$, $\{a_1\} \times X_2$ sono connessi e, in più, hanno in comune il punto (a_1, b_2). Allora $(X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{a_1\} \times X_2)$ è un connesso contenente i punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ e da ciò segue che $X_1 \times X_2$ è connesso. □

PROPOSIZIONE 1.8.12. **(Prodotti di compatti)** *Il prodotto di due spazi topologici X_1, X_2 è compatto se, e solo se, X_1 e X_2 sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni canoniche di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 sono continue e suriettive e quindi, se $X_1 \times X_2$ è compatto, sono compatti anche X_1 e X_2. Siano ora X_1, X_2 due spazi topologici compatti e $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento di aperti del loro prodotto $X_1 \times X_2$. Per ogni $j \in J$, l'aperto A_j di $X_1 \times X_2$ è del tipo

$$A_j = \bigcup_{t \in T_j} U_t \times V_t \,,$$

ove U_t, V_t sono aperti rispettivamente di X_1, X_2 e T_j è un insieme. Posto, inoltre,

$$T = \bigcup_{j \in J} T_j \,,$$

la famiglia

$$\mathcal{F} = \{U_t \times V_t\}_{t \in T}$$

è un ricoprimento di aperti di $X_1 \times X_2$.
Per ogni $x \in X_1$, risulta

$$\{x\} \times X_2 \subseteq X_1 \times X_2 = \bigcup_{t \in T} U_t \times V_t$$

e, essendo $\{x\} \times X_2$ compatto, perché omeomorfo a X_2, esiste un sottoinsieme finito $T(x)$ di T tale che

$$\{x\} \times X_2 \subseteq \bigcup_{t \in T(x)} U_t \times V_t \,,$$

con $x \in U_t$, per ogni $t \in T(x)$.
Ora, per ogni $x \in X_1$, possiamo considerare l'aperto di X_1, contenente x, definito da

$$U(x) = \bigcap_{t \in T(x)} U_t$$

e possiamo costruire un ricoprimento di aperti di X_1 ponendo

$$\mathcal{U} = \{U(x)\}_{x \in X_1}.$$

Dalla compattezza di X_1, segue che esistono un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_m \in X_1$, tali che

$$X = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(x_m)$$

e la famiglia finita di aperti di $X_1 \times X_2$

$$\{U(x_1) \times V_t\}_{t \in T(x_1)} \cup \{U(x_2) \times V_t\}_{t \in T(x_2)} \cup \cdots \cup \{U(x_m) \times V_t\}_{t \in T(x_m)}$$

è un ricoprimeto finito di $X_1 \times X_2$.
A questo punto osserviamo che, per ogni $k = 1, 2, \dots, m$ e $t \in T(x_k)$, l'aperto $U(x_k) \times V_t$ è contenuto in qualche aperto della famiglia $\mathcal{A}$, diciamo $A_{i(k,t)}$; di conseguenza $\mathcal{A}$ possiede il sottoricoprimento finito

$$\{A_{i(k,t)} \ : \ k = 1, 2, \dots, m\,;\, t \in T\}$$

e, così, $X_1 \times X_2$ è compatto. □

Vediamo, ora, come la nozione di prodotto di due spazi topologici si generalizza in modo naturale a quella di prodotto di un numero finito di spazi. Siano (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), ..., (X_n, τ_n), $n > 2$, spazi topologici, notazione che manterremo in tutto il paragrafo, e poniamo

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \text{ con } A_1 \in \tau_1\,,\ A_2 \in \tau_2, \dots, A_n \in \tau_n\}\,.$$

La famiglia $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$ e l'intersezione di due suoi elementi è ancora un elemento di $\mathcal{B}$. Ne segue che $\mathcal{B}$ verifica gli assiomi delle basi e, quindi (*cfr.* **Proposizione 1.3.27**), esiste un'unica topologia su $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, che ammette $\mathcal{B}$ come base. Tale topologia prende il nome di ***topologia prodotto di*** $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ e gli aperti della base $\mathcal{B}$ si dicono ***aperti elementari***. Le funzioni

$$p_{X_j} \ : \ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to a_j \in X_j\,,\ j = 1, 2, \dots, n$$

prendono il nome di ***proiezioni*** e, come nel caso $n = 2$, risultano continue e aperte.

OSSERVAZIONE 1.8.13. Siano (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), (X_3, τ_3) spazi topologici. È facile provare che le funzioni

$$((a_1, a_2), a_3) \in (X_1 \times X_2) \times X_3 \to (a_1, a_2, a_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3\,,$$

$$(a_1, (a_2, a_3)) \in X_1 \times (X_2 \times X_3) \to (a_1, a_2, a_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3\,,$$

sono omeomorfismi. Più in generale, se (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), ..., (X_n, τ_n) sono spazi topologici, le funzioni del tipo

$$((a_1, \dots, a_t)(a_{t+1}, \dots a_n)) \in (X_1 \times \dots \times X_t) \times (X_{t+1} \times \dots \times X_n) \to$$

$$\to (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

sono omeomorfismi □

OSSERVAZIONE 1.8.14. L'**Osservazione 1.8.4** si generalizza nel modo seguente. Il prodotto cartesiano di n intervalli limitati di $\mathbb{R}$, con la topologia naturale, è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con la topologia naturale, che prende il nome di $n-$***rettangolo***. Nel caso gli intervalli in questione hanno la stessa lunghezza si parla di n***-cubo***. Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà:

- un $n-$rettangolo prodotto di intervalli aperti (risp. chiusi) è un aperto (risp. chiuso) di $\mathbb{R}^n$ e, in questo caso, si parla di n***-rettangolo aperto*** (risp. ***chiuso***);
- gli n-rettangoli aperti costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$;
- gli n-cubi aperti costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.

Ne segue che ***il prodotto*** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ ***di*** $\mathbb{R}$ ***per se stesso*** n ***volte è omeomorfo a*** $\mathbb{R}^n$. □

Tutte le proprietà e le proposizioni provate nel presente paragrafo per il prodotto di due spazi si estendono al prodotto di un numero finito di spazi; in particolare ***il prodotto di un numero finito di spazi topologici è connesso (risp. compatto) se, e solo se, i singoli fattori sono connessi (risp. compatti)***.

1.8.1 Compattezza in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

Nel presente paragrafo supporremo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ dotati della topologia naturale.

PROPOSIZIONE 1.8.15. (Teorema di E.Heine e E.Borel) *Ogni intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$ *di* $\mathbb{R}$, *con la topologia naturale, è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ tale che

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \tag{1.20}$$

e poniamo

$$X = \{x \in [a, b] \, : \, [a, x] \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \, , T \text{ sottoinsieme finito di } J\} \, .$$

Osserviamo che X, contenendo il punto a, è non vuoto. Inoltre, l'estremo superiore y di X, essendo aderente a $X(\subseteq [a,b])$, è aderente anche ad $[a,b]$ e, quindi, appartiene ad $[a,b]$. Allora, in forza della (1.20), esistono un aperto $A_j \in \mathcal{A}$ contenente y e un $\epsilon > 0$ tale che $(y-\epsilon, y+\epsilon) \subseteq A_j$. Così, essendo y aderente a X e $x \in X$, esistono

- un punto $x \in (y-\epsilon, y+\epsilon) \cap X$;
- un sottoinsieme finito $F \subseteq I$ tale che $[a,x] \subseteq \bigcup_{f\in F} A_f$

e risulta

$$[a,x] \cap (y-\epsilon, y+\epsilon) = [a, y+\epsilon) \subseteq \big(\bigcup_{f\in F} A_f\big) \cup A_j\,,$$

da cui

$$[a,b] \cap [a, y+\epsilon) \subseteq \big(\bigcup_{f\in F} A_f\big) \cup A_j$$

e

$$x \in [a,b] \cap [a, y+\epsilon) \quad \Rightarrow \quad x \in X\,; \tag{1.21}$$

in particolare $y \in X$. Ora, se supponiamo $y < b$, esiste un punto $z \in [a,b]$ con $y < z < y+\epsilon$ e, quindi, $z \in [a,b] \cap [a, y+\epsilon)$. Allora, in forza della (1.21), z appartiene a X e ciò è assurdo essendo $z > y$. In conclusione, risulta $y = b$ e l'asserto è provato. □

PROPOSIZIONE 1.8.16. *In $\mathbb{R}^n$ risultano compatti i seguenti sottospazi:*

- *gli $n-$rettangoli (in particolare gli $n-$cubi) chiusi;*
- *gli intorni sferici chiusi;*
- *le superfici sferiche chiuse.*

DIMOSTRAZIONE. In forza delle **Proposizioni 1.8.12, 1.8.15**, gli $n-$rettangoli chiusi sono compatti perché prodotti di intervalli compatti. Gli intorni sferici chiusi e le superfici sferiche sono chiusi contenuti in $n-$rettangoli chiusi, che sono spazi T_2, e quindi sono compatti in forza della **Proposizione 1.7.10**. □

PROPOSIZIONE 1.8.17. (Teorema di E.Heine, S.Pincherle e E.Borel) *Un sottoinsieme Y di $\mathbb{R}^n$ è compatto se, e solo se, è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Un sottospazio compatto Y di $\mathbb{R}^n$ è anche chiuso, essendo $\mathbb{R}^n$ uno spazio T_2 (*cfr.* **Proposizione 1.7.12**), ed è limitato in forza dell'**Esempio 1.7.5**. D'altra parte, un sottospazio Y chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in un intorno sferico chiuso S, che è compatto (*cfr.* **Esempio 1.8.16**). Allora Y, che è chiuso anche in S, è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto (*cfr.* **Proposizione 1.7.10**). □

ESEMPIO 1.8.18. ($GL(n,\mathbb{R})$ e $SL(n,\mathbb{R})$ non sono compatti) Il complementare del *gruppo lineare* $GL(n,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{n,n}$ (con la topologia naturale) è un chiuso perché controimmagine dello zero nella funzione continua

$$\det\,:\,A\in\mathbb{R}^{n,n}\,\to\,\det A\in\mathbb{R}\,.$$

Ne segue che $GL(n,\mathbb{R})$ è un aperto e, quindi, non è compatto in forza del precedente risultato. Tra l'altro, $GL(n,\mathbb{R})$ è anche non limitato (dimostrarlo per esercizio). Il gruppo $SL(n,\mathbb{R})$, invece, è un chiuso in quanto controimmagine di 1 nella funzione determinante. Anche questo gruppo non è compatto perchè non limitato. □

PROPOSIZIONE 1.8.19. (Una caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$) *Un sottoinsieme Y di $\mathbb{R}^n$ è compatto se, e solo se, ogni suo sottoinsieme infinito possiede almeno un punto di accumulazione in Y.*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che X sia compatto, e quindi chiuso (*cfr.* **Proposizione 1.8.17**), un suo sottoinsieme infinito Y ha almeno un punto di accumulazione $\boldsymbol{z}$ e risulta $\boldsymbol{z}\in\overline{Y}\subseteq X$.
Proviamo ora che, se ogni sottoinsieme infinito Y di K ha almeno un punto di accumulazione in Y, allora K è limitato e chiuso. Supponiamo per assurdo Y non limitato e sia $\boldsymbol{y}$ un punto di Y. Per ogni naturale positivo n, scegliamo un punto $\boldsymbol{x}_n\in Y$ con $x_n\notin D_n(\boldsymbol{y})=\overline{B}_n(\boldsymbol{y})$, cioè $d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_n)>n$, in modo che sia

$$d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_{n+1})>d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_n).$$

Allora $X=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n,\dots\}$ è un sottoinsieme infinito di Y senza punti di accumulazione in Y. Infatti, $\boldsymbol{y}$ e i punti $\boldsymbol{x}_n$, per costruzione, non sono di accumulazione per Y. Se, invece, $\boldsymbol{z}$ è un punto di $Y\setminus(X\cup\{\boldsymbol{y}\})$ e $B_{\boldsymbol{z}}(r)$ un suo intorno sferico aperto, sia m un intero tale che $m>d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+r$. Allora

$$\boldsymbol{t}\in B_{\boldsymbol{z}}\Rightarrow d(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})\le d(\boldsymbol{t},\boldsymbol{z})+d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})<r+d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})<m\Rightarrow B_r(\boldsymbol{z})\subseteq B_m(\boldsymbol{y}),$$

quindi $B_r(\boldsymbol{z})$ contiene un numero finito di punti di X perché $\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_{m+1}\dots$ non appartengono a $B_m(\boldsymbol{y})$; di conseguenza $\boldsymbol{z}$ non può essere di accumulazione per X in forza della **Proposizione 1.7.13**. Se $\boldsymbol{z}$ è un punto di X, possiamo costruire una successione infinita $(\boldsymbol{x}_n)$ di suoi punti tale che

$$d(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z})<\frac{1}{n}\ ,\quad d(\boldsymbol{x}_{n+1},\boldsymbol{z})<d(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z}).$$

Per costruzione, $(\boldsymbol{x}_n)$ converge a $\boldsymbol{z}$, che risulta pertanto punto di accumulazione per l'insieme infinito $X=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\dots\}$. D'altra parte, per ipotesi, X possiede un punto di accumulazione $\boldsymbol{y}$ in Y. Ora, supponendo per assurdo $\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{y}$, consideriamo un intorno U di $\boldsymbol{z}$ e uno V di $\boldsymbol{y}$ e, poichè da un certo indice in poi tutti gli x_m appartengono a U, necessariamente V contiene un numero finito di punti di X. Ciò è assurdo in forza della **Proposizione** e, quindi, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$. □

1.9 Quozienti

Ricordiamo che, se $f : X \to Y$ è un'applicazione tra due insiemi X e Y, la relazione $\sim_f$ definita da

$$a, b \in X\,, \ \ a \sim_f b \ \ \Leftrightarrow \ \ f(a) = f(b) \tag{1.22}$$

è di equivalenza su X e si dice ***associata ad*** f. La classe di equivalenza di un elemento $a \in X$ rispetto a $\sim_f$ sarà denotata con $[a]_f$, o semplicemente con $[a]$ se non vi è luogo ad equivoci. Denoteremo, inoltre, con π_f la ***proiezione canonica*** di X su $X/\sim_f$, cioè la funzione suriettiva definita da $\pi_f(a) = [a]_f$, per ogni $a \in X$. È ben noto che la funzione

$$\varphi_f \ : \ [a]_f \in X/\sim_f \ \to \ f(a) \in f(X)$$

è biunivoca ed è l'unica che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & f(X) \arrow[dl, "\varphi_f"] \\ X/\sim_X & \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

cioè $f(a) = \varphi_f(\pi_f(a))$, per ogni $a \in X$. Inoltre, se $\sim$ è una relazione di equivalenza su X, $[a]$ la classe d'equivalenza dell'elemento $a \in X$ e $\sim_\pi$ la relazione d'equivanenza associata alla proiezione canonica

$$\pi : a \in X \to [a] \in X/\sim\,, \tag{1.24}$$

le due relazioni $\sim$ e $\sim_\pi$ coincidono. Nel seguito, se T è un sottoinsieme di X, l'immagine $\pi(T)$ di T in π si dirà ***proiezione di*** T.

I richiami precedenti mostrano che assegnare una funzione suriettiva f tra due insiemi X e Y equivale ad assegnare su X la relazione d'equivalenza $\sim_f$ (1.22). In questa situazione, Y si può identificare col quoziente di X rispetto a $\sim_f$ e f con la proiezione canonica di X su questo quoziente. Questa osservazione giustifica la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.9.1. **(Topologia quoziente)** Siano (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ una funzione suriettiva. La famiglia

$$\tau_f = \{T \subseteq Y \text{ tale che } f^{-1}(T) \in \tau\}$$

è una topologia su Y (*cfr.* **Esempio 1.3.13**), che prende il nome di ***topologia quoziente*** di X rispetto a f. Lo spazio topologico (Y, τ_f) si chiama ***spazio quoziente*** e si denota anche con X/f. Se $\sim$ è una relazione d'equivalenza sui punti di X, la topologia quoziente τ_π di X rispetto alla proiezione canonica $\pi : X \to X/\sim$ prende il nome di ***topologia quoziente*** di X rispetto a alla relazione $\sim$ e lo spazio topologico $(X/\sim, \tau_\pi)$ si chiama ***spazio quoziente***. □

Osserviamo esplicitamente che, se $\sim$ è una relazione d'equivalenza sui punti dello spazio topologico X e $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione canonica, un sottoinsieme A dello spazio $X/\sim$ è aperto nella topologia quoziente se, e solo se, $\pi^{-1}(A)$ è un aperto di X.

OSSERVAZIONE 1.9.2. Se X è uno spazio topologico e $Y = \{y\}$ un insieme con un solo elemento. Allora esiste un'unica funzione f di X in Y e ovviamente tale funzione è suriettiva. Allora X/f è l'unica topologia, quella banale, di Y. Questo semplice esempio prova che ogni proprietà non vera per la topologia banale non si conserva nel passaggio al quoziente. In particolare, un quoziente di uno spazio T_j, $j = 1, 2, 3$, può non essere T_j. □

PROPOSIZIONE 1.9.3. *Siano (X, τ) uno spazio topologico, $f : X \to Y$ una funzione suriettiva di X su un insieme Y, τ_f la topologia quoziente di X rispetto a f e τ_{π_f} la topologia quoziente di X rispetto alla relazione $\sim_f$. Allora, con riferimento al seguente diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} (X, \tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_f"'] & (Y, \tau_f) \\ (X/\sim_f, \tau_{\pi_f}) \arrow[ur, "\varphi_f"'] & \end{tikzcd} \tag{1.25}$$

si ha che f e π_f sono continue e φ_f è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni f e π_f sono continue per definizione: le controimmagini in f degli aperti di Y e quelle in π_f degli aperti di $X/\sim_f$ sono aperti in X. La funzione φ_f è biunivoca perchè f è suriettiva. Ora, se A è un aperto di Y, $f^{-1}(A)$ è un aperto di X e, essendo

$$f^{-1}(A) = (\varphi_f \circ \pi_f)^{-1}(A) = (\pi_f^{-1} \circ \varphi^{-1})(A) = \pi_f^{-1}(\varphi_f^{-1}(A))$$

abbiamo che $\varphi^{-1}(A)$ è un aperto di $X/\sim_f$ e φ_f è continua. Infine, se T è un aperto di $X/\sim_f$, $\pi_f^{-1}(T)$ è un aperto in X e, essendo

$$f^{-1}(\varphi_f(T)) = (\pi_f^{-1} \circ \varphi_f^{-1})(\varphi_f(T)) = \pi_f^{-1}(T)\,,$$

abbiamo che $\varphi_f(T)$ è un aperto di Y e φ_f è aperta. Resta così provato che φ_f è un omeomorfismo. □

PROPOSIZIONE 1.9.4. *Sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva. Allora f è continua tra gli spazi topologici (X,τ) e (Y,σ) se, e solo se, la topologia σ di Y è meno fine della topologia quoziente τ_f. Ne segue che τ_f è la più fine tra le topologie su Y che rende f continua rispetto a (X,τ).* □

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ continua. Allora la controimmagine $f^{-1}(A)$ di un aperto A di (Y,σ) è un aperto di (X,τ) e, quindi, A è un aperto nella topologia quoziente, cioè $\sigma \le \tau_f$. Viceversa, se $\sigma \le \tau_f$, un aperto A in σ è anche un aperto in τ_f e, quindi, $f^{-1}(A)$ è un aperto in τ. Ne segue che f è continua rispetto a σ e l'asserto è provato. □

ESEMPIO 1.9.5. (Le proiezioni non sono in generale né aperte né chiuse) In $\mathbb{R}$ con la topologia naturale consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ che identifica i punti dell'intervallo $[0,1)$, cioè

$$a,b \in X\,, \quad a \sim b \;\Leftrightarrow\; a=b \quad \text{o} \quad a,b \in [0,1)\,.$$

È chiaro che il sostegno dello spazio quoziente $X/\sim$ può identificarsi con l'insieme $(-\infty,0)\cup\{y\}\cup[1,+\infty)$, ove y rappresenta la classe d'equivalenza $[0,1)$ e ogni punto di $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ coincide con la propria classe d'equivalenza. Ora, se π è la proiezione canonica di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}/\sim$, la controimmagine $\pi^{-1}(y) = [0,1)$ non è né aperta né chiusa in $\mathbb{R}$ e, quindi, y non è né aperto né chiuso in $\mathbb{R}/\sim$. D'altra parte, $(0,1)$ e $[0,\frac{1}{2}]$ sono rispettivamente un aperto e un chiuso di X e risulta $\pi((0,1)) = \pi[0,\frac{1}{2}] = y$. Così π non è né aperta né chiusa. □

Ricordiamo che, data una funzione suriettiva $f : X \to Y$ fra due insiemi X e Y,

- un sottoinsieme S di X si dice ***saturo***, rispetto a f, se risulta $S = f^{-1}f(S)$, cioè se risulta unione di classi d'equivalenza rispetto alla relazione $\sim_f$;
- se $T \subseteq X$, il sottoinsieme saturo $f^{-1}f(T)$ ($\supseteq T$) si dice ***saturazione di T*** (rispetto a f).

Analogamente, se $\sim$ è una relazione d'equivalenza su X, un sottoinsieme S di X si dice saturo, rispetto a $\sim$, se è unione di classi di equivalenza, cioè se è saturo rispetto alla proiezione canonica π di X su $X/\sim$.

DEFINIZIONE 1.9.6. (Identificazioni) Una funzione continua e suriettiva tra due spazi topologici $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ prende il nome di ***identificazione*** se σ coincide con la topologia quoziente τ_f di X rispetto a f. □

PROPOSIZIONE 1.9.7. (Identificazioni e aperti saturi) *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un'identificazione e denotiamo con $\mathcal{A}_f$ l'insieme degli aperti saturi di X. Allora, per ogni aperto saturo A di X, l'immagine $f(A)$ è un aperto di Y e la funzione*

$$F : A \in \mathcal{A}_f \to f(A) \in \sigma$$

è biunivoca. In altre parole, gli aperti di Y sono tutti e soli le immagini in f degli aperti saturi di X. Equivalentemente, se $\sim$ è una relazione di equivalenza sui punti di (X, τ), gli aperti dello spazio quoziente $X/\sim$ sono tutte e sole le proiezioni degli aperti saturi di X.

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto saturo di X, risulta $A = f^{-1}(f(A))$ e dalla definizione di topologia quoziente segue che $f(A)$ è un aperto di Y. La funzione F è suriettiva perchè, per ogni aperto T di Y, risulta $f^{-1}(T) = f^{-1}(f(f^{-1}(T)))$, cioè $f^{-1}(T)$ è un aperto saturo di X tale che $F(f^{-1}(T)) = f(f^{-1}(T)) = T$. La funzione F è anche iniettiva perchè, se A, B sono aperti saturi di X tali che $F(A) = F(B)$, risulta $A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(F(A)) = f^{-1}(F(B)) = f^{-1}(f(B)) = B$. □

OSSERVAZIONE 1.9.8. Osserviamo che se X è uno spazio topologico e $X/\sim$ un suo quoziente, possono esistere aperti non saturi di X la cui immagine è un aperto di $X/\sim$, come mostra l'esempio che segue. In $X = [-1, 1]$ con la topologia naturale consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ che identifica i punti dell'intervallo $(-1, 1)$ simmetrici rispetto a 0, cioè

$$a, b \in X\,, \quad a \sim b \;\Leftrightarrow\; a = b \quad \text{o} \quad a = -b\,, \;\; se \;\; -1 < a, b < 1\,.$$

È chiaro che il sostegno dello spazio quoziente $X/\sim$ può identificarsi con l'insieme $\{-1\} \cup [0, 1]$, ove ogni punto $a \in (0, 1)$ rappresenta la classe d'equivalenza $\{-a, a\}$ e $-1, 0, 1$ sono le classi d'equivalenza rispettivamente di $-1, 0, 1$. Ora, l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ è un aperto non saturo di X e risulta $\pi((\frac{1}{2}, 1)) = (\frac{1}{2}, 1)$. D'altra parte, $\pi^{-1}(\pi((\frac{1}{2}, 1])) = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ è un aperto di X e, quindi, $\pi((\frac{1}{2}, 1))$ è un aperto di $X/\sim$. □

ESERCIZIO 1.9.9. (Identificazioni e chiusi saturi) Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un'identificazione e denotiamo con $\mathcal{C}(Y)$ e $\mathcal{C}_f$ rispettivamente l'insieme dei chiusi di Y e quello dei chiusi saturi di X. Provare che, per ogni chiuso saturo C di X, l'immagine $f(C)$ è un chiuso di Y e la funzione

$$F : C \in \mathcal{C}_f \to f(C) \in \mathcal{C}(Y)$$

è biunivoca. In altre parole, i chiusi Y sono tutte e sole le immagini in f dei chiusi saturi di X. Equivalentemente, se $\sim$ è una relazione di equivalenza sui punti di (X, τ), i chiusi dello spazio quoziente $X/\sim$ sono tutte e sole le proiezioni dei chiusi saturi di X. □

ESERCIZIO 1.9.10. (Identificazioni e omeomorfismi) Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici. Provare che f è un omeomorfismo se, e solo se, f è un'identificazione biunivoca e aperta (chiusa). □

ESEMPIO 1.9.11. (Contrazione a un punto di un sottospazio) Siano X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio e $\sim_Y$ la relazione d'equivalenza definita da

$$a, b \in X, \quad a \sim_Y b \Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a, b \in Y\,. \tag{1.26}$$

Lo spazio quoziente $X/{\sim_Y}$, che si denota con X/Y, prende il nome di ***contrazione ad un punto del sottospazio*** Y e il sostegno di tale spazio può identificarsi con l'unione di $X \setminus Y$ e di un punto y (corrispondente alla classe d'equivalenza Y). Se $\pi : X \to X/Y$ è la proiezione canonica di X sul quoziente, risulta $\pi(a) = a$, se $a \notin Y$, e $\pi(a) = y$, se $a \in Y$, per ogni $a \in X$. Ne segue che gli aperti (i chiusi) saturi di X sono tutti e soli quelli che risultano ad intersezione vuota con Y e quelli che contengono Y. Allora gli aperti (i chiusi) di $X/Y = X \cup \{y\}$ sono gli aperti (i chiusi) di X ad intersezione vuota con Y e gli insiemi del tipo $(A \setminus Y) \cup \{y\}$, con A aperto (chiuso) di X contenente Y. Da quanto appena osservato segue che, se Y è aperto (chiuso) in X, il punto $y \in X/Y$ è un aperto (chiuso) nella topologia quoziente. Per esempio, nel quoziente $\mathbb{R}/(0,1)$ il punto corrispondente alla proiezione di $(0,1)$ è aperto e nel quoziente $\mathbb{R}/[0,1]$ il punto corrispondente alla proiezione di $[0,1]$ è chiuso. □

ESERCIZIO 1.9.12. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva fra gli spazi topologici X, Y. Provare che:

- se l'immagine $f(A)$ di ogni aperto saturo A di X è un aperto di Y allora f è un'identificazione;
- se f è aperta (o chiusa) è un'identificazione. □

PROPOSIZIONE 1.9.13. (Universalità del quoziente) *Siano X, Y, T spazi topologici, $f : X \to Y$ un'identificazione e $g : Y \to T$ una funzione. Allora $g \circ f$ è continua se, e solo se, g è continua.*

DIMOSTRAZIONE. La composizione di due funzioni continue è continua e così, se g è continua, $g \circ f$ è continua. Ora, se assumiamo $g \circ f$ continua, anche g è continua perchè, per ogni aperto A di T,

$$(g \circ f)^{-1}(A) = (f^{-1} \circ g^{-1})(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

è un aperto di X e, quindi, $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y. □

PROPOSIZIONE 1.9.14. (Omeomorfismi di quozienti) *Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ un omeomorfismo e $\sim_X, \sim_Y$ relazioni d'equivalenza rispettivamente su X e Y. Allora, se vale la proprietà*

$$a, b \in X\,, \quad a \sim_X \;\Leftrightarrow\; f(a) \sim_Y f(b)$$

la funzione

$$F\ :\ [a] \in X/\sim_X \to\ [f(a)] \in Y/\sim_Y$$

è un omeomorfismo. □

DIMOSTRAZIONE. Siano π_X e π_Y le proiezioni canoniche di X e Y rispettivamente su $X/\sim_X$ e $Y/\sim_Y$. La funzione $\pi_Y \circ f$ è continua perchè composizione di due funzioni continue. Allora, per il teorema di universalità del quoziente, risultando $F \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$, la F **è continua**. Se $a, b \in X$, risulta

$$F([a]) = F([b]) \ \Leftrightarrow\ f(a) = f(b) \ \Leftrightarrow\ f(a) \sim_Y f(b) \ \Leftrightarrow\ a \sim_X b \Leftrightarrow [a] = [b]\,,$$

cioè F **è iniettiva**. Se $[y] \in Y$, esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ e $F([x]) = [f(x)] = [y]$, cioè F **è suriettiva**. La funzione $\pi_X \circ f^{-1}$ è continua perchè composizione di due funzioni continue. Allora, per il teorema di universalità del quoziente, risultando $F^{-1} \circ \pi_Y = \pi_X \circ f^{-1}$, **l'inversa F^{-1} di F è continua**. In conclusione, F è un omeomorfismo. □

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] \arrow[dr, "F\circ\pi_X"] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X/\sim_X \arrow[r, "F"'] & Y/\sim_Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \arrow[dl, "F^{-1}\circ\pi_Y"] \\
X/\sim_X & Y/\sim_Y \arrow[l, "F^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.14: Proposizione 1.9.14

Ricordando che la connessione e la compattezza si conservano per continuità e che la proiezione canonica di uno spazio topologico su un suo quoziente è continua, si ha subito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.9.15. *Un quoziente di uno spazio connesso è connesso. Un quoziente di uno spazio compatto è compatto.*

Ricordiamo che assegnati due insiemi X e Y, una relazione d'equivalenza $\sim$ su X e una funzione $f : X \to Y$, si dice che f ***passa al quoziente***, o che è ***compatibile con*** $\sim$, se è verificata la proprietà

$$a, b \in X\,, \quad a \sim b \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(b) \tag{1.27}$$

e, in questo caso, risulta ben definita la funzione (***associata a*** f)

$$F\ :\ [a] \in X/\sim \quad \longrightarrow \quad f(a) \in Y$$

cioè $f = F \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di X sul quoziente $X/\sim$.

PROPOSIZIONE 1.9.16. *Siano X, Y spazi topologici, $\sim$ una relazione d'equivalenza su X e $f : X \to Y$ una funzione compatibile con $\sim$. Allora f è continua se, e solo se, è continua la funzione $F : [a] \in X/\sim \to f(a) \in Y$ associata a f.*

DIMOSTRAZIONE. È un immediato corollario della proprietà di universalità del quoziente. □

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 1.15: Proposizione 1.9.16

ESEMPIO 1.9.17. ($(S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\})$ è omeomorfo a D^2) Siano $X = S^1 \times I$, $A = S^1 \times \{1\}$ e consideriamo la contrazione ad un punto di A **(*cfr.* Esempio 1.26)** con la relativa relazione d'equivalenza $\sim_A$ su X **(*cfr.* Esempio 1.26)**. La funzione suriettiva e continua **(*cfr.* Corollario 1.8.8)** $f : X \to D^2$ definita da

$$f(x, y, t) = ((1-t)x, (1-t)y) \ , \ \ (x, y) \in S^1 \ , \ t \in I$$

è compatibile con la relazione d'equivalenza su $\sim_A$ perchè iniettiva su $X \setminus A$ e $f(A) = (0, 0)$. Pertanto resta ben definita la funzione continua **(*cfr.* Proposizione 1.9.16)**

$$F : [(x, y, t)] \in X/Y \ \to \ f(x, y, t) \in D^2 \, ,$$

che, essendo *f* suriettiva, risulta biunivoca. Allora, dalla compattezza di X segue che *f* è un omeomorfismo **(*cfr.* Proposizione 1.7.15)**. □

1.9.1 Esempi

Ricordiamo che, posto

$I = [0, 1] =$ intervallo unitario chiuso di $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}^n =$ spazio euclideo $n-$dimensionale,

$S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| = 1\} =$ superficie sferica unitaria di dimensione $n-1$,

$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| \leq 1\} =$ sfera unitaria chiusa di dimensione n,

$B^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < 1\} =$ sfera unitaria aperta di dimensione n, con la topologia indotta da quella naturale di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, a seconda del caso, risulta:

$$\overline{B^n} = D^n\,, \quad \mathring{D}^n = B^n\,, \quad \partial B^n = \partial D^n = S^{n-1}\,.$$

ESEMPIO 1.9.18. **($I/\{0,1\}$ è omeomorfo a S^1)** Posto $X = I = [0,1]$ con la topologia naturale, $Y = \partial I = \{0,1\}$, consideriamo la contrazione ad un punto di Y con la relativa relazione d'equivalenza $\sim_Y$ su X **(***cfr.* **Esempio 1.26)** e la funzione continua **(***cfr.* **Corollario 1.8.8)**

$$f\,:\,t \in [0,1]\,\rightarrow\,(cos2\pi t, sen2\pi t) \in S^1.$$

Osserviamo che, risultando $f(0) = f(1)$, è ben definita la funzione

$$F\,:\,[a] \in X/Y\,\rightarrow\,f(a) \in S^1\,,$$

per la quale risulta $f = F \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di X su X/Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ X/Y \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

La funzione F è biunivoca, perché f è suriettiva, ed è continua per la proprietà di universalità del quoziente. Ora, X/Y è compatto, perché immagine continua mediante π dello spazio compatto X, e S^1 è T_2; quindi f è un omeomorfismo **(***cfr.* **Proposizione 1.7.15)** tra X/Y e S^1. Notiamo che allo stesso risultato si può arrivare anche provando che f è un'identificazione e usando la **Proposizione 1.9.3**. A tale scopo, essendo f continua e suriettiva, basta far vedere che gli aperti di S^1, cioè le unioni di archi aperti di S^1, sono tutti e soli le immagini in f degli aperti saturi di $[0,1]$. Gli aperti saturi di $[0,1]$ sono:
(a) le unioni di intervalli aperti contenuti in $(0,1)$,
(b) le unioni di intervalli aperti contenuti in $(0,1)$ unite ad un insieme del tipo $[0,t] \cup (1-t,1]$, $t > 0$, contenuto in $[0,1]$
e le immagini in f di questi insiemi sono tutti e soli gli archi aperti di S^1. Si ha così che f è un'identificazione.
È da osservare che la restrizione di f a $(0,1]$, pur essendo biunivoca, non è un omeomorfismo perchè, per esempio, $(\frac{1}{2},1]$ è aperto in X ma $f((\frac{1}{2},1])$ non è aperto in S^1. $\square$

ESEMPIO 1.9.19. **(D^n/S^{n-1} è omeomorfo a S^n)** Generalizzando il risultato dell'**Esempio 1.9.18**, si ha che in D^n la contrazione ad un punto della sua frontiera $\partial D^n = S^{n-1}$ è omeomorfa a S^n. Infatti, la funzione

$$f : \boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots t_n) \in D^n \rightarrow f(\boldsymbol{t}) \in S^{n-1}$$

definita da

$$f(\boldsymbol{t}) = \left(2t_1\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n} t_j^2}\,, 2t_1\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n} t_j^2}\,, \ldots\,, 2t_n\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n} t_j^2}\,,\ 2\sum_{j=1}^{n} t_j^2 - 1\right)$$

assume lo stesso valore sui punti di S^{n-1} e si può provare che è un'identificazione. In particolare, se in un cerchio chiuso del piano si contrae ad un punto la circonferenza che lo delimita, si ottiene uno spazio omeomorfo alla superficie sferica S^2 in $\mathbb{R}^3$ (per una dimostrazione si veda [8], pag. 76). □

ESEMPIO 1.9.20. (Il cilindro) In $\mathbb{R}^2$ il quadrato $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, y \leq 1\}$ può identificarsi con il prodotto $I \times I$. Definiamo *cilindro* (*topologico*) un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al cilindro circolare retto di $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ 0 \leq t \leq 1\} = S^1 \times I \ .$$

È possibile provare che la funzione

$$f \ : \ (x, y) \in I \times I \ \rightarrow \ (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y) \in S^1 \times I$$

è un'identificazi li conseguenza, il quoziente $(I \times I)/f$ è omeomorfo al ci

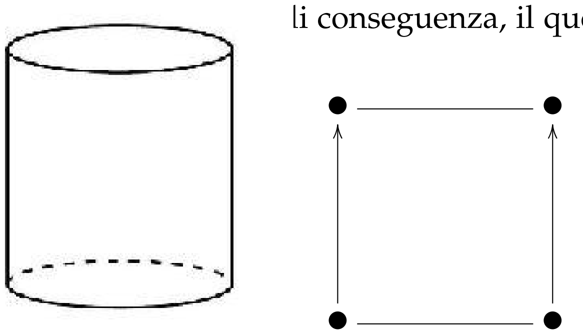


Figura 1.16: Il cilindro

Da notare che nella relazione d'equivalenza $\sim_f$ sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, y)$ viene identificato col punto $(1, y)$, per ogni $y \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso. □

ESEMPIO 1.9.21. (Il nastro di Möbius) Si chiama *nastro di Möbius* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al sottospazio $\mathcal{M}$ di $\mathbb{R}^3$ i cui punti

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

con $0 \leq s, t \leq 1$, sono definiti da

$$x(s, t) = \cos 2\pi s + (t - \tfrac{1}{2}) \sin \pi s \cos 2\pi s,$$

$$y(s,t) = \sin 2\pi s + (t - \tfrac{1}{2}) \sin \pi s \sin 2\pi s,$$
$$z(s,t) = (t - \tfrac{1}{2}) \cos \pi s \ .$$

È da osservare che $\mathcal{M}$ risulta una superficie algebrica del terzo ordine con equazione

$$y - x^2 y - y^3 + 2xz + 2x^2 z + 2y^2 z - yz^2 = 0\,.$$

Analogamente a quanto osservato nell'**Esercizio 1.9.20** è possibile provare che la funzione

$$f \ : \ (s,t) \in I \times I \ \to \ P(s,t) \in \mathcal{M}$$

è un'identificazi quoziente $(I \times I)/f$ è omeomorfo ad un nastro di Möbiu

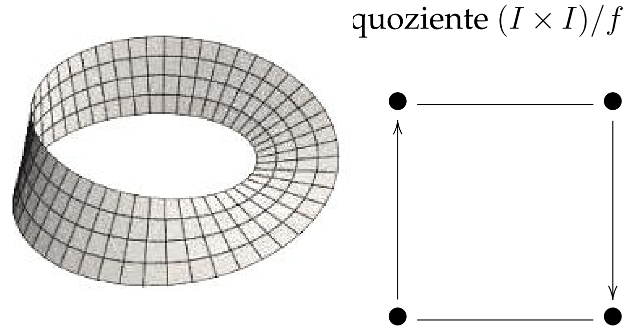


Figura 1.17: Il nastro di Möbius

Da notare che nella relazione d'equivalenza $\sim_f$ sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0,t)$ viene identificato col punto $(1, 1-t)$, per ogni $t \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso. È possibile provare che il nastro di Möbius non si può immergere in $\mathbb{R}^2$ senza autointersezioni. $\square$

ESEMPIO 1.9.22. (Il toro) Si chiama *toro* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al sottospazio $\mathbf{T}$ di $\mathbb{R}^3$ i cui punti

$$P(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)),$$

con $0 \le s, t \le 1$, sono definiti dalle equazioni parametriche

$$x(s,t) = (2 + \cos 2\pi s) \cos 2\pi t\,,$$
$$y(s,t) = (2 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi t\,,$$
$$z(s,t) = \sin 2\pi s\,.$$

È da osservare che $\mathbf{T}$ ha equazione cartesiana

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^3 - 1 = 0\,.$$

Inoltre, ricordando che $S^1 = \{(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le \varphi \le 1\}$, si ha che la funzione

$$((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, 2\pi \sin t)) \in S^1 \times S^1 \ \to \ P(s,t) \in \mathbf{T}$$

è un *omeomorfismo tra il prodotto* $S^1 \times S^1$ *di due circonferenze e il toro* $\mathbf{T}$.

Analogamente a quanto osservato nell'**Esercizio 1.9.20** è possibile provare che la funzione

$$f \,:\, (s,t) \in I \times I \;\to\; P(s,t) \in \mathbf{T}$$

è un'identificazione e, di conseguenza, *il quoziente* $(I \times I)/f$ *è omeomorfo ad un nastro di Möbius.* Da notare che nella relazione d'equivalenza $\sim_f$ sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0,t)$ viene identificato col punto $(1,t)$, il punto $(s,0)$ col punto $(s,1)$, per ogni $s,t \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso.

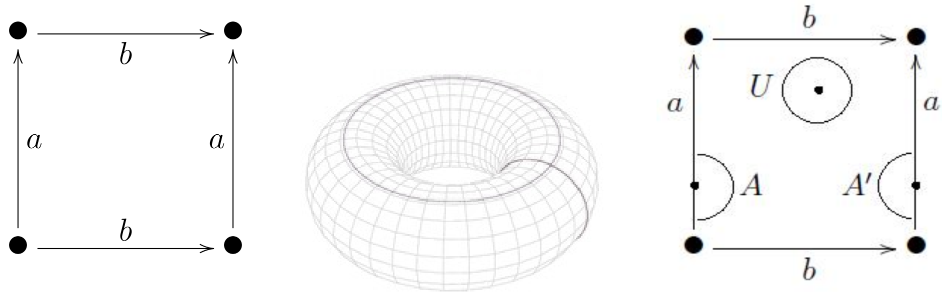


Figura 1.18: Il toro

Notiamo che se $\boldsymbol{a} = \pi(\boldsymbol{a})$ è il punto del toro proiezione di un punto $\boldsymbol{a}$ interno a $I \times I$ e $U = B_\epsilon(\boldsymbol{a})$ un intorno circolare aperto di $\boldsymbol{a}$ contenuto nell'interno di $I \times I$, allora U è un aperto saturo, così $\pi(U) = U$ è un aperto del toro contenente $\boldsymbol{a}$. Se, invece, $\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'\} = \pi(\boldsymbol{a}) = \pi(\boldsymbol{a}')$ è il punto del toro proiezione dei punti $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ sulla frontiera di $I \times I$, esiste un $\epsilon > 0$ tale che $A = B_\epsilon(\boldsymbol{a}) \cap (I \times I)$ e $A' = B_\epsilon(\boldsymbol{a}') \cap (I \times I)$ siano due semicerchi aperti contenuti in $I \times I$ e $V = A \cup A'$ è un aperto saturo di $I \times I$. Allora la proiezione $\pi(V)$ è un aperto del toro contenente $\boldsymbol{x}$ ed è facile rendersi conto che è omeomorfo ad un intorno circolare aperto di $\mathbb{R}^2$ **(***cfr.* **Figura 1.18)**. In ogni caso, quindi, *un punto del toro appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di* $\mathbb{R}^2$. $\square$

ESEMPIO 1.9.23. (La bottiglia di Klein) Sul quadrato $I \times I$ si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ che sulla frontiera di $I \times I$ identifica il punto $(0,y)$ col punto $(1,y)$, il punto $(x,0)$ col punto $(1-x,1)$, per ogni $x,y \in I$, e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a $I \times I$. Lo spazio quoziente $(I \times I)/\sim$ prende il nome di *bottiglia di Klein.* Con ragionamento analogo a quello fatto per il toro si vede che *un punto qualsiasi della bottiglia di Klein appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di* $\mathbb{R}^2$. È possibile provare che la bottiglia di Klein non si può immergere in $\mathbb{R}^3$ senza autointersezioni: nella **Figura 1.19** è mostrata una sua rappresentazione in $\mathbb{R}^3$. $\square$

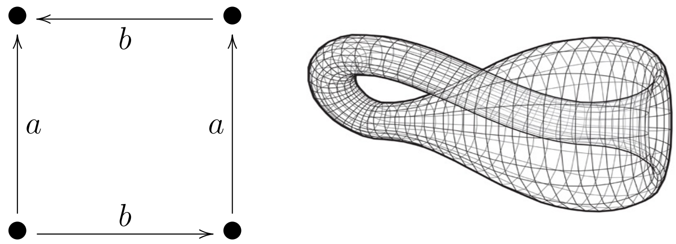


Figura 1.19: La bottiglia di Klein

ESEMPIO 1.9.24. (Il piano proiettivo (reale)) Sulla superficie sferica S^2 si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ che identifica le coppie di punti diametralmente opposti. Lo spazio quoziente $I \times I/\sim$ prende il nome di *piano proiettivo* (reale). Con ragionamento analogo a quello fatto per il toro si vede che *un punto qualsiasi del piano proiettivo appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di* $\mathbb{R}^2$. È possibile provare che il piano proiettivo non si può immergere in $\mathbb{R}^3$ senza autointersezioni: nella **Figura 1.20** è mostrata una sua rappresentazione in $\mathbb{R}^3$. □

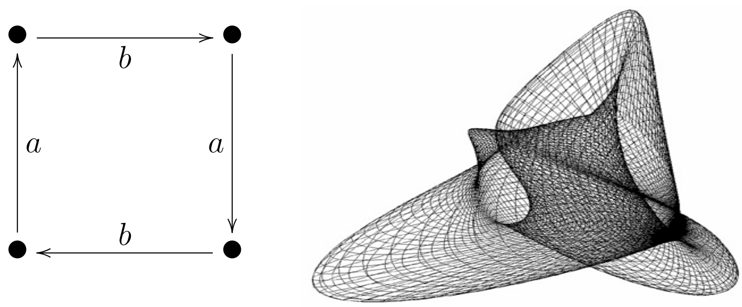


Figura 1.20: Il piano proiettivo reale

1.9.2 Superfici topologiche

La *superficie sferica* S^2, con la topologia indotta da quella naturale di $\mathbb{R}^2$, non è omeomorfa a $\mathbb{R}^2$: S^2 è uno spazio compatto a differenza di $\mathbb{R}^2$. Nonostante ciò S^2 si può ricoprire con aperti ciascuno dei quali è omeomorfo $\mathbb{R}^2$: basta prendere, per esempio, i complementari di due suoi punti distinti. La stessa proprietà è verificata anche dal *toro,* dalla *bottiglia di Klein* e dal *piano proiettivo reale,* come già osservato negli **Esempi 1.9.22, 1.9.23, 1.9.24**. In modo del tutto informale possiamo dire che se ci limitiamo ad osservare questi spazi nelle vicinanze di un punto li percepiamo *"piatti"* e *"somiglianti"* al piano euclideo, mentre, visti nella loro globalità, possono avere le forme le più svariate. Gli spazi topologici, che come gli esempi precedenti hanno la proprietà di essere "*localmente*" omeomorfi a $\mathbb{R}^2$, prendono il nome di *superfici topologiche.*

DEFINIZIONE 1.9.25. Uno spazio topologico Σ si dice ***superficie topologica*** se è connesso, di Hausdorff, a base numerabile e tale che, per ogni punto $a \in \Sigma$, esiste un intorno aperto di a omeomorfo ad un cerchio aperto di $\mathbb{R}^2$ (e quindi a $\mathbb{R}^2$).

ESERCIZIO 1.9.26. Provare che ogni punto di una superficie topologica appartiene ad un intorno chiuso omeomorfo a D^2 (cerchio chiuso di $\mathbb{R}^2$). □

ESEMPI 1.9.27. $\mathbb{R}^2$ e tutti i suoi *sottospazi aperti* sono chiaramente esempi di superfici topologiche. I sottospazi non aperti di $\mathbb{R}^2$ non sono superfici topologiche. Altri esempi di superfici topologiche sono: la *superficie sferica* S^2*,* il *toro*, la *bottiglia di Klein*, il *piano proiettivo reale* **(***cfr.* **Esempi 1.9.22, 1.9.23, 1.9.24)**. □

ESEMPIO 1.9.28. (Quozienti di poligoni etichettati) In $\mathbb{R}^2$ consideriamo un poligono regolare P_{2n} con $2n$ lati ($n > 1$) e, fissato un verso di percorrenza ω^+ della frontiera ∂P_{2n}, ordiniamo linearmente i suoi lati $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n}$ in modo coerente col verso di percorrenza ω^+. Osserviamo esplicitamente che P_{2n} è un sottospazio connesso e compatto di $\mathbb{R}^2$. Un lato di P_{2n} su cui si sia fissato un orientamento si chiama *lato orientato.* Una funzione che ad ogni lato di P_{2n} associa uno dei suoi due orientamenti si chiama *orientazione dei lati di* P_{2n} e la coppia formata da P_{2n} e una sua orientazione dei lati si dice ***poligono a lati orientati***.
Consideriamo ora le parole su n lettere $a_1, a_2, \dots, a_n$ ad esponenti ± 1 del tipo

$$a_{j_1}^{\pm 1} a_{j_2}^{\pm 1} \cdots a_{j_{2n}}^{\pm 1}\,, \tag{1.28}$$

dove ogni lettera a_j compare esattamente due volte. Ogni parola di questo tipo si chiama ***etichettatura*** di P_{2n} e determina l'orientazione dei lati di P_{2n} che assegna a ciascun lato ℓ_j l'orientamento concorde o discorde con ω^+ a seconda che l'esponente di a_j sia $+1$ o -1. La coppia formata da P_{2n} e una sua etichettatura si dice ***poligono etichettato***.
A questo punto, fissata un'etichettatura di P_{2n}, ad ogni lato ℓ è associata la stessa lettera di un solo altro lato ℓ' ed esiste un unico omeomorfismo lineare $\varphi_{\ell,\ell'}$ tra questi due lati che rispetta le orientazioni ad essi associate dall'etichettatura **(***cfr.* **Osservazione 1.5.19)**. Possiamo allora considerare in P_{2n} la relazione d'equivalenza $\sim$ che su ∂P_{2n} identifica le coppie di punti corrispondenti in un omeomorfismo del tipo $\varphi_{\ell,\ell'}$ e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a P_{2n}. Lo spazio quoziente $P_{2n}/\sim$ di P_{2n} rispetto alla relazione d'equivalenza determinata da un'etichettatura di P_{2n} è connesso e compatto, perchè tale è P_{2n}. Esso, inoltre, è una *superficie topologica,* come subito si prova con considerazioni analoghe a quelle fatte per il toro nella parte finale dell'**Esempio 1.9.22**. □

OSSERVAZIONE 1.9.29. Fissato un verso di percorrenza ω^+ della frontiera ∂P_{2n} di un poligono regolare P_{2n} a lati orientati, un'etichettatura corrispondente ad uno spazio quoziente ottenuto da P_{2n} identificando a coppie i suoi lati, si ottiene nel seguente modo:

1. si sceglie arbitrariamente un vertice e si assegna una stessa lettera ai lati che devono identificarsi;
2. partendo dal vertice scelto e seguendo il verso di percorrenza ω^+, si etichettano i lati, nell'ordine in cui si incontrano,
   - con la lettera assegnata se l'orientazione indicata su di essi è concorde con ω^+,
   - con la lettera assegnata ad esponente -1 se l'orientazione indicata su di essi è non concorde con ω^+. □

ESEMPIO 1.9.30. (Quozienti di quadrati etichettati) Con riferimento a due lettere a,b e al verso di percorrenza orario dei lati di un quadrato, le etichettature

$$aba^{-1}b^{-1}\ ,\ ab^{-1}a^{-1}b^{-1}\ ,\ abab$$

determinano rispettivamente il *toro*, la *bottiglia di Klein* e il *piano proiettivo reale*. Da notare che etichettature distinte di un medesimo poligono possono dar luogo ad una stessa superficie; per esempio, $abab$ e $a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$ sono etichettature diverse del quadrato che danno luogo al piano proiettivo. □

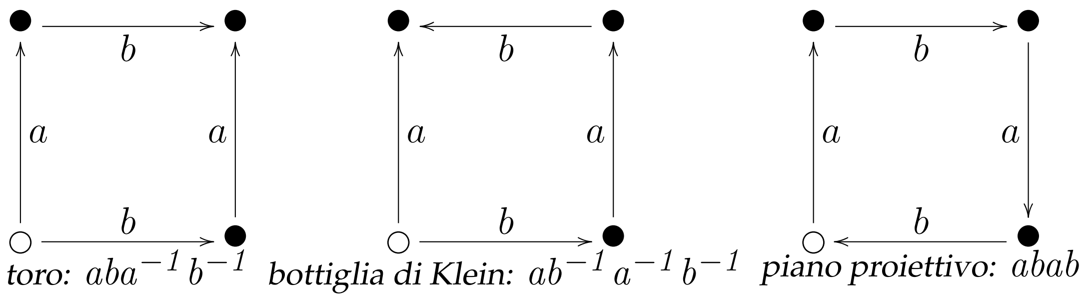


Figura 1.21: Quozienti di quadrati etichettati

Nel seguito, col termine *"superficie"* intenderemo sempre *"superficie topologica"*.

Per i quozienti dei poligoni etichettati vale il seguente fondamentale risultato (per una dimostrazione si veda [9]).

PROPOSIZIONE 1.9.31. *Ogni superficie compatta è omeomorfa al quoziente di un opportuno poligono etichettato.*

DEFINIZIONE 1.9.32. (Somma connessa) Siano Σ_1, Σ_2 due superfici compatte, U_1, U_2 due aperti omeomorfi a B^2 (cerchio aperto in $\mathbb{R}^2$) rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 e

$$h : \partial U_1 \to \partial U_2$$

un omeomorfismo tra le frontiere di U_1 e U_2, che non è restrittivo supporre omeomorfe alla circonferenza S^1 (*cfr.* **Esercizio 1.9.26**). Consideriamo lo spazio somma (*cfr.* **Esempio 1.3.11**)

$$X = (\Sigma_1 \setminus U_1) \sqcup (\Sigma_2 \setminus U_2)$$

e la relazione d'equivalenza $\sim$ su X che identifica le coppie di punti in $\partial U_1 \cup \partial U_2$ che si corrispondono in h e lascia equivalente solo a se stesso ogni altro punto. Lo spazio quoziente $X/\sim$, come subito si prova, risulta una superficie compatta che si dice ***somma connessa*** di Σ_1 e Σ_2 e si denota con $\Sigma_1 \# \Sigma_2$. □

Se $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono superfici, è possibile provare che:

- la somma connessa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$, a meno di omeomorfismi, non dipende dagli aperti U_1,U_2 scelti rispettivamente in Σ_1 e Σ_2;
- la somma connessa di Σ_1 e di una superficie sferica S^2 è omeomorfa a Σ_1;
- $\Sigma_1 \# \Sigma_2 \simeq \Sigma_2 \# \Sigma_1$;
- $(\Sigma_1 \# \Sigma_2) \# \Sigma_3 \simeq \Sigma_1 \# (\Sigma_2 \# \Sigma_3)$.

Dall'ultima relazione segue che è ben definita ***la somma connessa***

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \cdots \# \Sigma_k$$

di k ***superfici*** $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$.

Nel seguito, denotiamo con $\mathbf{T}_0$ la superficie sferica S^2, con $\mathbf{T}_1$ il toro e con $\mathbf{T}_g$ la somma connessa di g tori, per ogni intero $g > 1$. La superficie $\mathbf{T}_g$ prende il nome di g***-toro*** e una superficie compatta omeomorfa a $\mathbf{T}_g$ si dice di ***genere*** g. In modo non formale, possiamo dire che il genere conta il numero di "*buchi*" di una superficie. La superficie sferica S^2 e il toro sono, dunque, superfici di genere 0 e 1, rispettivamente. Denotiamo, inoltre, con $\mathbf{U}_1$ il piano proiettivo (reale) e con $\mathbf{U}_g$ la somma connessa di g piani proiettivi, per ogni intero $g > 1$. La superficie $\mathbf{U}_g$ prende il nome di g***-piano proiettivo***.

Riportiamo di seguito alcune proprietà delle somme connesse di superfici del tipo $\mathbf{T}_g$ e $\mathbf{U}_h$ (per una dimostrazione si veda [4], par.1.2):

1. La bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma connessa $\mathbf{U}_2$ di due piani proiettivi.
2. La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi:

$$\mathbf{T}_1 \# \mathbf{U}_1 \simeq \mathbf{U}_3.$$

3. La somma connessa di un $g-$toro e di un $h-$piano proiettivo è omeomorfa ad un $(2g+h)-$piano proiettivo:
$$\mathbf{T}_g \# \mathbf{U}_h \simeq \mathbf{U}_{2g+h}.$$

Conludiamo questo paragrafo con un teorema di classificazione delle superfici compatte (per una dimostrazione si veda [9]).

PROPOSIZIONE 1.9.33. (Classificazione delle superfici compatte) *Sia Σ una superficie compatta, allora:*

- *se Σ non contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius* (superficie orientabile), *è omeomorfa ad una sfera o ad un $g-$toro, $g > 0$;*
- *se Σ contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius* (superficie non orientabile), *è omeomorfa ad un piano proiettivo* (*reale*) *o ad un $g-$piano proiettivo, $g > 1$.*

Inoltre, per $g \neq g'$, un $g-$toro non è omeomorfo a un $g'-$toro e un $g-$piano proiettivo non è omeomorfo ad un $g'-$piano proiettivo. □

.

Capitolo 2

Elementi di Topologia Algebrica

" The mathematician does not study pure mathematics because it is useful; he studies it because he delights in it and he delights in it because it is beautiful "

Jules Henri Poincaré

2.1 Notazioni

Nel seguito, a meno di avviso contrario, le lettere latine maiuscole non esplicitamente definite denoteranno sempre degli spazi topologici e verrà utilizzato il termine ***mappa*** in luogo di funzione continua. Così, per esempio, la frase *"f è una mappa tra X e Y"* significa *"f è una funzione continua tra lo spazio topologico X e lo spazio topologico Y"*. Continueremo, inoltre, inoltre, le seguenti notazioni standard:

$I = [0,1] =$ intervallo unitario chiuso di $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n =$ spazio euclideo $n-$dimensionale.

$S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| = 1\} =$ superficie sferica unitaria di dimensione $n-1$.

$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| \leq 1\} =$ sfera unitaria chiusa di dimensione n.

$B^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < 1\} =$ sfera unitaria aperta di dimensione n.

I, S^{n-1}, D^n, B^n si supporranno sempre dotati della topologia indotta da quella naturale di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, a seconda del caso.

2.2 Categorie e funtori

La teoria delle categorie, fondata nel 1945 dai matematici **Samuel Eilemberg** e **Saunders MacLane**, è utilizzata come linguaggio unificante per descrivere in modo semplice, ma preciso e formale, molti risultati, situazioni e costruzioni generali che si incontrano in diversi rami della matematica e che, in qualche modo, si prestano a essere trasportati da una teoria ad un'altra. In queste note, per esempio, vedremo come ad uno spazio topologico X e ad un suo punto p è possibile associare un gruppo, il ***gruppo fondamentale*** di X rispetto a p, in modo tale che alcune proprietà topologiche importanti della coppia (X, p) possano leggersi, a volte in modo più semplice, studiando il gruppo associato.
Il linguaggio delle categorie è nato, ed è molto utile, nell'ambito della topologia algebrica, teoria della quale esporremo alcuni argomenti introduttivi. È questo il motivo per cui premetteremo i concetti di categoria e di funtore, anche se essi non sono strettamente necessari per gli argomenti che tratteremo; la loro utilizzazione in qualche punto di queste note vuole avere soltanto una valenza didattica.

DEFINIZIONE 2.2.1. (Categorie) Una ***categoria*** $\mathcal{C}$ è una coppia

$$\big(Obj(\mathcal{C}), \{Hom_{\mathcal{C}}(A, B)\}_{A,B\in Obj(\mathcal{C})}\big)\,,$$

ove

(a) $Obj(\mathcal{C})$ è una classe di oggetti, detti ***oggetti*** di $\mathcal{C}$;

(b) per ogni coppia (A, B) di oggetti di $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ è un insieme, i cui elementi sono detti ***morfismi*** di A in B;

(c) per ogni terna (A, B, C) di oggetti di $\mathcal{C}$, esiste un'applicazione, detta ***composizione di morfismi***,

$$\circ : (g, f) \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C);$$

in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

(i) se A, B, C, D sono oggetti di $\mathcal{C}$ e se

$$f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B),\ g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C),\ h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D),$$

risulta

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, D);$$

(ii) per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$, esiste un elemento $i_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, detto ***morfifmo identico***, tale che, per ogni oggetto B di $\mathcal{C}$ e per ogni $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ si ha

$$f \circ i_A = f\,,\ \ i_A \circ g = g\,.$$

(iii) se A, B, C, D sono oggetti di $\mathcal{C}$, risulta

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C,D) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ A = C\,, \ B = D.$$

Quando non vi è luogo ad equivoci, scriviamo $Hom(A,B)$ invece di $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. □

OSSERVAZIONE 2.2.2. (Unicità del morfismo identico) Assegnata una categoria $\mathcal{C}$, ogni oggetto $A \in Obj(\mathcal{C})$ contiene un unico morfismo identico. Detti, infatti, i_A e i'_A due morfismi identici di A, risulta $i_A = i_A \circ i'_A = i'_A$. □

OSSERVAZIONE 2.2.3. Assegnata una categoria $\mathcal{C}$, per ogni oggetto $A \in Obj(\mathcal{C})$, la composizione di morfismi

$$\circ : (g,f) \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,A) \to g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A);$$

è un'operazione associativa e unitaria in $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$. □

Per evitare di esporre concetti che non utilizzeremo, nel seguito ci limiteremo a considerare categorie i cui oggetti sono insiemi, magari dotati di uno stesso tipo di struttura algebrica o geometrica, e i cui morfismi sono applicazioni. Queste prendono il nome di **categorie di insiemi** e vedremo che per esse gli assiomi di categoria possono semplificarsi notevolmente. Prima di fare ciò, per completezza, diamo due esempi di categorie che non sono categorie di insiemi.

ESEMPIO 2.2.4. Siano $\mathbb{F}$ un campo, $\mathbb{F}^{m,n}$ l'insieme delle matrici quadrate di tipo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{F}$, $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri naturali positivi e, posto $Obj(\mathcal{C}) = \mathbb{N}^+$, si ponga

$$Hom_{\mathcal{C}}(n,m) = \mathbb{F}^{n,m},$$

per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$. Allora è facile verificare che $\mathcal{C} = (\mathbb{N}^+, \{Hom_{\mathcal{C}}(n,m)\}_{n,m\in\mathbb{N}^+})$ è una categoria qualora si definisca la composizione dei morfismi come il prodotto di matrici righe per colonne. Qui l'identità in $Hom_{\mathcal{C}}(n,n)$, $n \in \mathbb{N}^+$, è chiaramente la matrice unitaria d'ordine n. Evidentemente i morfismi di questa categoria non sono applicazioni. □

ESEMPIO 2.2.5. (Categoria associata ad un insieme parzialmente ordinato) Siano P un insieme non vuoto e $\leq$ una relazione d'ordine parziale su P. Per ogni $x, y \in X$ con $x \leq y$, si consideri un simbolo j^x_y e si ponga $j^y_t \circ j^x_y = j^x_t$, per ogni $x, y, t \in X$ tali che $x \leq y \leq t$. Allora, posto

$$Hom_{\mathcal{C}_X}(x,y) = \begin{cases} \{j^x_y\} & \text{se } x \leq y \\ \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}, \text{ per ogni } x, y \in X,$$

è facile verificare che $\mathcal{C}_X = (X, \{Hom_{\mathcal{C}_X}(x,y)\}_{x,y\in X})$ è una categoria. Anche in questa categoria, come nell'esempio precedente, i morfismi non sono applicazioni. □

DEFINIZIONE 2.2.6. (Categorie di insiemi) Una ***categoria di insiemi*** $\mathcal{C}$ è una coppia

$$\big(Obj(\mathcal{C}), \{Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\}_{A,B\in Obj(\mathcal{C})}\big)\ ,$$

ove

- $Obj(\mathcal{C})$ è una classe di insiemi, detti ***oggetti*** di $\mathcal{C}$,
- per ogni coppia (A,B) di oggetti di $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ è ***un insieme di funzioni di*** A ***in*** B, detti ***morfismi*** di A in B,

in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

- per ogni oggetto A, $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ contiene la funzione identità i_A di A,
- se A,B,C sono oggetti, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$, allora la funzione composta $g\circ f$ appartiene a $Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$.

Quando non vi è luogo ad equivoci, scriviamo $Hom(A,B)$ invece di $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

□

ESEMPI 2.2.7. Di seguito si riportano alcuni esempi di categorie.

1. La ***Categoria*** $\mathcal{S}$ ***degli insiemi***:
   - $Obj(\mathcal{S})$ è la classe di tutti gli insiemi;
   - $Hom_{\mathcal{S}}(A,B)$ è l'insieme delle funzioni di A in B, per ogni $A,B\in\mathcal{S}$.
2. La ***Categoria*** $\mathcal{T}$ ***degli spazi topologici***:
   - $Obj(\mathcal{T})$ è la classe di tutti gli spazi topologici;
   - $Hom_{\mathcal{T}}(A,B)$ è l'insieme delle funzioni continue di A in B, per ogni $A,B\in\mathcal{T}$.
3. La ***Categoria*** $\mathcal{PT}$ ***degli spazi topologici puntati***:
   - $Obj(\mathcal{PT})$ è la classe di tutti gli spazi topologici puntati, ove per spazio topologico puntato si intende una coppia (A,a) formata da uno spazio topologico A e da un suo punto a;
   - $Hom_{\mathcal{PT}}((A,a),(B,b))$ è l'insieme delle funzioni continue f di A in B tali che $f(a)=b$, per ogni $(A,a),(B,b)\in\mathcal{PT}$.
4. La ***Categoria*** $\mathcal{G}$ ***dei gruppi***:
   - $Obj(\mathcal{G})$ è la classe di tutti i gruppi;
   - $Hom_{\mathcal{G}}(A,B)$ è l'insieme degli omomorfismi di gruppo di A in B, per ogni $A,B\in\mathcal{G}$.

5. La ***Categoria $\mathcal{A}$ dei gruppi abeliani***:
   - $Obj(\mathcal{A})$ è la classe di tutti i gruppi abeliani;
   - $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di gruppo di A in B, per ogni $A, B \in \mathcal{A}$.
6. La ***Categoria $\mathcal{R}$ degli anelli***:
   - $Obj(\mathcal{R})$ è la classe di tutti gli anelli;
   - $Hom_{\mathcal{R}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di anello di A in B, per ogni $A, B \in \mathcal{R}$.
7. La ***Categoria $\mathcal{F}$ dei campi***:
   - $Obj(\mathcal{F})$ è la classe di tutti i campi;
   - $Hom_{\mathcal{F}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di campo di A in B, per ogni $A, B \in \mathcal{F}$.
8. La ***Categoria $\mathcal{V}$ degli spazi vettoriali su un campo*** [1]:
   - $Obj(\mathcal{V})$ è la classe di tutti gli spazi vettoriali sopra un campo;
   - $Hom_{\mathcal{V}}(A, B)$ è l'insieme delle funzioni lineari di A in B, per ogni $A, B \in \mathcal{V}$ [2].
9. La ***Categoria $\mathcal{V}_K$ degli spazi vettoriali su un campo K***:
   - $Obj(\mathcal{V}_K)$ è la classe di tutti gli spazi vettoriali su un campo K;
   - $Hom_{\mathcal{V}_K}(A, B)$ è l'insieme delle funzioni lineari di A in B, per ogni $A, B \in \mathcal{V}_K$. □

DEFINIZIONE 2.2.8. (Sottocategorie) Una categoria $\mathcal{D}$ si dice ***sottocategoria*** di una categoria $\mathcal{C}$, e si scrive $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, se ogni oggetto di $\mathcal{D}$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e vale la seguente proprietà

$$Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B)\,, \text{ per ogni } A, B \in \mathcal{D} \tag{2.1}$$

Se nella **(2.1)** vale sempre l'uguagianza, allora $\mathcal{D}$ si dice ***sottocategoria completa***, o ***piena***, di $\mathcal{C}$. □

[1] Qui il campo non è fissato. Ciò significa che due oggetti della categoria possono essere spazi vettoriali su campi diversi.

[2] Si osservi che, se A e B sono spazi vettoriali su campi diversi, risulta $Hom_{\mathcal{V}}(A, B) = \emptyset$.

ESEMPIO 2.2.9. Gli esempi di categorie da **2.2.7-2** a **2.2.7-9** sono sottocategorie (non complete) della categoria degli insiemi $\mathcal{S}$. La categoria dei gruppi abeliani $\mathcal{A}$ è sottocategoria completa della categoria dei gruppi $\mathcal{G}$. La categoria dei campi $\mathcal{F}$ è sottocategoria completa della categoria degli anelli $\mathcal{R}$. La categoria $\mathcal{V}_K$ degli spazi vettoriali su un campo K è sottocategoria completa della categoria degli spazi vettoriali $\mathcal{V}$. □

DEFINIZIONE 2.2.10. Siano A, B due oggetti di una categoria $\mathcal{C}$ ed f un morfismo di A in B. Si dice che f è un'***equivalenza*** di A in B se esiste un morfismo g di B in A tale che

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B \,. \tag{2.2}$$

Ovviamente, in queste ipotesi, g è un'equivalenza di B in A, che si dice ***inversa*** di f. Due oggetti di $\mathcal{C}$ si dicono ***equivalenti*** se esiste un'equivalenza tra essi. □

ESEMPIO 2.2.11. Nella categoria degli insiemi, un'equivalenza tra due oggetti A, B è una funzione biunivoca tra A e B. □

ESERCIZIO 2.2.12. *Trovare le equivalenze negli esempi di categorie da **2.2.7-2** a **2.2.7-9**.*

DEFINIZIONE 2.2.13. **(Funtori)** Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie e

$$F : A \in Obj(\mathcal{C}) \to F(A) \in Obj(\mathcal{D})$$

una funzione tra gli oggetti di $\mathcal{C}$ e quelli $\mathcal{D}$. Si dice che F è un ***funtore covariante di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$***, e si scrive $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se, per ogni due oggetti A, B di $\mathcal{C}$, ad ogni morfismo $f : A \to B$ resta associato un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

- $F(id_A) = id_{F(A)}$, per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, per ogni due morfismi $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$.

Il morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$, se non vi è luogo ad equivoci, si denota più semplicemente con f_*. □

OSSERVAZIONE 2.2.14. È possibile definire anche un ***funtore controvariante*** imponendo che ad ogni morfismo $f : A \to B$ sia associato un morfismo $F(f) : F(B) \to F(A)$ in modo tale che si abbia $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$. □

ESEMPIO 2.2.15. La funzione F che ad ogni spazio topologico associa l'insieme dei suoi punti, ponendo $F(f) = f$ per ogni funzione continua $f : A \to B$ tra due spazi A, B, risulta un funtore covariante (***funtore distratto***) della categoria degli spazi topologici $\mathcal{T}$ in quella $\mathcal{S}$ degli insiemi. È chiaro che si può definire un "funtore distratto" per ciascuno degli **Esempi 2.2.7**. □

ESEMPIO 2.2.16. Fissato un campo K e un insieme A, denotiamo con $K[A]$ lo spazio vettoriale su K costruito considerando A come base (***spazio vettoriale libero su*** A). Fissati due insiemi A, B, ogni funzione $f : A \to B$ si estende ad una funzione lineare $\tilde{f}$ tra $K[A]$ e $K[B]$. La funzione F che ad ogni insieme A associa lo spazio vettoriale $K[A]$, ponendo $F(f) = \tilde{f}$ per ogni funzione $f : A \to B$, risulta un funtore covariante della categoria degli insiemi $\mathcal{S}$ in quella $\mathcal{V}_K$ degli spazi vettoriali su K. □

ESERCIZIO 2.2.17. *Siano* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *due categorie,* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *un'equivalenza tra due oggetti* A, B *di* $\mathcal{C}$ *e* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un funtore. Provare che* $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ *è un'equivalenza di* $F(A)$ *in* $F(B)$.

Pur non avendo la possibilità di trattarle in questa sede, avvertiamo che molte situazioni e definizioni della teoria degli insiemi che possono considerarsi attraverso "*proprietà di universalità*" si generalizzano alla teoria delle categorie. Giusto per dare un esempio, vediamo come si generalizza la nozione di prodotto cartesiano di due insiemi.

DEFINIZIONE 2.2.18. Siano $\mathcal{C}$ una categoria, X_1, X_2 due suoi oggetti e supponiamo che esista un oggetto X con la seguente proprietà:

> esistono un morfismo $p_1 : X \to X_1$ e uno $p_2 : X \to X_2$ tali che, per ogni oggetto $T \in \mathcal{C}$ e per ogni due morfismi $f : T \to X_1$, $g : T \to X_2$, esiste un unico morfismo $h : T \to X$ che rende commutativo il diagramma
>
> $$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & X_1 \\ X_2 & X \arrow[l, "p_2"] \arrow[u, "p_1"'] \end{tikzcd}$$
>
> cioè tale che $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$.

Un oggetto X di $\mathcal{C}$ col la proprietà precedente, e un qualunque oggetto ad esso equivalente, prende il nome di ***prodotto*** di X_1 e X_2 e si denota con $X_1 \times X_2$. □

Osserviamo esplicitamente che la definizione di prodotto di due oggetti in una categoria non ne assicura l'esistenza. È immediato verificare che nella categoria degli insiemi la nozione di prodotto appena esposta coincide con quella di prodotto cartesiano e nelle categorie algebriche definite negli esempi precedenti il prodotto di due spazi è proprio il prodotto di tali spazi come oggetti della categoria cui appartengono.

2.2.1 Il funtore "componenti connesse"

Sia X uno spazio topologico e denotiamo con $F(X)$ l'insieme delle sue componenti connesse. Assegnate una mappa $f : X \to Y$ di X in uno spazio topologico Y e una componente connessa C di X, $f(C)$ è un sottospazio connesso di Y e, quindi, è contenuto in una componente connessa di Y, che denotiamo con $f_*(C)$. Allora è facile verificare che la funzione

$$F \,:\, X \in \mathcal{T} \,\to\, F(X) \in \mathcal{S}$$

risulta un funtore tra la categoria degli spazi topologici e quella degli insiemi qualora si ponga

$$F(f) = f_*\,, \quad \text{per ogni} \quad f \in Hom_{\mathcal{T}}(X,Y)\,.$$

PROPOSIZIONE 2.2.19. *Sia $f : X \to Y$ una mappa suriettiva. Allora anche f_* è suriettiva e, quindi, risulta*

$$|F(Y)| \leq |F(X)|.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C una componente connessa di Y e supponiamo f suriettiva. Per ogni elemento $a \in C$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = a$ e questo implica che, per la componente connessa C_x di x in X, risulta $f(C_x) \subseteq C$. Ne segue che $f_*(C_x) = C$ e l'asserto è provato. □

2.3 Connessione per archi

Nel seguito prenderemo in considerazione mappe tra un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ e uno spazio topologico X. È facile rendersi conto che ogni mappa $g : [a,b] \to X$ può essere riparametrizzata nell'intervallo $[0,1]$ componendo g con l'unico omeomorfismo lineare (*cfr.* **Osservazione 1.5.19**)

$$\varphi : t \in I \to (b-a)t + a \in [a,b]$$

per cui è $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$. In altre parole, lo studio di g si può ricondurre a quello della mappa

$$f = g \circ \varphi : t \in [0,1] \to g((b-a)t + a) \in X \tag{2.3}$$

che è definita in $[0,1]$, assume agli estremi i valori $f(0) = g(a)$, $f(1) = g(b)$ e ha lo stesso codominio di g. Per questo motivo non è restrittivo limitarsi a considerare solo mappe definite nell'intervallo $[0,1]$.

DEFINIZIONE 2.3.1. (Archi e lacci) Siano x_0, x_1 due punti di uno spazio topologico X. Una mappa

$$f \;:\; I \to X, \quad \text{con } f(0) = x_0 \text{ e } f(1) = x_1\,, \tag{2.4}$$

prende il nome di ***arco***, o ***cammino***, di punto iniziale x_0 e punto finale x_1. I punti x_0 e x_1 si dicono anche ***estremi*** dell'arco. L'immagine $f(I)$ di I mediante f prende il nome di ***sostegno dell'arco***. Un arco di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 si dice anche ***arco tra*** x_0 ***e*** x_1, o da x_0 ***a*** x_1, o di ***estremi*** x_0, x_1. Un arco avente i punti iniziale e finale coincidenti con x_0 prende il nome di ***laccio***, o ***cappio***, o ***loop***, ***con punto base*** x_0. □

OSSERVAZIONE 2.3.2. Ad ogni mappa $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to X$ resta associato l'arco f definito dalla **(2.3)** e che prende il nome di ***riparametrizzazione lineare di*** g ***in*** $[0, 1]$. Più in generale, posto

$$\varphi' : t \in [c, d] \to \frac{(b-a)t + ad - bc}{d-c} \in [a, b]\,, \tag{2.5}$$

la mappa $g \circ \varphi' : [c, d] \to X$ prende il nome di ***riparametrizzazione lineare di*** g ***in*** $[c, d]$. Qui, φ' è l'unico omeomorfismo lineare tra $[c, d]$ e $[a, b]$ tale che $\varphi'(c) = a$ e $\varphi'(d) = b$. □

OSSERVAZIONE 2.3.3. Il sostegno di un arco $f : I \to X$ di X è un sottospazio connesso e compatto di X in quanto immagine dello spazio connesso e compatto I mediante la funzione continua f. □

Avvertiamo il Lettore che qualche volta nel seguito, se non vi è luogo ad equivoci, confonderemo un arco col proprio sostegno.

ESEMPIO 2.3.4. (Laccio costante) Sia $x \in X$. La ***mappa costante*** $k_x : s \in I \to x \in X$ è un arco. Qui i punti iniziale e finale coincidono con x, così k_x è un laccio con punto base x. □

ESEMPIO 2.3.5. (Arco inverso) Sia $f : I \to X$ un arco da x_0 a x_1. Allora la mappa

$$\overline{f} \;:\; s \in I \to f(1-s) \in X \tag{2.6}$$

è un arco da x_1 a x_0, che si dice ***arco inverso*** di f. In alcuni testi l'arco inverso di f è denotato con f^{-1}. Osserviamo esplicitamente che $\overline{f}$ non è la funzione inversa di f, che tra l'altro potrebbe non esistere non essendo f necessariamente biunivoca. Si osservi che f e $\overline{f}$ hanno lo stesso sostegno ma orientamento diverso: il sostegno di f ha verso di percorrenza da x_o da x_1, quello di $\overline{f}$ ha verso di percorrenza opposto. □

LEMMA 2.3.6. (Lemma di incollamento) *Siano X, Y due spazi topologici e A, B due chiusi di X tali che $X = A \cup B$. Siano, inoltre, $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ due mappe coincidenti su $A \cap B$. Allora la seguente funzione $h : X \to Y$*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in A \\ \\ g(x) & \text{se} \quad x \in B \end{cases}, \text{ per ogni } x \in X, \tag{2.7}$$

è ben definita ed è continua.

DIMOSTRAZIONE. Che la funzione h sia ben definita segue dal fatto che f e g coincidono su $A \cap B$. Ora, se C è un chiuso di Y, $f^{-1}(C)$ e $g^{-1}(C)$ sono chiusi di X perché f e g sono continue. Ne segue che $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ è un chiuso di X e h è continua. □

Nel seguito diremo che la funzione h, definita dalla (2.7), è stata ottenuta *incollando le funzioni f e g.*

PROPOSIZIONE 2.3.7. (Concatenazione di archi) *Siano $f : I \to X$ e $g : I \to X$ due archi di X rispettivamente da x_0 a x_1 e da x_1 a x_2. Allora la funzione $f * g : I \to X$, definita da*

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ g(2s-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}, \tag{2.8}$$

è un arco da x_0 a x_2.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo preliminarmente che risulta

$$f * g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = g(0) = x_1;$$

quindi, la funzione $f * g$ è ben definita e risulta

$$f * g(0) = f(0) = x_0 \text{ e } f * g(1) = g(1) = x_2 .$$

D'altra parte, le funzioni

$$s \in \left[0\,,\,\frac{1}{2}\right] \to f(2s) \in X \quad \text{e} \quad s \in \left[\frac{1}{2}\,,\,1\right] \to g(2s-1) \in X$$

risultano continue e, in forza del **Lemma di incollamento 2.3.6**, lo è anche $f * g$. □

L'arco $f * g$ definito dalla (2.8) prende il nome di ***concatenazione***, o ***prodotto***, di f e g ed è facile provare che risulta

$$\overline{f * g} = \overline{g} * \overline{f} \,. \tag{2.9}$$

OSSERVAZIONE 2.3.8. Gli omeomorfismi lineari

$$\varphi_1 \,:\, t \in [0,\frac{1}{2}] \to 2t \in [0,1] \;\text{ e }\; \varphi_2 \,:\, t \in [\frac{1}{2},1] \to 2t-1 \in [0,1]$$

sono gli unici per cui si ha $\varphi_1(0)=0\,,\ \varphi_1(\frac{1}{2})=1\,,\ \varphi_2(\frac{1}{2})=0\,,\ \varphi_2(1)=1\,(cfr.(2.5))$. Così, se $f \,:\, I \to X$ e $g \,:\, I \to X$ sono due archi di X rispettivamente da x_0 a x_1 e da x_1 a x_2, le mappe $f \circ \varphi_1$ e $g \circ \varphi_2$ sono rispettivamente le riparametrizzazioni lineari di f in $[0,\frac{1}{2}]$ e di g in $[\frac{1}{2},1]$ (*cfr.* **Osservazione 2.3.2**). Allora, la concatenazione $f * g$ si ottiene incollando la riparametrizzazione lineare di f in $[0,\frac{1}{2}]$ e quella di g in $[\frac{1}{2},1]$. □

OSSERVAZIONE 2.3.9. L'operazione di concatenazione fra archi non è associativa. Infatti, se $f \,:\, I \to X$, $g \,:\, I \to X$ e $h : I \to X$ sono tre archi di X rispettivamente da x_0 a x_1, da x_1 a x_2 e da x_2 a x_3, risulta

$$\begin{aligned}
(f*g)*h(s) &= \begin{cases} f*g(2s) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ h(2s-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(4s) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ \\ g(4s-1) & \text{se} \quad \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ h(2s-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e

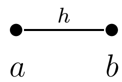
$$\begin{aligned}
f*(g*h)(s) &= \begin{cases} f(2s) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ g*h(2s-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(2s) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ g(4s-2) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ \\ h(4s-3) & \text{se} \quad \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ciò mostra che $(f*g)*h \neq f*(g*h)$. □

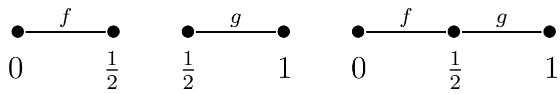
Sia $h : I \to X$ un arco e

$$\psi \,:\, t \in [a,b] \to \frac{t-a}{b-a} \in [0,1]$$

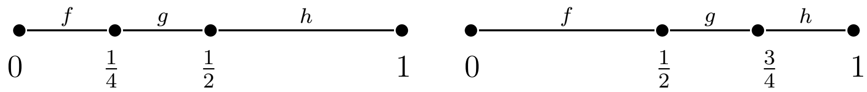
l'unico omeomorfismo lineare tale che $\psi(a)=0$ e $\psi(b)=1$ (*cfr.* (2.5)). La riparametrizzazione lineare di h su $[a,b]$, $h \circ \psi : [a,b] \to X$, si rappresenta graficamente col diagramma



Per esempio, con riferimento alle notazioni dell'**Osservazione** 2.3.8, i diagrammi



rappresentano rispettivamente la riparametrizzazione lineare di f su $[0, \frac{1}{2}]$, quella di g su $[\frac{1}{2}, 1]$ e la concatenazione $f * g$ di f e g. Ancora, con riferimento alle notazioni dell'**Osservazione** 2.3.9, i diagrammi



rappresentano rispettivamente gli archi $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$.

ESEMPIO 2.3.10. (Segmenti e poligonali in $\mathbb{R}^n$) Se $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ sono punti distinti di $\mathbb{R}^n$, il ***segmento*** $[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1]$ di estremi $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ è il sostegno dell'arco definito da

$$f(s) = (1 - s)\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{x}_1\,, \text{ per ogni } s \in [0, 1].$$

Ne segue che una poligonale di estremi $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ è il sostegno della concatenazione dei segmenti che la compongono. □

DEFINIZIONE 2.3.11. (Connessione per archi) Uno spazio topologico X si dice ***connesso per archi*** se, per ogni due punti $x_0, x_1 \in X$, esiste un arco $f : I \to X$ di punto iniziale x_0 e punto finale x_1. Un sottospazio K di X si dice ***connesso per archi*** se è tale rispetto alla topologia indotta da quella di X. □

ESEMPIO 2.3.12. (Sottospazi convessi e connessi per poligonali di $\mathbb{R}^n$) Per quanto esposto nell'**Esempio 2.3.10**, si ha che *i sottospazi convessi e i sottospazi connessi per poligonali di $\mathbb{R}^n$ sono connessi per archi.* □

PROPOSIZIONE 2.3.13. *Siano p un punto di X e $\{K_j\}_{j\in J}$ una famiglia di sottospazi di X connessi per archi e contenenti p. Allora $K = \bigcup_{j\in J} K_j$ è un sottospazio di X connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano x e y punti di K e siano K_s e K_t tali che $x \in K_s$ e $y \in K_t$. Allora esiste un arco f di K_s da x a p e uno g di K_t da p a y. Ne segue che $f * g$ è un arco da x a y di $K_s \cup K_t \subseteq K$ e, quindi, K è connesso per archi. □

ESEMPIO 2.3.14. (Sottospazi stellati di $\mathbb{R}^n$) Un sottospazio S di $\mathbb{R}^n$ si dice ***stellato*** se contiene un punto $\boldsymbol{y}$, detto ***di diramazione***, tale che, per ogni $\boldsymbol{x} \in S$, il segmento di estremi $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è contenuto in S. In queste ipotesi, S risulta unione di segmenti passanti per $\boldsymbol{y}$ e, quindi, è connesso per archi, in forza della **Proposizione 2.3.13**. Si osservi che un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio stellato nel quale ogni punto è di diramazione, e viceversa. □

In virtù dei **Lemmi 2.3.4** e **2.3.5** e della **Proposizione 2.3.7**, si ha subito che la relazione $\overset{arc}{\sim}$ sui punti di X definita da

$$a, b \in X;\ a \overset{arc}{\sim} b \ \Leftrightarrow\ \textit{esiste un arco di estremi } a, b \tag{2.10}$$

è di equivalenza su X.

DEFINIZIONE 2.3.15. (Componenti connesse per archi) In uno spazio topologico X, le classi di equivalenza rispetto alla relazione (2.10) prendono il nome di ***componenti connesse per archi*** di X. □

Dalla precedente definizione segue subito che *uno spazio topologico X possiede una sola componente connessa per archi se, e solo se, è connesso per archi.*

PROPOSIZIONE 2.3.16. *La componente connessa per archi di X contenente un suo fissato punto p coincide con l'unione di tutti i sottospazi di X connessi per archi e contenenti p. Inoltre, un sottospazio K di X è una componente connessa per archi di X se, e solo se, K è un sottospazio connesso per archi massimale.*

DIMOSTRAZIONE. È una immediata conseguenza della **Proposizione 2.3.13**. □

PROPOSIZIONE 2.3.17. *Ogni spazio topologico connesso per archi X è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle nostre ipotesi, in forza dell'**Osservazione 2.3.3**, due arbitrari punti di X appartengono ad un connesso che li contiene e da ciò segue l'asserto. □

ESEMPIO 2.3.18. (Uno spazio connesso e non connesso per archi) Uno spazio topologico connesso non è necessariamente connesso per archi, come mostra il seguente esempio, noto come il ***pettine del topologo***. Posto in $\mathbb{R}^2$

$$C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right)\ ,\ \ 0 \le y \le 1\ ,\ \ n \ge 1 \right\}\ ,\ J = \{(x, 0)\ :\ 0 < x \le 1\}\ \text{ e }\ \boldsymbol{p} = (0, 1)$$

è facile verificare che l'insieme

$$C \cup J$$

è connesso per poligonali e, quindi, è connesso e connesso per archi (*cfr.* **Esempio** 2.3.12). Inoltre, risulta connesso anche l'insieme (Figura 2.1)

$$X = C \cup J \cup \{\boldsymbol{p}\},$$

perché $\boldsymbol{p}$ è di accumulazione per C e, quindi, appartiene alla sua chiusura[3].

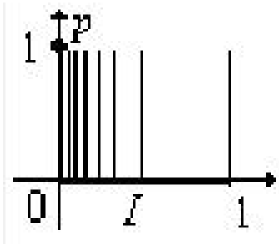


Figura 2.1: Il pettine del topologo

Facciamo vedere che X non è connesso per archi provando che, se $f : I \to X$ è un arco di punto iniziale $\boldsymbol{p}$, allora f è l'arco costante $f(x) = \boldsymbol{p}$, per ogni $x \in [0, 1]$. In altre parole, come è intuibile, non esiste alcun arco contenuto in X di estremi $\boldsymbol{p}$ e un punto diverso da $\boldsymbol{p}$. A tale scopo, poniamo

$$Y = f^{-1}(\boldsymbol{p}) \subseteq [0, 1]$$

e osserviamo che Y *è chiuso in* $[0, 1]$ perché f è continua e $\{\boldsymbol{p}\}$ è un chiuso di X. Allora, fissati $t \in Y$ e detto D l'intorno circolare di centro $\boldsymbol{p}$ e raggio $\frac{1}{2}$, per la continuità di f in t, esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(]t - \delta, t + \delta[) \subseteq D \cap X$$

e $f(]t-\delta, t+\delta[)$ è un connesso di X che contiene $\boldsymbol{p}$. D'altra parte, ogni sottoinsieme di $D \cap X$ contenente $\boldsymbol{p}$, se contiene punti diversi da $\boldsymbol{p}$, è sconnesso e, quindi, $f(]t - \delta, t + \delta[)$ deve coincidere con $\boldsymbol{p}$. Ne segue che $]t - \delta, t + \delta[\subseteq Y$, il che prova che Y *è un aperto di* $[0, 1]$. Possiamo così concludere che $Y = [0, 1]$ perché $[0, 1]$, essendo connesso, non può contenere sottospazi propri e non vuoti che siano contemporaneamente aperti e chiusi. $\square$

Un contesto nel quale la connessione e la connessione per archi sono equivalenti è mostrato dalla proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 2.3.19. *Un aperto A di $\mathbb{R}^n$ è connesso se, e solo se, è connesso per archi.*

[3] Ricordiamo che, se un sottospazio X di uno spazio topologico è connesso, allora è connesso ogni sottospazio Y, con $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ (**Proposizione 1.6.13**).

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che A sia connesso, sia C una componente connessa per archi di A e $\boldsymbol{x}$ un suo punto. Poiché A è aperto, esiste un intorno sferico $B_r(\boldsymbol{x})$ di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio r contenuto in A e, essendo ogni punto di $B_r(\boldsymbol{x})$ collegabile a $\boldsymbol{x}$ mediante un arco, si ha che $B_r(\boldsymbol{x}) \subseteq C$. Ne segue che C è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e, quindi, del sottospazio A. Ora, se A avesse più di una componente connessa per archi, A sarebbe unione di aperti non vuoti e a due a due disgiunti e ciò non è possibile perché A è connesso. Ne segue che A è connesso per archi. La seconda parte dell'asserto è vera per la **Proposizione 2.3.17**. □

PROPOSIZIONE 2.3.20. *Se $f : X \to Y$ è una mappa e X è connesso per archi, allora $f(X)$ è un sottospazio di Y connesso per archi. Ne segue che se X, Y sono omeomorfi, allora X è connesso per archi se, e solo se, lo è anche Y.*

DIMOSTRAZIONE. Siano y_0, y_1 due punti di $f(X)$ e siano x_0, x_1 due punti di X tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Allora, detto g un arco tra x_0 e x_1, la mappa $f \circ g$ è un arco tra y_0 e y_1 e, così, Y è connesso per archi. □

ESEMPIO 2.3.21. **(S^n è connesso per archi)** S^n, $n > 0$, è immagine della funzione continua

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \;\to\; \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \in S^n$$

e quindi, in forza della proposizione precedente, è uno spazio connesso per archi. □

ESEMPIO 2.3.22. **(Quozienti di spazi connessi per archi)** Un quoziente di uno spazio connesso per archi, in quanto immagine della proiezione canonica, è connesso per archi in forza della proposizione precedente. Per esempio, il *piano proiettivo reale è connesso per archi* perché quoziente di $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ che, come subito si verifica, è connesso per archi. □

ESEMPIO 2.3.23. Se σ, τ sono due topologie su un insieme X, con $\sigma \leq \tau$, la funzione identità di (X, τ) in (X, σ) è continua. Allora, in forza della proposizione precedente, la connessione per archi di (X, τ) implica quella di (X, σ). □

PROPOSIZIONE 2.3.24. *Due spazi topologici X, Y sono connessi per archi se, e solo se, è connesso per archi il loro prodotto $X \times Y$.*

DIMOSTRAZIONE. X e Y sono immagini di $X \times Y$ mediante le proiezioni e, quindi, la connessione per archi di $X \times Y$ implica quella di X e Y.
Supponiamo ora che X e Y siano connessi per archi e siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ due punti di $X \times Y$. Il prodotto $X \times \{y_0\}$, essendo omeomorfo a X, è connesso per archi e, quindi, esiste un cammino $f : I \to X \times \{y_0\}$ da (x_0, y_0) a (x_1, y_0). Il prodotto $\{x_1\} \times Y$, essendo omeomorfo a Y, è connesso per archi e, quindi, esiste un cammino $g : I \to \{x_1\} \times Y$ da (x_1, y_0) a (x_1, y_1). Ora, usando le due inclusioni

$$i_X : X \times \{y_0\} \to X \times Y \quad e \quad i_Y : \{x_1\} \times Y \to X \times Y$$

consideriamo i cammini di $X \times Y$ definiti da $i_X \circ f$ e $i_Y \circ g$. Allora la composizione $(i_X \circ f) * (i_Y \circ g)$ è un cammino da (x_0, y_0) a (x_1, y_1) e l'asserto è provato. $\square$

2.4 Omotopia

La *topologia algebrica* è il ramo della matematica che si occupa della classificazione degli spazi topologici attraverso lo studio dei funtori tra categorie di spazi topologici e categorie di strutture algebriche, quale, ad esempio, quella dei gruppi. In questo modo ad uno spazio si associano degli invarianti algebrici la cui struttura è specialmente adatta a studiare, a meno di omeomorfismi, particolari proprietà topologiche dello spazio stesso. Un esempio è dato dalla costruzione del *gruppo fondamentale* che vedremo in seguito. L'*omotopia,* che iniziamo a trattare in questo numero, è uno dei primi argomenti di studio nell'ambito della topologia algebrica.

Siano A_o e A_1 due sottospazi di uno spazio topologico Y. Intuitivamente, un'*omotopia di* A_o *in* A_1 si può immaginare come un processo mediante il quale, con lo scorrere del tempo in un fissato intervallo temporale, si realizza una deformazione continua di A_o in A_1. Si pensi, per esempio, alla deformazione di una bolla di sapone o di un pallone che, gonfiati con continuità nel tempo, passano da uno stato "*iniziale*" ad uno "*finale*". Volendo formalizzare questa situazione in termini matematici precisi, conviene pensare A_o e A_1 come immagini di due mappe f_o, f_1 di uno spazio topologico X in uno Y e fissare l'attenzione su come si possono descrivere le deformazioni continue di f_o in f_1 piuttosto che quelle di $A_o = f_o(X)$ in $A_1 = f_1(X)$. A tale scopo diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4.1. (Omotopia tra mappe) Siano X, Y spazi topologici e $f_o, f_1 : X \to Y$ due mappe di X in Y. Una mappa

$$F : X \times I \to Y \tag{2.11}$$

prende il nome di ***omotopia libera***, o più semplicemente ***omotopia***, ***tra*** f_o ***e*** f_1 o ***da*** f_o ***a*** f_1, se risulta

$$F(x, 0) = f_o(x) \;\text{ e }\; F(x, 1) = f_1(x)\,, \text{ per ogni } x \in X. \tag{2.12}$$

Equivalentemente, se poniamo

$$F(x, t) = f_t(x)\,, \quad \text{per ogni } t \in I, \tag{2.13}$$

un'omotopia F tra f_o e f_1 può anche definirsi come una famiglia di mappe

$$F = \{f_t : X \to Y\}_{t \in I} \tag{2.14}$$

tale che la funzione $F : X \times I \to Y$ definita dalla **(2.13)** è continua.
Quando esiste un'omotopia tra due mappe f_o, f_1, si dice che f_o e f_1 sono ***omotope***, o hanno lo ***stesso tipo di omotopia***, e si scrive $f_o \sim f_1$, o $f_o \overset{F}{\sim} f_1$, o $F : f_0 \to f_1$. $\square$

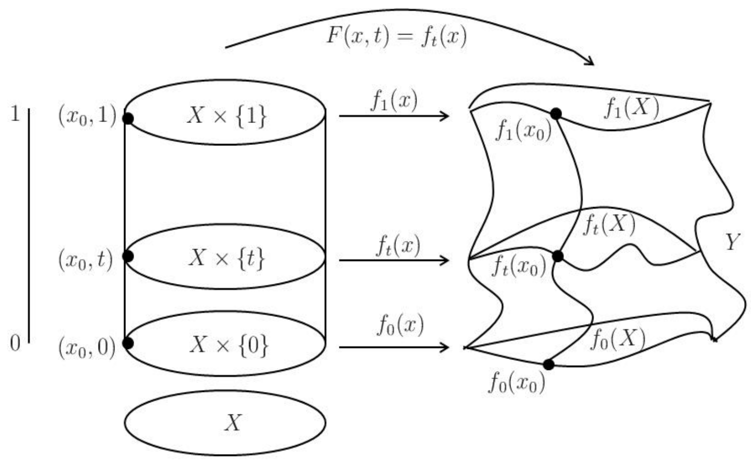


Figura 2.2: Omotopia $F(x,t)$ tra le mappe $f_0, f_1 : X \to Y$

Parlando informalmente, se pensiamo alla variabile $t \in [0,1]$ come ad una variabile temporale, l'omotopia $F(x,t)$ tra f_o e f_1 descrive la deformazione continua nel corso del tempo della mappa f_o nella mappa f_1 mediante la famiglia di mappe $\{f_t(x) = F(x,t)\}_{t \in I}$. In altre parole, con lo scorrere del tempo dall'istante 0 all'istante 1, la mappa $f_t(x)$ rappresenta all'istante t lo stato della deformazione di $f_o(x)$ in $f_1(x)$. Sempre in modo informale e in accordo con quanto detto all'inizio del paragrafo, possiamo anche pensare all'omotopia F come ad un processo di deformazione continua del sottospazio $f_o(X)$ di Y nel sottospazio $f_1(X)$ che, ad un istante t, vede $f_o(X)$ deformato nel sottospazio $f_t(X)$ (si veda la **Figura 2.2** per uno schema grafico dell'omotopia F).

OSSERVAZIONE 2.4.2. Siano $f, g : X \to Y$ due mappe di X in Y e F un'omotopia tra f e g. Allora, se x_o è un punto di X, la mappa

$$F(x_o, t) \, : \, t \in I \to F(x_o, t) \in Y$$

è un arco di Y di estremi $F(x_o, 0) = f(x_o)$, $F(x_o, 1) = g(x_o)$ e tali estremi appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y. Ne segue che, se $f', g' \, : \, X \to Y$ sono mappe di X in Y tali che esiste un punto $x_o \in X$ per cui $f'(x_o)$ e $g'(x_o)$ non appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y, allora f' e g' non possono essere omotope. $\square$

ESEMPIO 2.4.3. (Omotopia lineare di mappe in insiemi convessi) Siano X uno spazio topologico, C un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$, f, g due mappe di X in C e consideriamo la mappa lineare

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)\,, \quad \text{con} \quad (x,t) \in X \times I\,.$$

Osserviamo che, per ogni fissato $x_o \in X$, al variare di $t \in I$,

$$F(x_o,t) = (1-t)f(x_o) + t\,g(x_o)$$

rappresenta in $\mathbb{R}^n$ il segmento di estremi $f(x_o), g(x_o)$, che è contenuto in C perché C è convesso. Allora il codominio di F è contenuto in C e F risulta un'omotopia tra f e g. Abbiamo, così, che *due mappe di X in un sottospazio convesso C di $\mathbb{R}^n$ sono sempre omotope*. In particolare, *ogni mappa di C in se stesso è omotopa all'identità di C.* □

ESEMPIO 2.4.4. (Omotopia di mappe in insiemi stellati) Vediamo come il risultato dell'esempio precedente sui sottospazi convessi di $\mathbb{R}^n$ si estende a quelli stellati. Siano X uno spazio topologico, S un sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{y}$ un suo punto di diramazione. Siano f, g due mappe di X in S e consideriamo la mappa

$$F(x,t) = \begin{cases} (1-2t)f(x) + 2t\boldsymbol{y} & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ 2(1-t)\boldsymbol{y} + (2t-1)g(x) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \tag{2.15}$$

con $(x,t) \in X \times I$, ottenuta, per ogni $x \in X$, incollando in $\boldsymbol{y}$ la riparametrizzazione in $[0, \frac{1}{2}]$ del segmento di estremi $f(x)$ e $\boldsymbol{y}$ con quella in $[\frac{1}{2}, 1]$ del segmento di estremi $\boldsymbol{y}$ e $g(x)$. In tal modo, per ogni fissato $x_o \in X$, al variare di $t \in I$, $F(x_o,t)$ descrive in $\mathbb{R}^n$ l'unione dei segmenti di estremi $f(x_o), \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{y}, g(x_o)$, che è contenuta in S perché S è stellato. Allora il codominio di F è contenuto in S e F risulta un'omotopia tra f e g. Così, come per i convessi, *due mappe di X in un sottospazio stellato S di $\mathbb{R}^n$ sono sempre omotope*. In particolare, *ogni mappa di S in se stesso è omotopa all'identità di S.* □

ESEMPIO 2.4.5. (Omotopia tra funzioni costanti) Siano $k_a : x \in X \to a \in Y$ e $k_b : x \in X \to b \in Y$ due mappe costanti e sia F un'omotopia tra k_a e k_b. Allora, per un fissato $x_o \in X$, la funzione $F(x_o,t)$ è un arco in Y di estremi a, b e tali estremi appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y. Viceversa, assegnate le mappe costanti $k_a, k_b : X \to Y$, nell'ipotesi che a, b appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y, ogni arco $h : I \to Y$ di estremi a, b individua l'omotopia H tra k_a e k_b definita da $H(x,t) = h(t)$, per ogni $t \in I$. Abbiamo così che *due mappe costanti $k_a, k_b : X \to Y$ sono omotope se, e solo se, a e b appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y*. In particolare, *se Y è connesso per archi, due mappe costanti di X in Y sono sempre omotope.* □

Una mappa $f : X \to Y$ che sia omotopa ad una mappa costante si dice ***nullomotopa***. Il risultato che segue caratterizza le mappe nullomotope definite sulla circonferenza.

PROPOSIZIONE 2.4.6. (Mappe nullomotope della circonferenza) *Una mappa $f : S^1 \to Y$ è omotopa ad una mappa costante se, e solo se, f può prolungarsi ad una mappa $g : D^2 \to Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $k_a : x \in S^1 \to a \in Y$ sia una funzione costante e $F : k_a \to f$ un'omotopia. Allora la funzione

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} F(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, \|\boldsymbol{x}\|) & \text{se} \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \\ \\ \boldsymbol{a} & \text{se} \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \end{cases} , \text{ con } \boldsymbol{x} \in D^2 ,$$

è una mappa che risulta un prolungamento di f a D^2, come è facile verificare. Viceversa, se esiste un prolungamento continuo $g : D^2 \to Y$ di f, è facile provare che la funzione

$$F : (\boldsymbol{x}, t) \in S^1 \times I \to g(t\boldsymbol{x}) \in Y$$

è un'omotopia tra la mappa costante in $g(\mathbf{0})$ e f. □

PROPOSIZIONE 2.4.7. *Siano f, g, h tre mappe di X in Y, F un'omotopia tra f e g e F' un'omotopia tra g e h. Allora la funzione*

$$F''(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \textit{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ F'(x, 2t-1) & \textit{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} , \textit{ con } (x,t) \in X \times I , \tag{2.16}$$

è un'omotopia tra f e h.

DIMOSTRAZIONE. Le restrizioni di F'' agli insiemi $X \times [0, 1/2]$ e $X \times [1/2, 1]$ sono continue e coincidono su $X \times \{1/2\}$, che è un chiuso di $X \times I$. Allora F'' è continua su $X \times I$, in forza del **Lemma di incollamento 2.3.6**, e risulta $F''(x, 0) = f(x)$ e $F''(x, 1) = h(x)$. F'' è, dunque, un'omotopia tra f e h. □

PROPOSIZIONE 2.4.8. *Siano X, Y spazi topologici. La relazione di omotopia nell'insieme $\mathcal{C}(X, Y)$ delle funzioni continue di X in Y è di equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, la funzione

$$F : (x, t) \in X \times I \to f(x) \in Y$$

è un'omotopia tra f e se stessa e, quindi, la relazione di omotopia in $\mathcal{C}(X, Y)$ è riflessiva. Se $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ e se $F : X \times I \to Y$ è un'omotopia tra f e g, la funzione

$$F' : (x, t) \in X \times I \to F(x, 1-t) \in Y$$

è, come subito si verifica, un'omotopia tra g e f e, quindi, la relazione di omotopia in $\mathcal{C}(X,Y)$ è simmetrica. Infine, la transitività della nostra relazione è assicurata dalla **Proposizione 2.4.7**. □

ESEMPIO 2.4.9. In considerazione di quanto detto nell' **Esempio 2.4.5**, *le classi di omotopia delle mappe da un punto ad uno spazio topologico Y sono in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di Y.* □

PROPOSIZIONE 2.4.10. *Siano f, f' mappe omotope di X in Y e g, g' mappe omotope di Y in T. Allora $g \circ f$ e $g' \circ f'$ sono mappe omotope di X in T.*

DIMOSTRAZIONE. Siano F, G rispettivamente un'omotopia tra f e f' e un'omotopia tra g e g' e osserviamo che la funzione

$$E \,:\, (x,t) \in X \times I \;\to\; (F(x,t),t) \in Y \times I$$

è continua. Allora è continua la funzione

$$H = G \circ E \,:\, (x,t) \in X \times I \;\to\; G(F(x,t),t) \in T$$

e risulta

$$H(x,0) = G(E(x,0)) = G(F(x,0),0) = G(f(x),0) = g(f(x))\,,$$

$$H(x,1) = G(E(x,1)) = G(F(x,1),1) = G(f'(x),1) = g'(f'(x))\,.$$

Resta così provato che H è un'omotopia tra le mappe $g \circ f$ e $g' \circ f'$. □

DEFINIZIONE 2.4.11. (Equivalenza omotopica tra spazi) Una mappa $f \,:\, X \to Y$ tra due spazi topologici X, Y prende il nome di ***equivalenza omotopica di*** X ***in*** Y se esiste una mappa $g \,:\, Y \to X$ tale che $g \circ f$ è omotopa all'identità id_X di X e $f \circ g$ è omotopa all'identità id_Y di Y. In queste ipotesi è chiaro che g è un'equivalenza omotopica di Y in X e si dice che f e g sono ***omotopicamente inversa*** l'una dell'altra. Gli spazi X e Y si dicono ***omotopicamente equivalenti***, se esiste un'equivalenza omotopica tra X e Y. □

PROPOSIZIONE 2.4.12. *La relazione di equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi topologici.*

DIMOSTRAZIONE. La riflessività e la simmetria della relazione sono di immediata verifica, proviamone la transitività. Siano $X \sim Y, Y \sim T$ e

$$f \,:\, X \to Y\,,\; g \,:\, Y \to X \;\; (g \circ f \sim id_X\,,\; f \circ g \sim id_Y),$$

$$f' \,:\, Y \to T\,,\; g' \,:\, T \to Y \;\; (g' \circ f' \sim id_Y\,,\; f \circ g \sim id_T)$$

equivalenze omotopiche. Allora, essendo $g' \circ f' \sim id_Y$, in forza della **Proposizione 2.4.10**, abbiamo

$$(g' \circ f') \circ f \sim id_Y \circ f = f \, ,$$

e risulta

$$(g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \sim g \circ f \sim id_X \, .$$

In modo analogo si prova che

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') \sim id_T$$

e, così, resta provato che è $X \sim T$. □

OSSERVAZIONE 2.4.13. (Omeomorfismi e equivalenze omotopiche) Un omeomorfismo tra due spazi topologici è, come subito si verifica, un'equivalenza omotopica e, quindi, come c'era da aspettarsi, *spazi omeomorfi sono anche omotopi*. Il *"viceversa"* non vale*: due spazi omotopicamente equivalenti non sono necessariamente omeomorfi.* Vedremo, infatti, che esistono equivalenze omotopiche che non sono funzioni biunivoche. □

PROPOSIZIONE 2.4.14. *Se X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti, allora l'insieme delle componenti connesse di X e l'insieme delle componenti connesse di Y sono equipotenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia F il funtore "componenti connesse" (*cfr.* sez.2.2.1) tra la categoria $\mathcal{T}$ degli spazi topologici e la categoria $\mathcal{S}$ degi insiemi, che ad ogni spazio topologico X associa l'insieme $F(X)$ delle componenti connesse di X. Ricordiamo che, fissati X, Y e una mappa $f : X \to Y$, il funtore F induce una funzione $f_* : F(X) \to F(Y)$ definita nel seguente modo: $f_*(C)$ è la componente connessa di Y contenente $f(C)$, per ogni componente connessa C di X. Ricordiamo anche che, se f, h sono mappe omotope di X in Y e $x_o \in X$, le immagini $f(x_o)$ e $h(x_o)$ appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y (*cfr.* **Osservazione 2.4.2**) e, quindi, ad una stessa componente connessa. Ne segue che $f_* = h_*$. Ora, se $X \sim Y$, e

$$f : X \to Y \, , \; g : Y \to X \;\; (g \circ f \sim id_X \, , \; f \circ g \sim id_Y),$$

sono equivalenze omotopiche, in forza della precedente osservazione, risulta

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{F(X)} \;\text{ e }\; f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_Y)_* = id_{F(Y)} \, ;$$

così le funzioni

$$f_* : F(X) \to F(Y) \;\text{ e }\; g_* : F(Y) \to F(X)$$

sono l'una l'inversa dell'altra e l'asserto è provato. □

ESEMPIO 2.4.15. (Superfici sferiche) Per ogni intero $n > 1$, $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e la superficie sferica S^{n-1} sono omotopicamente equivalenti. La mappa di $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ su S^{n-1} definita da

$$f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1} \tag{2.17}$$

è un'equivalenza omotopica con inversa omotopica l'inclusione $i : \boldsymbol{x} \in S^{n-1} \to \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Infatti, $f \circ i$ è uguale all'identità su S^{n-1} e un'omotopia F tra $i \circ f$ e l'identità su $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ è data da $F(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x}e^{(t-1)log\|\boldsymbol{x}\|}$, come subito si prova. La restrizione della mappa (2.17) a $D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ è ancora un'equivalenza omotopica, così S^{n-1} è anche omotopicamente equivalente a $D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. In particolare per $n = 2$ abbiamo che la circonterenza S^1 è omotopicamente equivalente al piano euclideo e al cerchio unitario privati di un punto. □

DEFINIZIONE 2.4.16. (Spazi contraibili) Uno spazio X si dice ***contraibile***, o ***contrattile***, se è omotopicamente equivalente ad un punto. □

PROPOSIZIONE 2.4.17. *Ogni sottospazio stellato S di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $Y = \{\boldsymbol{y}\}$, consideriamo l'unica funzione $f : S \to Y$ e scegliamo una qualunque funzione $g : Y \to S$. Allora $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f$, per quanto esposto nell'**Esempio 2.4.4**, è omotopa a id_S. □

COROLLARIO 2.4.18. *Ogni sottospazio convesso C di $\mathbb{R}^n$ è contraibile. In particolare, essendo convessi, sono contraibili $\mathbb{R}^n$, D^n e B^n, per ogni intero $n > 0$. Risulta, inoltre, contraibile $S^n \setminus \{x_o\}$, per ogni punto $x_o \in S^n$ e $n > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ è anche stellato, la prima parte dell'asserto segue dalla proposizione precedente. La seconda parte è vera perché $S^n \setminus \{x_o\}$ è omeomorfo a R^n. □

OSSERVAZIONE 2.4.19. Uno spazio topologico contraibile, che non si riduca ad un punto, ed un punto sono esempi di *spazi omotopicamente equivalenti e non omeomorfi.* □

2.4.1 Omotopia relativa

In molti problemi di topologia, differentemente da quanto finora visto, si è interessati alla deformazione continua di una mappa $f_o : X \to Y$ in una $f_1 : X \to Y$ mediante mappe $f_t : X \to Y, t \in I$ il cui codominio non sia del tutto libero, come illustreremo col seguente esempio.

ESEMPIO 2.4.20. Sia $f : I \to X$ un arco di uno spazio topologico X di estremi $f(0) = x_o$ e $f(1) = x_1$. Sia, inoltre, $k = k_{x_o} : I \to X$ l'arco costante in x_o, cioè $k(s) = x_o$, per ogni $s \in I$. La funzione

$$F \,:\, (s,t) \in I \times I \,\to\, f((1-t)s) \in X$$

è continua e risulta

$$F(s,0) = f(s) \;\text{ e }\; F(s,1) = f(0) = x_o = k(s).$$

F è, dunque, un'omotopia tra f e k e così resta provato che *ogni arco, in particolare ogni laccio, di X è omotopo ad una funzione costante.* L'omotopia F che abbiamo scelto deforma con continuità l'arco f nella funzione costante k mediante la famiglia di archi $\{f_t(s) = F(s,t)\}_{t \in I}$ ciascuno dei quali ha come punto iniziale $f_t(0) = f(0) = x_o$ e come punto finale $f_t(1) = f(1-t)$, che è un punto del codominio di f. Si noti che, al variare di $t \in I$, gli archi f_t che approssimano f a k hanno primo estremo (fisso) x_o e secondo estremo (variabile) un punto del codominio di f che tende a x_o al tendere di t a 1; gli estremi di f_t, $t > 0$, quindi, non sono gli stessi di f. Così, se si è interessati alla deformazione continua dell'arco f, da x_o a x_1, in un altro g mediante archi f_t con gli stessi estremi x_o, x_1, l'omotopia "*libera*" finora usata non è più adatta a queste nuove esigenze. Con queste richieste, per esempio, è chiaro che non si può deformare f in una funzione costante, se $x_o \neq x_1$ e f non è costante. $\square$

Quanto appena esposto pone il problema di definire un'omotopia che, invece di agire liberamente, sia soggetta a delle condizioni iniziali che costringano le deformazioni a rispettare dei vincoli imposti a priori, come nel contesto dell'esempio precedente. Questo, come vedremo, è possibile a patto di prendere come ambiente, invece degli spazi topologici, le coppie di spazi.

Ricordiamo che, se A è un sottospazio dello spazio topologico X, la coppia (X,A) prende il nome di ***coppia di spazi topologici***. Una mappa $f : (X,A) \to (Y,B)$ tra due coppie di spazi è, per definizione, una funzione continua $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subseteq B$. Ciò premesso, la nozione di omotopia di mappe tra due spazi topologici (*cfr.* **Definizione 2.4.1**) si generalizza in modo naturale al caso delle coppie di spazi topologici.

DEFINIZIONE 2.4.21. (Omotopia di mappe tra coppie di spazi) Siano $(X,A), (Y,B)$ coppie di spazi topologici e f_o, f_1 due mappe di (X,A) in (Y,B). Una mappa

$$F \,:\, X \times I \to Y \tag{2.18}$$

prende il nome di ***omotopia tra** f_o **e** f_1*, o ***da** f_o **a** f_1* se risulta

$$F(x,0) = f_o(x) \;\text{ e }\; F(x,1) = f_1(x)\,, \;\text{per ogni}\; x \in X, \tag{2.19}$$

e

$$F(A,t) \subseteq B \ , \text{ per ogni } t \in I \, . \tag{2.20}$$

Quando esiste un'omotopia tra le mappe f_o, f_1, si dice che f_o e f_1 sono ***omotope*** e si scrive $f_o \sim f_1$. □

Naturalmente un'omotopia F tra le mappe f, g di (X, A) in (Y, B) è anche un'omotopia tra f e g considerate come mappe di X in Y e la **(2.20)** esprime il vincolo che l'omotopia F deve rispettare, di cui parlavamo in precedenza.

I risultati di cui alle **Proposizioni 2.4.8** e **2.4.10** si generalizzano senza difficoltà al caso delle coppie di spazi topologici e abbiamo, così, le seguenti due proposizioni.

PROPOSIZIONE 2.4.22. *Siano* $(X, A), (Y, B)$ *coppie di spazi topologici. La relazione di omotopia nell'insieme delle mappe di* (X, A) *in* (Y, B) *è di equivalenza.*

PROPOSIZIONE 2.4.23. *Siano* f, f' *mappe omotope di* (X, A) *in* (Y, B) *e* g, g' *mappe omotope di* (Y, B) *in* (T, C)*. Allora* $g \circ f$ *e* $g' \circ f'$ *sono mappe omotope di* (X, A) *in* (T, C).

Con la definizione che segue introduciamo una classe particolare di omotopia di mappe tra coppie di spazi.

DEFINIZIONE 2.4.24. (Omotopia relativa) Siano $(X, A), (Y, B)$ coppie di spazi topologici e f_o, f_1 due mappe di (X, A) in (Y, B) tali che $f_o(a) = f_1(a)$, per ogni $a \in A$. Un'omotopia $F : f_o \to f_1$ si dice ***relativa ad*** A se risulta

$$F(a,t) = F(a,0) \ , \text{ per ogni } a \in A \text{ e } t \in I \tag{2.21}$$

(in queste ipotesi risulta anche $F(a, 0) = f_o(a) = f_1(a) = F(a, 1)$). Quando esiste un'omotopia relativa ad A tra le mappe f_o, f_1, si dice che f_o e f_1 sono ***omotope relativamente ad*** A e si scrive $f_o \sim_A f_1$. □

ESEMPIO 2.4.25. (Omotopia tra archi) Ricordiamo che un arco f da x_o a x_1 di uno spazio topologico X è una mappa $f : I \to X$ tale che $f(0) = x_o$ e $f(1) = x_1$. Allora un tale arco può essere riguardato come una mappa

$$f \ : \ ([0,1], \{0,1\}) \ \to \ (X, \{x_o, x_1\}), \quad \text{con } f(0) = x_o \text{ e } f(1) = x_1,$$

tra le coppie di spazi $([0, 1], \{0, 1\})$ e $(X, \{x_o, x_1\})$, e viceversa. In questo modo, un'***omotopia*** F ***tra due archi*** f, g ***da*** x_o ***a*** x_1 ***di*** $(X, \{x_o, x_1\})$ ***relativa ai suoi estremi*** è una mappa

$$F \ : \ [0,1] \times [0,1] \ \to \ X$$

tale che

$$F(t,0) = f(t) \, , \ F(t,1) = g(t) \, , \text{ per ogni } t \in I \, ,$$

e

$$F(0,t) = x_o\,,\ \ F(1,t) = x_1\,,\ \text{per ogni}\ \ t \in I\,.$$

La **Proposizione 2.4.22** assicura che, se $x_o, x_1 \in X$, *la relazione di omotopia relativa agli estremi sull'insieme degli archi di* $(X, \{x_o, x_1\})$ *di estremi* x_o, x_1 *è di equivalenza.* □

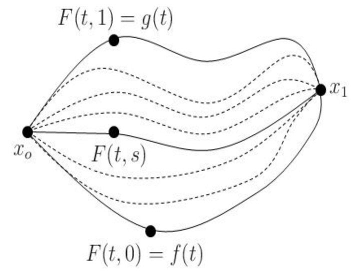


Figura 2.3: Omotopia tra due archi relativa agli estremi.

Avvertiamo il Lettore che nel seguito, ***quando parleremo di omotopia tra archi, ci riferiremo sempre all'omotopia tra archi relativa agli estremi***, definita nell'esempio precedente.

2.4.2 Omotopia tra lacci

Ricordiamo che, se (X, A) è una coppia di spazi topologici con $A = \{x_o\}$, $x_o \in X$, la coppia (X, x_o) prende il nome di ***spazio topologico puntato*** e x_o si dice ***punto base*** di (X, x_o). Nel caso degli spazi puntati, una mappa $f : (X, x_o) \to (Y, y_o)$ è una funzione continua $f : X \to Y$ tale che $f(x_o) = y_o$.

L'omotopia tra lacci è caso particolare dell'omotopia tra archi esposta nell'**Esempio 2.4.25**. Comunque, per maggiore chiarezza, preferiamo richiamarla in modo esplicito. A tale scopo, consideriamo un laccio σ di uno spazio topologico X con punto base x_o, cioè una mappa $\sigma : I \to X$ tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = x_o$. Allora σ può essere riguardato come una mappa

$$\sigma\ :\ ([0,1], \{0,1\})\ \to\ (X, x_o)$$

tra le coppie di spazi $([0,1], \{0,1\})$ e (X, x_o), e viceversa. Così, come caso particolare della **Definizione 2.4.21**, abbiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4.26. (Omotopia tra lacci) Un'omotopia F tra due lacci σ, τ di (X, x_o) di punto base x_o è una mappa

$$F\ :\ [0,1] \times [0,1]\ \to\ X$$

tale che

$$F(s,0) = \sigma(s)\,,\;\; F(s,1) = \tau(s)\,,\; \text{per ogni } s \in I$$

e

$$F(0,t) = F(1,t) = x_o\,,\; \text{per ogni } t \in I\,.$$

□

Avvertiamo il Lettore che nel seguito useremo spesso, senza richiamarlo in modo esplicito, il **Lemma di incollamento 2.3.6**. In altre parole, dato uno spazio topologico X unione di due chiusi A e B, definiremo una funzione continua su X assegnandone i valori su A e su B, senza notare esplicitamente che tali valori coincidono su $A \cap B$.

PROPOSIZIONE 2.4.27. *Siano σ, τ, θ tre lacci di (X, x_o) di punto base x_o. Allora risulta*

$$(\sigma * \tau) * \theta \sim \sigma * (\tau * \theta)\,, \tag{2.22}$$

cioè $(\sigma * \tau) * \theta$ è omotopo a $\sigma * (\tau * \theta)$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, per $s \in I$, risulta

$$\begin{aligned}
(\sigma * \tau) * \theta(s) &= \begin{cases} \sigma * \tau(2s) & \text{se} \;\; 0 \le s \le \frac{1}{2} \\[2ex] \theta(2s-1) & \text{se} \;\; \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\[2ex]
&= \begin{cases} \sigma(4s) & \text{se} \;\; 0 \le s \le \frac{1}{4} \\[2ex] \tau(4s-1) & \text{se} \;\; \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\[2ex] \theta(2s-1) & \text{se} \;\; \frac{1}{2} \le s \le 1\,, \end{cases} \\[2ex]
\sigma * (\tau * \theta)(s) &= \begin{cases} \sigma(2s) & \text{se} \;\; 0 \le s \le \frac{1}{2} \\[2ex] \tau * \theta(2s-1) & \text{se} \;\; \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\[2ex]
&= \begin{cases} \sigma(2s) & \text{se} \;\; 0 \le s \le \frac{1}{2} \\[2ex] \tau(4s-2) & \text{se} \;\; \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\[2ex] \theta(4s-3) & \text{se} \;\; \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e un'omotopia H tra $(\sigma * \tau) * \theta$ e $\sigma * (\tau * \theta)$ è data da

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma(\frac{4s}{t+1}) & \text{se} \quad 0 \le 4s \le t+1 \\ \\ \tau(4s-1-t) & \text{se} \quad t+1 \le 4s \le t+2 \\ \\ \theta(\frac{4s-2-t}{2-t}) & \text{se} \quad t+2 \le 4s \le 4 \end{cases}, \tag{2.23}$$

con $(s,t) \in I \times I$. Infatti, H è continua e risulta

$$H(s,0) = (\sigma * \tau) * \theta(s)\,, \;\; H(s,1) = \sigma * (\tau * \theta)(s)$$

e

$$H(0,t) = \sigma(0) = x_o\,, \;\; H(1,t) = \theta(1) = x_o\,.$$

L'omotopia H definita dalla (2.23) si può determinare, e quindi rappresentare graficamente, mediante il primo grafico della **Figura 2.4** usando il seguente procedimento.

1. Nel piano di coordinate (s,t) si calcolano le coordinate dei punti A, B, C, D (*cfr.* secondo grafico della **Figura 2.4**) intersezioni della retta $t = t_o$, $t_o \in I$, rispettivamente con le rette per i punti $(0,0)$ e $(0,1)$, $(1/4,0)$ e $(1/2,1)$, $(1/2,0)$ e $(3/4,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$:
$$A = (0,t_o)\,, \;\; B = (\frac{t_o+1}{4}, t_o)\,, \;\; C = (\frac{t_o+2}{4}, t_o)\,, \;\; D = (1,t_o).$$

2. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ sul segmento AB, cioè sull'intervallo $[0,(t_o+1)/4]$ (*cfr.* **Osservazione 2.3.2**):
$$s \in [0,(t_o+1)/4] \to \frac{4s}{t_o+1} \in [0.1] \to \sigma(\frac{4s}{t_o+1}) \in X\,.$$

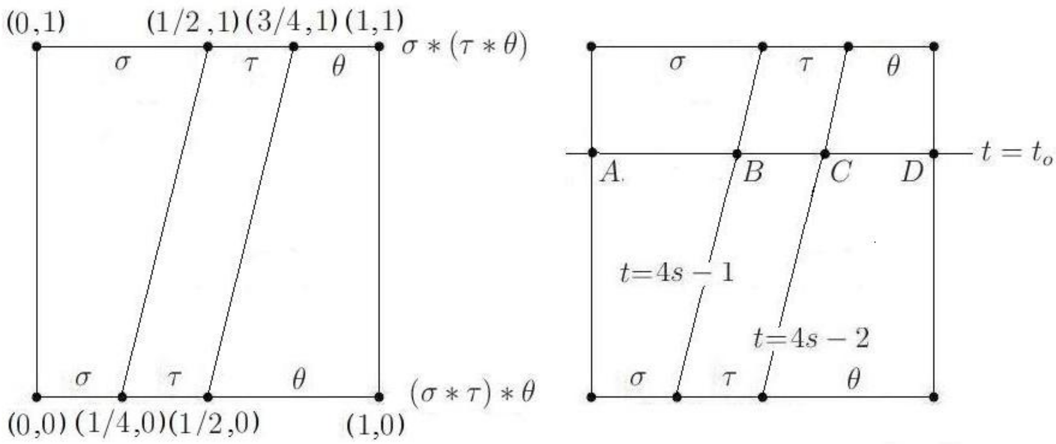


Figura 2.4: Schema per l'omotopia (2.23) tra $(\sigma * \tau) * \theta$ e $\sigma * (\tau * \theta)$

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di τ sul segmento BC, cioè sull'intervallo $[(t_o+1)/4,(t_o+2)/4]$:

$$s \in [(t_o+1)/4,(t_o+2)/4] \to 4s-1-t_o \in [0.1] \to \tau(4s-1-t_o) \in X\,.$$

4. Si calcola la riparametrizzazione lineare di θ sul segmento CD, cioè sull'intervallo $[(t_o+2)/4,1]$:

$$s \in [(t_o+2)/4,1] \to \frac{4s-2-t_o}{2-t_o} \in [0.1] \to \theta(\frac{4s-2-t_o}{2-t_o}) \in X\,.$$

5. Si definisce $H(s,t_o)$ incollando le tre riparametrizzazioni di σ,τ,θ precedentemente costruite. □

PROPOSIZIONE 2.4.28. *Siano σ un laccio di (X,x_o) di punto base x_o e $k(t) = x_o,\ t \in I$, il laccio costante di X in x_o. Allora risulta*

$$\sigma * k \sim k * \sigma \sim \sigma\,, \tag{2.24}$$

cioè $\sigma * k$, $k * \sigma$ e σ sono omotopi.

DIMOSTRAZIONE. Un'omotopia tra $\sigma * k$ e σ è

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma(\frac{2s}{t+1}) & \text{se} \quad 0 \le 2s \le t+1 \\ \\ x_o & \text{se} \quad t+1 \le 2s \le 2 \end{cases}\,. \tag{2.25}$$

Infatti, H è continua e risulta

$$H(s,0) = \sigma * k(s)\,,\ \ H(s,1) = \sigma(s)$$

e

$$H(0,t) = H(1,t) = x_o\,.$$

In modo analogo si vede che un'omotopia tra $k * \sigma$ e σ è data da

$$G(s,t) = \begin{cases} x_o & \text{se} \quad 0 \le 2s \le 1-t \\ \\ \sigma(\frac{2s+t-1}{t+1}) & \text{se} \quad 1-t \le 2s \le 2 \end{cases}\,. \tag{2.26}$$

Le omotopie H e G definite dalle (2.25) e (2.26) si rappresentano rispettivamente mediante il primo e il secondo grafico della **Figura 2.5**.

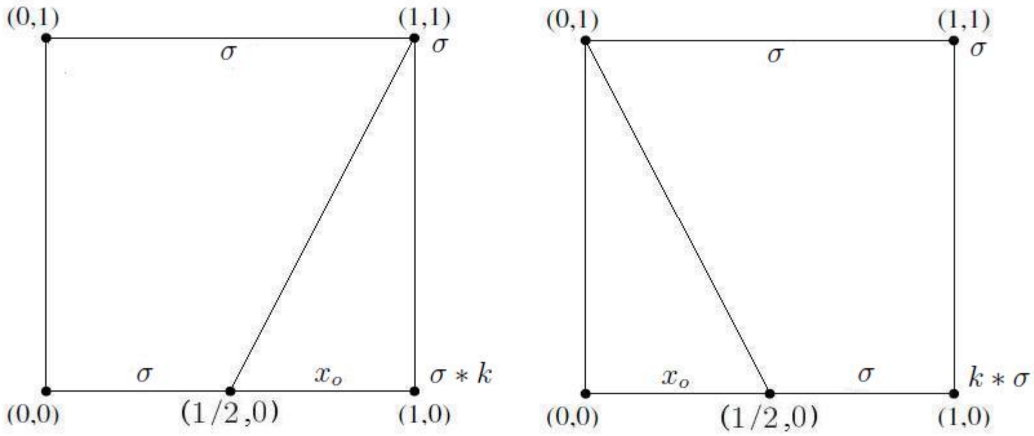


Figura 2.5: Schema per le omotopie (2.25) e (2.26)

Per calcolare l'omotopia H si procede nel seguente modo.

1. Nel piano di coordinate (s, t) si calcolano le coordinate dei punti A, B, C (*cfr.* il primo grafico della **Figura 2.5**) intersezioni della retta $t = t_o$, $t_o \in I$, rispettivamente con le rette per i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(1, 1)$ $(1, 0)$ e $(1, 1)$:
$$A = (0, t_o)\,,\ B = ((1 + t_o)/2, t_o)\,,\ C = (1, t_o).$$

2. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ sul segmento AB, cioè sull'intervallo $[0,(1 + t_o)/2]$ (*cfr.* **Osservazione 2.3.2**):
$$s \in [0,(1 + t_o)/2] \to \frac{2s}{t_o + 1} \in [0.1] \to \sigma(\frac{2s}{t_o + 1}) \in X\,.$$

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di k sul segmento BC, cioè sull'intervallo $[(1 + t_o)/2, 1]$:
$$s \in [(1 + t_o)/2, 1] \to x_o \in X\,.$$

4. Si definisce $H(s, t_o)$ incollando le due riparametrizzazioni di σ e k precedentemente costruite.

Per calcolare l'omotopia G si procede in modo analogo.

1. Nel piano di coordinate (s, t) si calcolano le coordinate dei punti A, B, C (*cfr.* il secondo grafico della **Figura 2.5**) intersezioni della retta $t = t_o$, $t_o \in I$, rispettivamente con le rette per i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(0, 1)$ $(1, 0)$ e $(1, 1)$:
$$A = (0, t_o)\,,\ B = ((1 - t_o)/2, t_o)\,,\ C = (1, t_o).$$

2. Si calcola la riparametrizzazione lineare di k sul segmento AB, cioè sull'intervallo $[0,(1-t_o)/2]$:

$$s \in [0,(1-t_o)/2] \to x_o \in X\,.$$

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ sul segmento BC, cioè sull'intervallo $[(1-t_o)/2,1]$:

$$s \in [(1-t_o)/2,1] \to \frac{2s-1+t_o}{1+t_o} \in [0,1] \to \sigma(\frac{2s-1+t_o}{1+t_o}) \in X\,.$$

4. Si definisce $G(s,t_o)$ incollando le due riparametrizzazioni di k e σ precedentemente costruite. □

PROPOSIZIONE 2.4.29. *Sia $k(t) = x_o$, $t \in I$, il laccio costante di (X,x_o) in x_o. Siano σ e $\overline{\sigma}$ un laccio di (X,x_o) di punto base x_o e il suo inverso* (*cfr.* **Esempio 2.3.5**)*, rispettivamente. Allora risulta*

$$\sigma * \overline{\sigma} \sim \overline{\sigma} * \sigma \sim k\,, \tag{2.27}$$

cioè $\sigma * \overline{\sigma}$, $\overline{\sigma} * \sigma$ e k sono omotopi.

DIMOSTRAZIONE. Un'omotopia tra $\sigma * \overline{\sigma}$ e k è

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma(2(1-t)s) & \text{se} \quad 0 \le 2s \le 1 \\ \\ \sigma((1-t)(2-2s)) & \text{se} \quad 1 \le 2s \le 2 \end{cases} \tag{2.28}$$

Infatti, H è continua e risulta

$$H(s,0) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{se} \quad 0 \le 2s \le 1 \\ \\ \sigma(2-2s) = \overline{\sigma}(2s-1) & \text{se} \quad 1 \le 2s \le 2 \end{cases} = \sigma{*}\overline{\sigma}(s)\,,\ \ H(s,1) = \sigma(0) = x_o\,,$$

e

$$H(0,t) = H(1,t) = \sigma(0) = x_o\,.$$

L'omotopia H definita dalla (2.28) si rappresenta mediante il grafico della **Figura 2.6** e, per calcolarla, si usa il seguente procedimento.

1. Per ogni $t_o \in I$, si considera l'arco σ_{t_o} di X di estremi $x_o, \sigma(1-t_o)$ definito da

$$\sigma_{t_o}\ :\ s \in [0,1]\ \to\ \sigma((1-t_o)s) \in X.$$

Con questa posizione, $\overline{\sigma}_{t_o}$ è l'arco di X di estremi $\sigma(1-t_o)$ e x_o definito da

$$\overline{\sigma}_{t_o}\ :\ s\in[0,1]\ \rightarrow\ \sigma_{t_o}(1-s)=\sigma((1-t_o)(1-s))$$

e la composizione $\sigma_{t_o}*\overline{\sigma}_{t_o}$ è un laccio di X con punto base x_o.

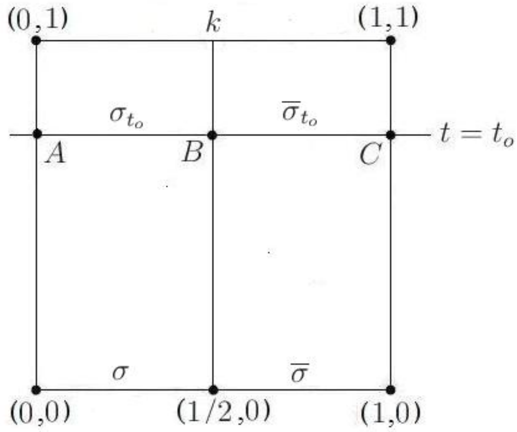


Figura 2.6: Schema per l'omotopia (2.28) tra $\sigma*\overline{\sigma}$ e k

2. Nel piano di coordinate (s,t) si considerano i punti

$$A=(0,t_o)\,,\ B=(1/2,t_o)\,,\ C=(1,t_o)$$

della retta $t=t_o$, con $t_o\in I$ (*cfr.* **Figura 2.7**).

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ_{t_o} sul segmento AB, cioè sull'intervallo $[0,1/2]$:

$$s\in[0,1/2]\rightarrow 2s\in[0.1]\rightarrow\sigma_{t_o}(2s)=\sigma(2(1-t_o)s)\in X\,.$$

4. Si calcola la riparametrizzazione lineare di $\overline{\sigma}_{t_o}$ sul segmento BC, cioè sull'intervallo $[1/2,1]$:

$$s\in[1/2,1]\rightarrow 2s-1\in[0,1]\rightarrow\overline{\sigma}_{t_o}(2s-1)=\sigma((1-t_o)(2-2s))\in X\,.$$

5. Si definisce $H(s,t_o)$ incollando le due riparametrizzazioni di σ_{t_o} e $\overline{\sigma}_{t_o}$ precedentemente costruite.

Scambiando il ruolo di σ e $\overline{\sigma}$ nella (2.28) e tenendo presente che $\overline{\overline{\sigma}}=\sigma$, si trova un'omotopia tra $\overline{\sigma}*\sigma$ e k. $\square$

ESERCIZIO 2.4.30. *Provare che i risultati delle* **Proproposizioni 2.4.27**, **2.4.28**, **2.4.29** *valgono, con dimostrazioni analoghe, anche per l'omotopia tra archi di* X *da* x_o *a* x_1. $\square$

2.5 Gruppo fondamentale

Se (X, x_o) è uno spazio puntato, la **Proposizione 2.4.22** assicura che *la relazione di omotopia sull'insieme dei lacci di* (X, x_o) *con punto base* x_o *è di equivalenza.* Denotiamo con $\Omega_1(X, x_o)$ l'insieme dei lacci di (X, x_o) con punto base $x_o \in X$ e osserviamo che l'operazione $*$ di concatenazione tra archi induce un'operazione binaria su $\Omega_1(X, x_o)$. Consideriamo l'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_o) = \Omega_1(X, x_o)/\sim, \tag{2.29}$$

di $\Omega_1(X, x_o)$ rispetto alla relazione $\sim$ di omotopia tra lacci. Un elemento di $\pi_1(X, x_o)$ è, dunque, una classe completa di omotopia di lacci di (X, x_o) di punto base x_o; ***la classe individuata da un laccio*** σ ***sarà denotata con*** $[\sigma]$.

PROPOSIZIONE 2.5.1. *Siano* $\sigma, \sigma', \tau, \tau' \in \Omega_1(X, x_o)$ *quattro lacci di* (X, x_o) *di punto base* x_o. *Siano* F, G *omotopie di* σ *in* σ' *e di* τ *in* τ', *rispettivamente. Allora la funzione*

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X,$$

definita da

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s, t) & \textit{se } \ 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \\ G(2s-1, t) & \textit{se } \ \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}, \ \textit{con} \ (s,t) \in I \times I, \tag{2.30}$$

è un'omotopia tra $\sigma * \tau$ *e* $\sigma' * \tau'$. *Ne segue che l'operazione* $*$ *di concatenazione tra lacci in* $\Omega_1(X, x_o)$ *è compatibile con la relazione di omotopia, cioè*

$$\sigma, \sigma', \tau, \tau' \in \Omega_1(X, x_o), \ \sigma \sim \sigma', \tau \sim \tau' \Rightarrow \sigma * \tau \sim \sigma' * \tau'. \tag{2.31}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che H è ben definita perché le restrizioni di H agli insiemi $[0, 1/2] \times I$ e $[1/2, 1] \times I$ sono continue e coincidono su $\{1/2\} \times I$, che è un chiuso di $I \times I$. Allora H è continua su $I \times I$ in forza del **Lemma di incollamento 2.3.6**. Il resto della dimostrazione è una semplice verifica. Si osservi che l'omotopia H si può rappresentare mediante il grafico della **Figura 2.7**. □

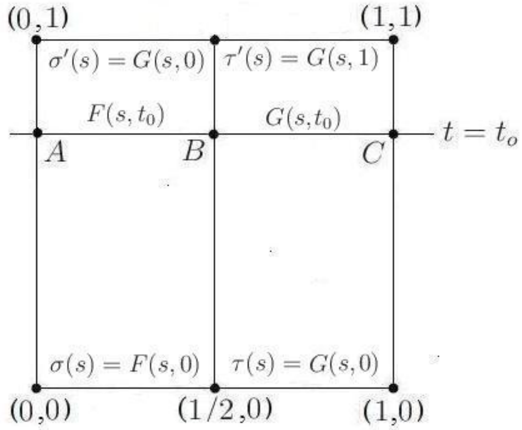


Figura 2.7: Schema per l'omotopia (2.30) tra $\sigma * \tau$ e $\sigma' * \tau'$

La proposizione precedente assicura che è ben definita in $\pi_1(X, x_o)$ la seguente operazione di ***moltiplicazione***

$$[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]\,, \quad \text{per ogni } [\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_o)\,, \tag{2.32}$$

che, come vedremo, è un'operazione di gruppo. Nel seguito, per semplificare le notazioni, porremo

$$[\sigma][\tau] = [\sigma] * [\tau]\,, \quad \text{per ogni } [\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_o)\,. \tag{2.33}$$

PROPOSIZIONE 2.5.2. *La struttura algebrica* $(\pi_1(X, x_o), *)$ *definita dalla* **(2.32)** *risulta un gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. La ***proprietà associativa*** segue dalla **(2.22)**; infatti si ha:

$$([\sigma][\tau])[\theta] = [\sigma * \tau][\theta] = [(\sigma * \tau) * \theta] = [\sigma * (\tau * \theta)] = [\sigma][(\tau * \theta)] = [\sigma]([\tau][\theta])\,,$$

per ogni $[\sigma], [\tau], [\theta] \in \pi_1(X, x_o)$.
L'***elemento neutro***, in forza della **(2.24)**, è la classe del laccio costante $k(t) = x_o$, $t \in I$, avendosi

$$[\sigma][k] = [\sigma * k] = [k * \sigma] = [k][\sigma] = [\sigma]\,,$$

per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$.
Per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$, in forza della **(2.27)**, l'***inverso*** dell'elemento $[\sigma]$ è $[\sigma]^{-1} = [\overline{\sigma}]$, avendosi

$$[\sigma][\sigma]^{-1} = [\sigma][\overline{\sigma}] = [\sigma * \overline{\sigma}] = [\overline{\sigma} * \sigma] = [\overline{\sigma}][\sigma] = [\sigma]^{-1}[\sigma] = [k]\,.$$

Resta così provato che $(\pi_1(X, x_o), *)$ è un gruppo. $\square$

OSSERVAZIONE 2.5.3. Se $\sigma, \tau, \theta \in \Omega_1(X, x_o)$, l'espressione $\sigma * \tau * \theta$ non ha significato perché è $(\sigma * \tau) * \theta \neq \sigma * (\tau * \theta)$. È, invece, priva di ambiguità l'espressione $[\sigma * \tau * \theta]$ perché risulta $[(\sigma * \tau) * \theta] = [\sigma * (\tau * \theta)]$. □

DEFINIZIONE 2.5.4. (Gruppo fondamentale) Il gruppo $(\pi_1(X, x_o), *)$ prende il nome di ***gruppo fondamentale*** dello spazio puntato (X, x_o) e si denota semplicemente con $\pi_1(X, x_o)$. □

Il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_o)$ dipende, per costruzione, dal punto x_o. In effetti, però, possiamo mostrare che esso dipende soltanto dalla componente connessa per archi di x_o.

PROPOSIZIONE 2.5.5. *Se x_o, x_o' sono punti appartenenti ad una stessa componente connessa per archi dello spazio topologico X, allora i gruppi $\pi_1(X, x_o)$ e $\pi_1(X, x_o')$ sono isomorfi. In particolare, se X è connesso per archi, il gruppo $\pi_1(X, x_o)$, a meno di isomorfismi, non dipende dalla scelta del punto x_o.*

DIMOSTRAZIONE. Si fissi un arco α di X di punto iniziale x_o e punto finale x_o' e sia $\overline{\alpha}$ l'arco opposto ad α. Considerati due lacci omotopi $\sigma, \sigma' \in \Omega_1(X, x_o)$, si osservi che $(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha$ e $(\overline{\alpha} * \sigma') * \alpha$ sono due lacci omotopi con punto base x_o' (*cfr.* **Esercizio 2.4.30**). Allora, è ben definita la funzione

$$\Phi_\alpha : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \to [(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha] \in \pi_1(X, x_o') \tag{2.34}$$

che risulta un omomorfismo di gruppi. Si ha, infatti,

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha([\sigma][\tau]) &= \Phi_\alpha([\sigma * \tau]) \\
&= [(\overline{\alpha} * (\sigma * \tau)) * \alpha] \\
&= [(\overline{\alpha} * (\sigma * k * \tau)) * \alpha] && \text{(per la } \mathbf{(2.24)}\text{)} \\
&= [(\overline{\alpha} * ((\sigma * (\alpha * \overline{\alpha})) * \tau)) * \alpha] && \text{(per la } \mathbf{(2.27)}\text{)} \\
&= [((\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha) * ((\overline{\alpha} * \tau) * \alpha)] && \text{(per la } \mathbf{(2.22)}\text{)} \\
&= \Phi_\alpha([\sigma])\Phi_\alpha([\tau])\,.
\end{aligned}$$

D'altra parte, considerata la funzione

$$\Phi_{\overline{\alpha}} : [\tau] \in \pi_1(X, x_o') \to [(\alpha * \tau) * \overline{\alpha}] \in \pi_1(X, x_o)\,,$$

per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$ e $[\tau] \in \pi_1(X, x_o')$, risulta

$$\Phi_{\overline{\alpha}} \circ \Phi_\alpha([\sigma]) = \Phi_{\overline{\alpha}}([(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha]) = [\alpha * ((\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha) * \overline{\alpha}] = [(\alpha * \overline{\alpha}) * \sigma * (\alpha * \overline{\alpha})] = [\sigma]$$

e, analogamente, $\Phi_\alpha \circ \Phi_{\overline{\alpha}}([\tau]) = [\tau]$. Ne segue che $\Phi_{\overline{\alpha}}$ è l'inversa di Φ_α e, quindi, Φ_α, risultando biunivoca, è un isomorfismo. □

OSSERVAZIONE 2.5.6. (L'isomorfismo Φ_α non è canonico) È da notare che la costruzione dell'isomorfismo **(2.34)** dipende in modo essenziale dalla scelta dell'arco α. In altre parole, se x_o, x'_o sono punti appartenenti ad una stessa componente connessa per archi dello spazio topologico X, allora i gruppi $\pi_1(X, x_o)$ e $\pi_1(X, x'_o)$ sono isomorfi ma *non canonicamente isomorfi.* □

Tenendo conto della **Proposizione 2.5.5**, se X è uno spazio topologico connesso per archi e x_o un suo punto, il gruppo $\pi_1(X, x_o)$, a meno di isomorfismi, non dipende da x_o e, per tale motivo, sarà detto ***gruppo fondamentale di*** X e sarà denotato con $\pi_1(X)$.

2.5.1 Funtorialità del gruppo fondamentale

Siano $(X, x_o), (Y, y_o)$ due spazi topologici puntati. Ad ogni mappa $f : (X, x_o) \to (Y, y_o)$ possiamo associare una funzione f_* di $\Omega_1(X, x_o)$ in $\Omega_1(Y, y_o)$ definita da

$$f_* : \sigma \in \Omega_1(X, x_o) \to f \circ \sigma \in \Omega_1(Y, y_o)$$

e, se σ, σ' sono lacci omotopi di $\Omega_1(X, x_o)$, allora $f \circ \sigma$ e $f \circ \sigma'$ sono lacci omotopi di $\Omega_1(Y, y_o)$ (*cfr.* **Proposizione 2.4.10**). Ne segue che f_* si estende ai gruppi fondamentali di (X, x_o) e (Y, y_o) nel seguente modo:

$$f_* : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \to [f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, y_o)\,. \tag{2.35}$$

Inoltre, per ogni $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_o)$, risulta

$$f_*([\sigma][\tau]) = f_*([\sigma * \tau]) = [f \circ (\sigma * \tau)] = [(f \circ \sigma) * (f \circ \tau)] = [f \circ \sigma][f \circ \tau] = f_*([\sigma]) f_*([\tau])$$

da cui si ricava che $f_* : \pi_1(X, x_o) \to \pi_1(Y, y_o)$ *è un omomorfismo di gruppi.* L'omomorfismo f_* si dice ***indotto da*** f.

ESEMPIO 2.5.7. (f costante $\Rightarrow f_*$ nullo) Sia $f : X \to Y$ una funzione costante con $f(x) = y_o$, per ogni $x \in X$, e osserviamo che, per ogni laccio σ di X, la funzione $f \circ \sigma$ è il laccio di Y costante in y_o e, quindi, $[f \circ \sigma]$ è l'unità del gruppo $\pi_1(Y, y_o)$. Allora, per ogni $x_o \in X$, la funzione $f_* : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \to [f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, y_o)$ è l'omomorfismo nullo, cioè f_* trasforma ogni elemento di $\pi_1(X, x_o)$ nell'elemento neutro di $\pi_1(Y, y_o)$. □

PROPOSIZIONE 2.5.8. *La legge π_1 che associa ad ogni spazio topologico puntato (X, x_o) il suo gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_o)$ e ad ogni mappa tra due spazi topologici puntati $f : (X, x_o) \to (Y, y_o)$ l'omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(X, x_o) \to \pi_1(Y, y_o)$ è un funtore covariante della categoria degli spazi topologici puntati nella categoria dei gruppi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f:(X,x_o)\to(Y,y_o)$ e $g:(Y,y_o)\to(T,t_o)$ sono mappe tra spazi topologici puntati e $[\sigma]\in\pi_1(X,x_o)$, risulta

$$(g\circ f)_*([\sigma])=[(g\circ f)\circ\sigma]=[g\circ(f\circ\sigma)]=g_*([f\circ\sigma])=g_*(f_*([\sigma]))=(g_*\circ f_*)([\sigma])\,,$$

cioè

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*\,. \tag{2.36}$$

Inoltre, per ogni $[\sigma]\in\pi_1(X,x_o)$ risulta

$$(i_X)_*([\sigma])=[i_X\circ\sigma]=[\sigma]=i_{\pi_1(X,x_o)}([\sigma])\,, \tag{2.37}$$

cioè $(i_X)_*=i_{\pi_1(X,x_o)}$, per ogni spazio topologico puntato (X,x_o). L'asserto è così provato. □

PROPOSIZIONE 2.5.9. *Siano $f,g:X\to Y$ due mappe omotope dello spazio topologico X nello spazio topologico Y e x_o un punto di X. Sia F un'omotopia di f in g e $\alpha(t)=F(x_o,t)$, $t\in I$, l'arco in Y tra $f(x_o)$ e $g(x_o)$ indotto dall'omotopia F. Allora, il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,f(x_o)) \arrow[dd, "\Phi_\alpha"] \\
\pi_1(X,x_o) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y,g(x_o))
\end{tikzcd}$$

è commutativo; cioè $g_*=\Phi_\alpha\circ f_*$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'isomorfismo di gruppi **(2.34)**

$$\Phi_\alpha\ :\ [\theta]\in\pi_1(Y,f(x_o))\ \to\ [(\overline{\alpha}*\theta)*\alpha]\in\pi_1(Y,g(x_o))$$

e osserviamo che, per ogni $[\sigma]\in\pi_1(X,x_o)$, si ha

$$\Phi_\alpha\circ f_*([\sigma])=\Phi_\alpha([f\circ\sigma])=[(\overline{\alpha}*(f\circ\sigma))*\alpha]\quad\text{e}\quad g_*([\sigma])=[g\circ\sigma]\,. \tag{2.38}$$

D'altra parte, la funzione continua

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(1-4s) & \text{se}\quad 0\le 4s\le 1-t\\[2ex] F(\sigma(\frac{4s+t-1}{3t+1}),t) & \text{se}\quad 1-t\le 4s\le 2(1+t)\\[2ex] \alpha(2s-1) & \text{se}\quad 2(1+t)\le 4s\le 4\end{cases}\quad,\ (s,t)\in I\times I\,,$$

è un'omotopia tra i lacci di Y definiti da $(\overline{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha$ e $g \circ \sigma$, avendosi

$$H(s,0) = \begin{cases} \alpha(1-4s) = \overline{\alpha}(4s) & \text{se } \ 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(\sigma(4s-1),0) = f(\sigma(4s-1)) & \text{se } \ \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s-1) & \text{se } \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\overline{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha \,,$$

$$H(s,1) = F(\sigma(s),1) = g \circ \sigma(s)\,,$$
$$H(0,t) = H(1,t) = \alpha(1) = g(x_o).$$

Ne segue che $[(\overline{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha] = [g \circ \sigma]$, e dalle (2.38) abbiamo $\Phi_\alpha \circ f_* = g_*$, come volevamo provare. □

COROLLARIO 2.5.10. *Sia $f : X \to Y$ una mappa omotopa ad una funzione costante $g : x \in X \to y_o \in Y$. Allora, per ogni $x_o \in X$, l'omomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_o) \to \pi_1(Y, y_o)$ è l'omomorfismo nullo; cioè f_* trasforma ogni elemento di $\pi_1(X, x_o)$ nell'elemento neutro di $\pi_1(Y, y_o)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se, nelle nostre ipotesi, applichiamo il risultato della proposizione precedente, abbiamo $\Phi_\alpha \circ f_*([\sigma]) = g_*([\sigma])$, ove g_* è l'omomorfismo nullo **(***cfr.* **Esempio 2.5.7)** e Φ_α è un isomorfismo. Ne segue che $\Phi_\alpha \circ f_*$ è l'omomorfismo nullo e, di conseguenza, anche f_* è tale. □

PROPOSIZIONE 2.5.11. *Siano X e Y spazi topologici connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X \times Y)$ dello spazio prodotto $X \times Y$ risulta isomorfo al prodotto dei gruppi $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $x_o \in X$, un punto $y_o \in Y$ e consideriamo le proiezioni canoniche

$$p^X : (x,y) \in X \times Y \to x \in X\,, \quad p^Y : (x,y) \in X \times Y \to y \in Y\,.$$

Gli omomorfismi

$$p^X_* : [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_o, y_o)) \to [p^X \circ \alpha] \in \pi_1(X, x_o)$$

e

$$p^Y_* : [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_o, y_o)) \to [p^Y \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_o)$$

inducono l'omomorfismo

$$f : [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_o, y_o)) \to (p^X_*([\alpha]), p^Y_*([\alpha])) \in \pi_1(X) \times \pi_1(Y)\,,$$

che proveremo essere un isomorfismo.
Osserviamo che risulta $k = (k_{x_o}, k_{y_o})$, ove k, k_{x_o}, k_{y_o} sono rispettivamente il laccio

di $X \times Y$ costante in (x_o, y_o), il laccio di X costante in x_o e il laccio di Y costante in y_o e supponiamo che per un laccio α di $X \times Y$ puntato in (x_o, y_o) sia $[\alpha] \in Ker\, f$, cioè $f([\alpha]) = ([k_{x_o}], [k_{y_o}])$. Allora esistono un'omotopia F_X tra i lacci $p^X \circ \alpha$ e k_{x_o} e una F_Y tra $p^Y \circ \alpha$ e k_{y_o} e queste inducono l'omotopia definita da $F = (F_X, F_Y)$ tra α e k. Ne segue che $Ker\, f = \{[k]\}$ e così f è iniettivo.
Per provare che f è suriettivo, consideriamo $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$, $[\tau] \in \pi_1(Y, y_o)$ e il laccio α di $X \times Y$ con punto base (x_o, y_o) definito da $\alpha(s) = (\sigma(s), \tau(s))$, $s \in I$. Risulta $p^X \circ \alpha = \sigma$ e $p^Y \circ \alpha = \tau$, cioè $f([\alpha]) = ([\sigma], [\tau])$ e l'asserto è provato. □

2.5.2 Gruppo fondamentale ed equivalenze omotopiche

In questo paragrafo studieremo le relazioni che intercorrono tra i gruppi fondamentali di spazi omotopicamente equivalenti. Vedremo, tra l'altro, che il gruppo fondamentale, nell'ambito degli spazi connessi per archi, è un invariante omotopico, come era da prevedere grazie anche alla funtorialità della sua costruzione (*cfr.* **Proposizione 2.5.8**).

PROPOSIZIONE 2.5.12. *Siano $f : X \to X$ una mappa dello spazio topologico X in sé e x_o un punto di X. Allora, se f è omotopa all'identità id_X di X, l'omomorfismo di gruppi* **(2.35)**

$$f_* \,:\, [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \;\to\; [f \circ \sigma] \in \pi_1(X, f(x_o))$$

è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Siano F un'omotopia tra id_X e f, $\alpha(t) = F(x_o, t)$, $t \in I$, l'arco tra x_o e $x'_o = f(x_o)$ indotto da F e consideriamo l'isomorfismo di gruppi **(2.34)**

$$\Phi_\alpha \,:\, [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \;\to\; [(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha] \in \pi_1(X, x'_o)\,.$$

Proveremo l'asserto facendo vedere che l'omomorfismo f_* è uguale all'isomorfismo Φ_α; mostreremo cioè che $(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha$ e $f \circ \sigma$ sono lacci omotopi con punto base $f(x_o)$, per ogni laccio σ con punto base x_o. A tale scopo osserviamo che la funzione continua

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(1-4s) & \text{se} \quad 0 \le 4s \le 1-t \\[2ex] F(\sigma(\frac{4s+t-1}{3t+1}), t) & \text{se} \quad 1-t \le 4s \le 2(1+t) \\[2ex] \alpha(2s-1) & \text{se} \quad 2(1+t) \le 4s \le 4 \end{cases} \quad,\; (s,t) \in I \times I\,, \qquad (2.39)$$

è un'omotopia tra $(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha$ e $f \circ \sigma$. Si ha, infatti, che

$$H(s,0) = \begin{cases} \alpha(1-4s) = \overline{\alpha}(4s) & \text{se } \; 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \\ F(\sigma(4s-1),0) = \sigma(4s-1) & \text{se } \; \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \\ \alpha(2s-1) & \text{se } \; \frac{1}{2} \leq 4s \leq 1 \end{cases} = (\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha \,,$$

$$H(s,1) = F(\sigma(s),1) = f \circ \sigma(s) \,,$$
$$H(0,t) = H(1,t) = \alpha(1) = f(x_o)$$

e l'asserto è completamente provato. Si osservi che l'omotopia H si può rappresentare mediante il grafico della **Figura 2.8**. □

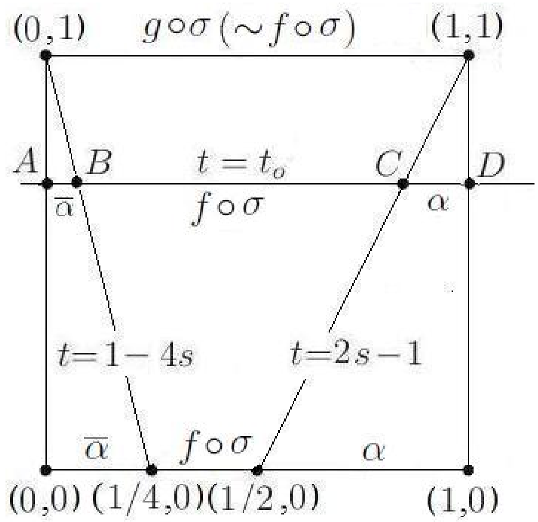


Figura 2.8: Schema per l'omotopia (2.39) tra $(\overline{\alpha} * \sigma) * \alpha$ e $f \circ \sigma$.

PROPOSIZIONE 2.5.13. *Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica e x_o un punto di X. Allora l'omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(X, x_o) \to \pi_1(Y, f(x_o))$ è un isomorfismo. In particolare, due spazi connessi per archi e omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $g : Y \to X$ è un'inversa omotopica di f, considerati gli omomorfismi

$$\pi_1(X, x_o) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_o)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_o))) \,,$$

abbiamo $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, in forza della **(2.36)**. Inoltre, essendo $(g \circ f)_*$ omotopo a id_X, per la **Proposizione 2.5.12**, $(g \circ f)_*$ è un isomorfismo e, di conseguenza, f_*

è un monomorfismo e g_* è un epimorfismo. D'altra parte, ragionando in modo analogo con gli omomorfismi

$$\pi_1(Y, f(x_o)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_o))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(x_o))))$$

e tenendo presente che $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ è omotopo a id_Y, si ha che g_* è un monomorfismo. Ne segue che g_*, e quindi f_*, è un isomorfismo e l'asserto è provato. □

2.6 Spazi semplicemente connessi

Tra gli spazi topologici connessi per archi, i primi che viene naturale studiare sono quelli con gruppo fondamentale banale. Questi, come vedremo, rivestono un ruolo particolarmente importante in geometria e ciò giustifica la definizione che segue.

DEFINIZIONE 2.6.1. Uno spazio topologico X si dice ***semplicemente connesso*** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè $\pi_1(X) = \{1\}$. □

PROPOSIZIONE 2.6.2. *Uno spazio topologico X connesso per archi è semplicemente connesso se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:*

(1) *ogni laccio di X con punto base x_o è omotopo al laccio costante in x_o, per ogni $x_o \in X$;*
(2) *due arbitrari archi di X con gli stessi estremi sono omotopi.* □

DIMOSTRAZIONE. La prima parte è immediata; proviamo quindi la seconda. Se $\pi_1(X) = \{1\}$ e f, g sono due archi di X da x_o a x_1, allora $f * \overline{g}$ è un laccio di X con punto base x_o omotopo al laccio costante in x_o e $\overline{g} * g$ è un laccio di X con punto base x_1 omotopo al laccio costante in x_1. Ne segue che $f \sim f*(\overline{g}*g) \sim (f*\overline{g})*g \sim g$. Viceversa, se vale la (2), per ogni $x_o \in X$, ogni laccio di X con punto base x_o è omotopo al laccio costante in x_o e, di conseguenza, $\pi_1(X) = \{1\}$. □

ESEMPIO 2.6.3. (Spazi contraibili) Uno spazio topologico che si riduce ad un punto è ovviamente semplicemente connesso. Dalla **Proposizione 2.5.13** segue allora che ogni spazio topologico contraibile è semplicemente connesso. In particolare, risultano semplicemente connessi i sottospazi stellati di $\mathbb{R}^n$ **(***cfr.* **Proposizione 2.4.17)** e, quindi, $\mathbb{R}^n$ stesso e i suoi sottospazi convessi, tra cui D^n e B^n, per ogni $n > 0$. Risulta, inoltre, semplicemente connesso $S^n \setminus \{x_o\}$, per ogni punto $x_o \in S^n$ e $n > 0$ **(***cfr.* **Corollario 2.4.18)**. □

PROPOSIZIONE 2.6.4. *Sia $X = A \cup B$, con A, B aperti semplicemente connessi e $A \cap B$ connesso per archi. Allora X è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. In forza della **Proposizione 2.3.13**, X è connesso per archi, così basta provare che per un punto $x_o \in A \cap B$ il gruppo $\pi_1(X, x_o)$ è banale (*cfr.* **Proposizione 2.5.5**); cioè che ogni laccio $\sigma : I \to X$ di punto base x_o è omotopo ad un laccio di A con lo stesso punto base.
A tale scopo, cominciamo con l'osservare che $\sigma^{-1}(A)$ e $\sigma^{-1}(B)$ sono due aperti di I che ricoprono I; quindi risulta

$$\sigma^{-1}(A) = \bigcup_{s \in S} J_{A,s} \ \ , \ \ \sigma^{-1}(B) = \bigcup_{t \in T} J_{B,t} \, ,$$

ove, per ogni $s \in S$ e $t \in T$, $J_{A,s}$ e $J_{B,t}$ sono intervalli aperti o semiaperti (contenenti 0 o 1 a seconda che sono aperti a destra o a sinistra, rispettivamente). Osserviamo esplicitamente che risulta

$$\sigma(J_{A,s}) \subseteq A \ \ , \ \ \sigma(J_{B,t}) \subseteq B \, ,$$

per ogni $s \in S$ e $t \in T$. Inoltre, la famiglia

$$\{J_{A,s} \ : \ s \in S\} \cup \{J_{B,t} \ : \ t \in T\}$$

è un ricoprimento di aperti di I dal quale, essendo I compatto, se ne può estrarre uno finito. A partire da questo ricoprimento possiamo costruire una suddivisione di I mediante un numero finito di punti $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tali che

- $\sigma([t_{i-1}, t_i])$ è contenuto in A o in B,
- n è il minimo possibile per una suddivisione di questo tipo.

In queste ipotesi, risulta $\sigma(t_i) \in A \cap B$, per ogni $i = 1, 2, \cdots, n$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe un intero j tale che $\sigma(t_j) \notin A$ o $\sigma(t_j) \notin B$. Allora, se per esempio è $\sigma(t_j) \notin A$, risulta

$$\sigma([t_{j-1}, t_j]) \cup \sigma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq B,$$

da cui avremmo $\sigma([t_{j-1}, t_{j-1}]) \subseteq B$. Ciò è assurdo perché ci permetterebbe di eliminare t_j dalla suddivisione di I che era stata scelta minima rispetto ad n.
Consideriamo ora, per ogni $i = 1, 2, \cdots, n$, l'arco

$$\sigma_i \ : \ s \in I \ \to \ \sigma((1-s)t_{i-1} + st_i) \in X \tag{2.40}$$

riparametrizzazione su I della restrizione di σ a $[t_{i-1}, t_i]$, che per costruzione è un arco di A o di B e proviamo che σ_i, se non è un arco di A, è necessariamente omotopo ad un arco di A.
Se σ_i non è un arco di A, è un arco di B e, dal momento che $A \cap B$ contiene gli

estremi di σ_i ed è connesso per archi, $A \cap B$ contiene anche un arco f di estremi $f(0) = x_o$ e $f(1) = \sigma_i(0)$ e uno g di estremi $g(0) = x_o$ e $g(1) = \sigma_i(1)$. Allora $f * \sigma_i * \overline{g}$, essendo un laccio di B puntato in x_o e essendo B semplicemente connesso, è omotopo al laccio costante k_{x_o} in B e, quindi, in X. Ne segue che σ_i è omotopo in X all'arco $\overline{f} * g$, che è contenuto in $A \cap B$ e quindi in A, mediante un'omotopia

$$F_i \, : \, (s,t) \in I \times I \, \rightarrow \, F_i(s,t) \in A$$

tra σ_i e $\overline{f} * g$. Risulta quindi

$$F_i(s,0) = \sigma_i(s) \, , \;\; F_i(s,1) = \overline{f} * g(s) \, , \;\; F_i(0,t) = \sigma_i(s) \, , \;\; F_i(1,t) = \sigma_i(1) \, ,$$

per ogni $(s,t) \in I \times I$. A questo punto, se consideriamo le riparametrizzazioni

$$(s,t) \in [t_{i-1}, t_i] \times I \, \rightarrow \, F_i(\frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, t) \in A$$

delle F_i a $[t_{i-1}, t_i] \times I$ e le incolliamo, otteniamo la funzione $F : (s,t) \in I \times I \rightarrow A$ definita da

$$F(s,t) = F_i(\frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, t) \, ; \;\; (s,t) \in [t_{i-1}, t_i] \times I \, , \;\; i = 1, 2, \ldots, n,$$

e questa, essendo $t_o = 0$, è un'omotopia tra

$$F(s,0) = F_1(\frac{s}{t_1}, 0) = \sigma_1(\frac{s}{t_1}) = \sigma\left((1 - \frac{s}{t_1})t_o + \frac{s}{t_1}t_1\right) = \sigma(s)$$

(*cfr.* (2.40)) e $F(s,1)$, che è un laccio di A. $\square$

Una classe notevole di spazi semplicemente connessi è data dalle superfici sferiche S^n, con $n > 1$, come mostra il risultato che segue. Il caso della circonferenza S^1 sarà studiato a parte.

PROPOSIZIONE 2.6.5. *S^n è semplicemente connesso, per ogni intero $n > 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sono punti antipodali di S^n, i sottospazi $A = S^n \setminus \{\boldsymbol{a}\}$, $B = S^n \setminus \{\boldsymbol{b}\}$ di S^n sono aperti e, essendo omeomorfi a $\mathbb{R}^n$, sono anche semplicemente connessi. D'altra parte, $S^n = A \cup B$ e $A \cap B$ è connesso per archi, così l'asserto segue dalla **Proposizione 2.6.4**.
Riteniamo utile per il Lettore riportare di seguito una seconda dimostrazione, indipendente dalla **Proposizione 2.6.4**, che sfrutta soltanto alcune proprietà geometriche di S^n.
Siano x_o, x_1 due punti di S^n e $y \in S^n$ un punto distinto da x_o e x_1. Allora $S^n \setminus \{y\}$,

essendo omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, è connesso per archi. Esiste, quindi, un arco in $S^n \setminus \{y\}$ di estremi x_o, x_1, che è anche un arco di S^n con gli stessi estremi. Così *S^n è connesso per archi.* D'altra parte, se α è un laccio di S^n di punto base x_o ed esiste un punto $y \in S^n$ non appartenente al supporto di α, allora α è omotopo alla funzione costante in x_o perché $S^n \setminus \{y\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, che è semplicemente connesso **(***cfr.* **Esempio 2.6.3)**. Questo significa che, per provare che $\pi_1(S^n) = \{1\}$, basta far vedere che ogni laccio σ in S^n di punto base x_o è omotopo ad un laccio α di base x_o per cui esiste $y \in S^n$ non appartenente al supporto di α.
A tale scopo, siano $\sigma : [0,1] \to S^n$ un laccio suriettivo di punto base x_o, $y \in S^n$ un punto diverso da x_o e diciamo $B = B^n_\epsilon(y) \cap S^n$ l'intersezione di S^n con un intorno sferico $B^n_\epsilon(y)$ di $\mathbb{R}^n$ di centro y e raggio ϵ con $x_o \notin B^n_\epsilon(y)$, cioè ϵ minore della distanza tra x_o e y. Si ha che B è un aperto di S^n, la chiusura $\overline{B}$ di B è omeomorfa a B^{n-1} e la frontiera ∂B di B è omeomorfa a S^{n-1}.
Poiché $\sigma(0) = \sigma(1) = x_o$ e $x_o \notin B$, la controimmagine $\sigma^{-1}(B)$ è un aperto di $[0,1]$ contenuto in $]0,1[$ e, quindi, è unione di intervalli $]a_j, b_j[$ a due a due disgiunti, con j variabile in un insieme di indici J. Osserviamo che, per ogni $j \in J$, a_j e b_j non appartengono a $\sigma^{-1}(B)$ e, quindi, $\sigma(a_j)$ e $\sigma(b_j)$ appartengono alla frontiera ∂B di B.
La controimmagine $\sigma^{-1}(y)$ ($\subseteq \sigma^{-1}(B)$), essendo un sottospazio chiuso e limitato di $[0,1]$, è compatto e, quindi, è contenuto nell'unione di un numero finito di intervalli $]a_j, b_j[$, con $j \in J$.
Consideriamo uno degli intervalli $]a_j, b_j[$ che intersecano $\sigma^{-1}(y)$ e denotiamo con σ_j la restrizione di σ a $]a_j, b_j[$, che può riguardarsi come un arco di S^n di estremi $\sigma(a_j), \sigma(b_j)$. Per costruzione, il codominio di σ_j è contenuto nella chiusura di B e $\sigma_j(a_j)$ e $\sigma_j(b_j)$ appartengono alla frontiera ∂B di B. Tale frontiera è connessa per archi e di conseguenza esiste un arco τ_j di ∂B di estremi $\sigma(a_j), \sigma(b_j)$. Si osservi che y non appartiene al codominio di τ_j perché $y \notin \partial B$. A questo punto, detotato con F un sottoinsieme finito di J per cui

$$\sigma^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{j \in F}]a_j, b_j[\,,$$

definiamo il laccio $\tau : [0,1] \to S^n$ nel seguente modo

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_j(t) & \text{se} \quad t \in]a_j, b_j[\text{ per qualche } j \in F \\ \\ \sigma(t) & \qquad \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Notiamo che il supporto di τ si ottiene modificando quello di σ mediante la sostituzione del supporto di ogni σ_j col corrispondente supporto di τ_j, con $j \in F$. Ora, poiché la chiusura di B è omeomorfa a B^{n-1}, che è uno spazio semplicemente connesso **(***cfr.* **Esempio 2.6.3)**, gli archi σ_j e τ_j sono omotopi, per ogni $j \in F$ e di conseguenza τ è omotopo a σ e non contiene y. Si ha così l'asserto. $\square$

COROLLARIO 2.6.6. $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ *è semplicemente connesso, per ogni* $n > 2$ *e per ogni punto* $x \in \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x, y \in S^n$, $x \neq y$, $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $S^n \setminus \{y\}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è omeomorfo a $S^n \setminus \{x, y\}$, $S^n \setminus \{x, y\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ e, di conseguenza, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Allora, l'asserto segue dalla proposizione precedente e dalle **Proposizioni 2.6.5 e 2.5.11**. $\square$

OSSERVAZIONE 2.6.7. (La connessione semplice non implica la contraibilità) È possibile provare (purtroppo non abbiamo ancora gli strumenti per farlo!) che, per ogni intero positivo n, S^n ***non è contraibile***. Abbiamo così che, per $n > 1$, S^n è un esempio di *spazio semplicemente connesso non contraibile.* $\square$

2.7 Gruppo fondamentale della circonferenza e alcune sue applicazioni

Provare in modo diretto che il gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi è non banale è, in generale, un problema non semplice. Per fare ciò, infatti, bisogna trovare due lacci tra i quali non vi è alcuna omotopia ed è proprio questo il punto delicato del problema. Vedremo, comunque, che ciò si può fare senza grosse difficoltà, ma in modo non banale, nel caso della circonferenza S^1.

Consideriamo la mappa

$$E \,:\, s \in \mathbb{R} \,\rightarrow\, \boldsymbol{s} = (cos2\pi s, sen2\pi s) \in S^1 \tag{2.41}$$

che, come facilmente si prova, è aperta, suriettiva e periodica di periodo 1.

LEMMA 2.7.1. Siano $g, g' : I \to \mathbb{R}$ archi di $\mathbb{R}$ di punto iniziale 0 e tali che $E \circ g = E \circ g'$. Allora risulta $g = g'$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, risulta $E(g(t)) = E(g'(t))$, cioè

$$(cos2\pi g(t), sen2\pi g(t)) = (cos2\pi g'(t), sen2\pi g'(t))\,,$$

e quindi $2\pi g(t) - 2\pi g'(t) = 2\pi(g(t) - g'(t))$ è un multiplo intero di 2π. Allora $g(t) - g'(t)$ è un intero, per ogni $t \in I$, e $(g - g')(I)$ è contenuto nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi. Ora osserviamo che $\mathbb{Z}$ è totalmente sconnesso, nel senso che le sue componenti connesse sono i singleton dei suoi punti, e $(g - g')(I)$ è connesso in quanto immagine del connesso I mediante una funzione continua. Ne segue che, essendo $g(0) = g'(0) = 0$, risulta $(g - g')(I) = \{0\}$ e cioè $g = g'$. $\square$

LEMMA 2.7.2. (Sollevamento degli archi) *Se* $f : I \to S^1$ *è un arco in* S^1 *di punto iniziale* $\boldsymbol{x}_o = (1,0)$, *esiste in* $\mathbb{R}$ *un unico arco* $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ *di punto iniziale* 0 *tale che* $f = E \circ \tilde{f}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, $f^{-1}(S^1 \setminus \{-f(t)\})$ è un aperto di I, che risulta unione di intervalli aperti o semiaperti (contenenti 0 o 1 a seconda che sono aperti a destra o a sinistra, rispettivamente) e, al variare di $t \in I$, questi intervalli danno un ricoprimento di aperti di I. Così, dalla compattezza di I e ragionando come nella dimostrazione della **Proposizione 2.6.4** , segue che esistono degli interi $t_o = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = 1$, con $t_o < t_1 < \cdots < t_n$, tali che

$$f([t_{j-1}, t_j]) \subseteq S^1 \setminus \{-f(t_{j-1})\}, \tag{2.42}$$

per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, posto $I_x = \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$, la funzione

$$E_x : s \in I_x \to \boldsymbol{s} \in E(I_x) = S^1 \setminus \{(-cos2\pi x, -sen2\pi x)\}, \tag{2.43}$$

restrizione di E a I_x e $E(I_x)$, è un omeomorfismo e denotiamo con $f_{|[c,d]}$ la restrizione di f ad un intervallo $[c,d] \subseteq I$. Allora, per $j = 1$,

$$f([0, t_1]) \subseteq S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

e quindi è possibile definire la mappa

$$f_1 = E_0^{-1} \circ f_{|[0,t_1]} \ : \ [0, t_1] \ \to \ \mathbb{R}\,,$$

per la quale risulta $f_1(0) = 0$ e $E \circ f_1 = f_{|[0,t_1]}$. Ora, procedendo per induzione su j, supponiamo che per $j > 1$ abbiamo definito una mappa

$$f_j : [0, t_j] \to \mathbb{R} \ \text{ tale che } \ f_j(0) = 0 \ \text{ e } \ E \circ f_j = f_{|[0,t_i]}$$

e, se è $j < n$, consideriamo la mappa (*cfr.* (2.43))

$$E^{-1}_{f_j(t_j)} \ : \ S^1 \setminus \{-E(f(t_j))\} \ \to \ \left(f_j(t_j) - \frac{1}{2}\,,\, f_j(t_j) + \frac{1}{2} \right) .$$

Allora, incollando f_j con $E^{-1}_{f_j(t_j)} \circ f_{|[t_j, t_{j+1}]}$, resta definita la mappa

$$f_{j+1} : [0, t_{j+1}] \to \mathbb{R}$$

per cui è$f_{j+1}(0) = 0$, $E \circ f_{j+1} = f_{|[t_j, t_{j+1}]}$ e così abbiamo che f_n è la mappa cercata $\tilde{f}$. L'unicità di $\tilde{f}$ è conseguenza del lemma precedente. □

L'arco $\tilde{f}$, di cui al precedente lemma, prende il nome di ***sollevamento di*** f ***a*** $\mathbb{R}$ ***di punto iniziale*** 0.

LEMMA 2.7.3. (Sollevamento delle omotopie) *Siano $f, g : I \to S^1$ due archi omotopi in S^1 di punto iniziale $(1,0)$, $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to \mathbb{R}$ gli unici sollevamenti a $\mathbb{R}$ di f, g di punto iniziale 0 e $F : I \times I \to S^1$ un'omotopia tra f e g. Allora esiste un'unica omotopia $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ tra $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ tale che $F = E \circ \tilde{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, sia $F_t : I \to S^1$ l'arco di S^1 di punto iniziale $(1,0)$, restrizione a $I \times \{t\}$ di $F : I \times I \to S^1$. Possiamo allora definire la funzione

$$\tilde{F} \,:\, (s,t) \in I \times I \,\to\, \tilde{F}_t(s) \in \mathbb{R}\,,$$

ove $\tilde{F}_t$ è l'unico sollevamento a $\mathbb{R}$ dell'arco F_t e risulta $E \circ \tilde{F} = F$. È possibile provare che $\tilde{F}$ è una funzione continua (per una dimostrazione si veda [8], Lemma 16.2, pag.155) e così $\tilde{F}$ è un'omotopia con la proprietà richiesta. Ora consideriamo un'altra omotopia $\tilde{F}'$ tra $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ tale che $F = E \circ \tilde{F}'$. Allora, per ogni $t \in I$ e per l'unicità del sollevamento degli archi di S^1, la restrizione di $\tilde{F}'$ a $I \times \{t\}$ coincide con il sollevamento $\tilde{F}_t$ di F_t e risulta $\tilde{F} = \tilde{F}'$. □

L'omotopia $\tilde{F}$, di cui al lemma precedente, prende il nome di ***sollevamento di*** F ***a*** $\mathbb{R}$.

Per ogni intero $n \in \mathbb{Z}$, consideriamo il laccio di S^1

$$\omega_n \,:\, s \in I \,\to\, (cos 2\pi ns, sen 2\pi ns) \in S^1 \tag{2.44}$$

di punto base $(1,0)$ e l'unico arco da 0 a n, sollevamento di ω_n a $\mathbb{R}$,

$$\tilde{\omega}_n \,:\, s \in I \,\to\, ns \in \mathbb{R}, \tag{2.45}$$

per cui risulta

$$\omega_n = E \circ \tilde{\omega}_n\,. \tag{2.46}$$

La **(2.46)**, parlando in modo informale, esprime il fatto che il supporto di ω_n si ottiene avvolgendo $|n|$ volte su S^1 l'intervallo $[0,n]$ di $\mathbb{R}$ partendo da $(1,0)$, in senso antiorario se $n > 0$ e in senso orario se $n < 0$, in modo che la restrizione di ω_n all'intervallo $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ sia un omeomorfismo tra $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ e $S^1 \setminus \{(1,0)\}$, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

LEMMA 2.7.4. *Ogni arco $\tilde{f}_n$ in $\mathbb{R}$ da 0 a n è omotopo a $\tilde{\omega}_n$, per ogni intero n. Ne segue che il laccio $E \circ \tilde{f}_n$ è omotopo a $\omega_n = E \circ \tilde{\omega}_n$, per ogni intero n.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso e dalla **Proposizione 2.6.2**. Comunque, si verifica subito che l'omotopia lineare $F(t,s) = (1-t)\tilde{f}_n + t\tilde{\omega}_n$ è un'omotopia tra $\tilde{f}_n$ e $\tilde{\omega}_n$. □

PROPOSIZIONE 2.7.5. *La funzione*

$$\Phi \,:\, n \in \mathbb{Z} \,\to\, [\omega_n] \in \pi_1(S^1) \tag{2.47}$$

è un omomorfismo tra il gruppo additivo di $\mathbb{Z}$ *e il gruppo fondamentale di* S^1.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo provare che, per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\Phi(m+n) = \Phi(m)\Phi(n), \tag{2.48}$$

cioè che $[\omega_{m+n}] = [\omega_m][\omega_n] = [\omega_m * \omega_n]$. A tale scopo, consideriamo in $\mathbb{R}$ la traslazione $\tau_m : x \in \mathbb{R} \to x + m \in \mathbb{R}$ e osserviamo che la mappa $\tilde{g} = \tilde{\omega}_m * (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$, definita da

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} \tilde{\omega}_m(2s) = 2ms & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n(2s-1) = (2s-1)n + m & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases},$$

è un arco in $\mathbb{R}$ tra 0 e $m+n$ da cui segue, in forza del **Lemma 2.7.4**, che

$$[\omega_{m+n}] = [E \circ \tilde{g}].$$

D'altra parte, risulta

$$E \circ \tilde{g}(s) = \begin{cases} (cos 2\pi(2ms), sen 2\pi(2ms)) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ (cos 2\pi(n(2s-1)+m), sen 2\pi(n(2s-1)+m) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases},$$

da cui, usando le formule di addizione delle funzioni seno e coseno, ricaviamo

$$E \circ \tilde{g}(s) = \begin{cases} (cos 2\pi(2ms), sen 2\pi(2ms)) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ (cos 2\pi n(2s-1), sen 2\pi n(2s-1)) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = \omega_m * \omega_n(s)\,.$$

Abbiamo così che $E \circ \tilde{g} = \omega_m * \omega_n$, cioè la **(2.48)**. □

PROPOSIZIONE 2.7.6. (Gruppo fondamentale di S^1) *Il gruppo fondamentale della circonferenza* $\pi_1(S^1)$ *è isomorfo al gruppo additivo di* $\mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Proveremo che l'omomorfismo Φ definito dalla **(2.47)** è un isomorfismo, cominciando col provare che Φ è suriettivo. Siano $[\alpha]$ un elemento di $\pi_1(S^1)$, con $\alpha(0) = \alpha(1) = (1,0)$, e $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ l'unico sollevamento di α ad $\mathbb{R}$ di punto iniziale 0. Poiché risulta

$$E \circ \tilde{\alpha}(1) = E(\tilde{\alpha}(1)) = (cos 2\pi\tilde{\alpha}(1), sen 2\pi\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = (1,0)\,,$$

deve esistere un intero n tale che $\tilde{\alpha}(1) = n$. Allora, in forza del **Lemma 2.7.4**, risulta

$$\Phi(n) = [\omega_n] = [E \circ \tilde{\omega}_n] = [E \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]$$

e Φ è suriettivo.
Proviamo ora che Φ è iniettivo. Nell'ipotesi che sia $\Phi(m) = \Phi(n)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, i lacci ω_m e ω_n sono omotopi e siano $F : I \times I \to S^1$ un'omotopia tra ω_m e ω_n e $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ l'omotopia tra $\tilde{\omega}_m$ e $\tilde{\omega}_n$, unico sollevamento a $\mathbb{R}$ di F. Ora, per ogni fissato $t \in I$, $\tilde{F}(s,t)$ è un arco in $\mathbb{R}$ il cui punto finale $\tilde{F}(1,t)$ è indipendente da t e, quindi, per $t = 0$ e $t = 1$ abbiamo

$$m = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = n\,.$$

Ne segue che Φ è iniettiva. □

COROLLARIO 2.7.7. *Il gruppo fondamentale del cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ è isomorfo a Z. Il gruppo fondamentale del toro $S^1 \times S^1$ è isomorfo a Z^2. In particolare, il cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ e il toro $S^1 \times S^1$ sono spazi topologici non isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza immediata della **Proposizione 2.5.11** e della **Proposizione 2.7.6**. □

Chiudiamo il paragrafo mostrando alcune applicazioni della **Proposizione 2.7.6**.

PROPOSIZIONE 2.7.8. $\mathbb{R}^2$ *non è omeomorfo a* $\mathbb{R}^n$, *per ogni* $n > 0$ *e diverso da due.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\mathbb{R}$ privato di un suo punto è uno spazio sconnesso mentre ciò non accade per $\mathbb{R}^2$. Ne segue che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ non possono essere omeomorfi.
Se x, y sono punti distinti di $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e z è un punto di $\mathbb{R}^2$, si ha che $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ è omeomorfo a $S^2 \setminus \{x, y\}$ che, a sua volta, è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Allora, in forza della **Proposizione 2.5.11**, risulta

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}) \simeq \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \times \{1\} \simeq \mathbb{Z}\,. \tag{2.49}$$

D'altra parte, per $n > 2$, se x, y sono punti distinti di $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e z è un punto di $\mathbb{R}^n$, si ha che $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$ è omeomorfo a $S^n \setminus \{x, y\}$ che, a sua volta, è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Allora, ancora in forza della **Proposizione 2.5.11**, risulta

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{z\}) \simeq \pi_1(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \simeq \{1\} \times \{1\} \simeq \{1\}\,. \tag{2.50}$$

Ora, se per $n > 2$ esistesse un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, detto z un punto di $\mathbb{R}^2$, gli spazi $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{f(z)\}$ sarebbero omeomorfi e, di conseguenza, avrebbero gruppi fondamentali isomorfi. Ciò è assurdo in forza delle **(2.49)** e **(2.50)**. □

La proposizione precedente è caso particolare del seguente teorema, la cui dimostrazione non viene riportata perché necessita di strumenti più profondi di quelli trattati in queste note.

PROPOSIZIONE 2.7.9. (Teorema dell'invarianza della dimensione) *$\mathbb{R}^m$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, per ogni $n, m > 0$ e diversi tra loro.*

DEFINIZIONE 2.7.10. Se A è un sottospazio di X, una mappa $r : X \to A$ prende il nome di ***retrazione*** di A su X se la restrizione di r ad A è l'identità id_A in A, cioè se $r \circ i = id_A$, i essendo la funzione inclusione di A in X ($i : a \in A \to a \in X$). Quando esiste una retrazione di A su X si dice che A è un ***retratto*** di X. □

PROPOSIZIONE 2.7.11. Se $r : X \to A$ è una retrazione di A su X e $a_o \in A$, allora gli omomorfismi

$$i_* : \pi_1(A, a_o) \to \pi_1(X, a_o) \ \text{ e } \ r_* : \pi_1(X, a_o) \to \pi_1(A, a_o)$$

sono rispettivamente un monomorfismo e un epimorfismo. In particolare $\pi_1(X, a_o)$ contiene il sottogruppo $i_*(\pi_1(A, a_o))$ isomorfo a $\pi_1(A, a_o)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $r \circ i = id_A$, dalla **Proposizione 2.5.12** abbiamo che $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ è un automorfismo di $\pi_1(A, a_o)$, quindi è una funzione biunivoca e da ciò segue l'asserto. □

COROLLARIO 2.7.12. *S^1 non è un retratto di D^2.*

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse una retrazione r di S^1 su D^2, in forza della **Proposizione 2.7.11**, il gruppo fondamentale di D^2, che è banale, conterrebbe un sottogruppo isomorfo al gruppo fondamentale di S^1, che è isomorfo a Z. □

PROPOSIZIONE 2.7.13. (Teorema del punto fisso di Brouwer) *Ogni mappa $f : D^2 \to D^2$ ha almeno un punto fisso; esiste cioè un punto $x_o \in D^2$ tale che $f(x_o) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, esista $f : D^2 \to D^2$ priva di punti fissi e osserviamo che la frontiera S^1 di D^2 è contenuta in D^2. Allora possiamo definire la funzione $g : D^2 \to S^1$ che ad ogni punto $x \in D^2$ associa l'intersezione con S^1 della semiretta di origine $f(x)$ e contenente x (**Figura 2.9**).

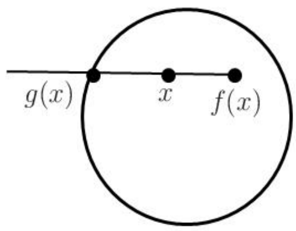


Figura 2.9: $g : D^2 \to S^1$

È possibile provare che tale funzione è continua e risulta $g(x) = x$, per ogni $x \in S^1$. La mappa g è dunque una retrazione di S^1 su D^2 e ciò è assurdo in forza del corollario precedente. □

Mostriamo un'applicazione del ***Proposizione 2.7.13*** alle matrici reali.

COROLLARIO 2.7.14. *Ogni matrice quadrata reale A d'ordine 3 ad elementi positivi possiede un autovalore positivo.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che il sottospazio X di S^2 definito da

$$X = \{(x, y, z) \in S^2 \ : \ x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\}$$

è omeomorfo a D^2 e, in forza del ***Teorema di Brouwer***, ogni mappa di X in sé ha un punto fisso. Inoltre, l'omomorfismo lineare L di $\mathbb{R}^3$ di equazione $(x', y', z')^t = A(x, y, z)^t$ è tale che le coordinate di $L(\boldsymbol{x})$ sono tutte positive, per ogni $\boldsymbol{x} \in X$. Allora possiamo considerare la funzione continua

$$f : \boldsymbol{x} \in X \to \frac{L(\boldsymbol{x})}{|L(\boldsymbol{x})|} \in X$$

ed un suo punto fisso $\boldsymbol{a}$. Ne segue che è $|L(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a} = L(\boldsymbol{a})$ e $\boldsymbol{a}$ è un autovettore di L, e quindi di A, con autovalore positivo $L(\boldsymbol{a})$. $\square$

Osserviamo che anche la ***Proposizione 2.7.13***, usando argomenti più avanzati di topologia algebrica, può essere dimostrata per qualsiasi dimensione $n > 2$.

2.7.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Come conseguenza di alcuni dei risultati ottenuti esporremo una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. A tale scopo, conveniamo di identificare $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ mediante la funzione biunivoca

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x + iy \in \mathbb{C}.$$

In questo modo, rimane definita su $\mathbb{C}$ una topologia indotta da quella naturale di $\mathbb{R}^2$, che chiameremo ***topologia naturale di*** $\mathbb{C}$. Nel seguito supporremo sempre che $\mathbb{C}$ sia dotato di tale topologia. Osserviamo che in questa identificazione alla circonferenza S^1 di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ corrisponde l'insieme dei numeri complessi di modulo 1.

LEMMA 2.7.15. *Si consideri S^1 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1. Allora, per ogni intero $n \neq 0$, la funzione*

$$f^{(n)} \ : \ z \in S^1 \ \to \ z^n \in S^1$$

non è omotopa ad una funzione costante.

DIMOSTRAZIONE. Usando la notazione (2.44) del paragrafo precedente, abbiamo $f^{(n)} \circ \omega_1 = \omega_n$. Allora l'asserto segue dal fatto che la funzione (2.47) è biunivoca (*cfr.* **Proposizione 2.7.6**). $\square$

PROPOSIZIONE 2.7.16. (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio sul campo complesso $\mathbb{C}$ di grado positivo ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p(z)$ un polinomio di grado positivo n a coefficienti in $\mathbb{C}$ e osserviamo che, ai nostri fini, non è restrittivo supporre $p(z)$ monico e con termine costante diverso da zero; sia cioè

$$p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n\,, \quad a_o \neq 0\,, \quad n > 0\,.$$

Riguardiamo S^1 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 e, per assurdo, supponiamo che $p(z)$ non abbia zeri in C. Allora la funzione continua $H : S^1 \times I \to \mathbb{C}$, definita da

$$H(z,t) = \begin{cases} z^n & \text{se} \quad t = 0 \\ \\ t^n p(\frac{(1-t)z}{t}) & \text{se} \quad t \neq 0 \end{cases},$$

assume valori diversi da zero per ogni $(z,t) \in S^1 \times I$. È quindi possibile introdurre la funzione continua $F : S^1 \times I \to S^1$, definita da

$$F(z,t) = \frac{H(z,t)}{|H(z,t)|},$$

per la quale si ha

$$F(z,0) = z^n \quad \text{e} \quad F(z,1) = \frac{a_o}{|a_o|}\,.$$

Ne segue che F è un'omotopia tra la funzione $f^{(n)} : z \in S^1 \to z^n \in S^1$ e una funzione costante, il che è assurdo in forza del **Lemma 2.7.15**. $\square$

Elenco delle figure

Bibliografia

[1] Allen Hatcher, *ALGEBRAIC TOPOLOGY,* Cambridge University Press, 2002 (http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf).

[2] Luciano Lomonaco, *ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA,* Unitor, 1991.

[3] Gianluca Occhetta, *NOTE DI TOPOLOGIA GENERALE E PRIMI ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA,* Dipartimento di Matematica, Università di Trento (http://www.science.unitn.it/∼occhetta/studenti/disp4fc.pdf).

[4] Gianluca Occhetta, *NOTE DI TOPOLOGIA ALGEBRICA E ANALISI COMPLESSA,* Dipartimento di Matematica, Università di Trento (http://www.science.unitn.it/∼occhetta/studenti/disgeoIII.pdf).

[5] Bruno Martelli, *CORSO DI TOPOLOGIA 2006,* Appunti delle lezioni per il corso di "Topologia e analisi complessa", Università di Pisa (http://www.dm.unipi.it/∼martelli/didattica/matematica/2006/topologia.pdf).

[6] Domenico Olanda, *NOTE DI GEOMETRIA*, EDISU Univerità di Napoli "Federico II", 2008.

[7] Assunta Russo, *LEZIONI DI TOPOLOGIA,* Aracne, 2002.

[8] Edoardo Sernesi, *GEOMETRIA 2,* Bollati Boringhieri, 1994.

[9] Edoardo Sernesi, *CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE TOPOLOGICHE,* Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre (http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/superfici.pdf).