

# Complessi di catene e funtore omologia.

Consideriamo un complesso simpliciale  $K$  di dimensione  $n$  orientato, ossia un complesso i cui simplessi siano dotati di una orientazione.

Ricordiamo che si dice *gruppo abeliano libero* di generatori  $(a_i)_{i \in I}$  l'insieme delle combinazioni lineari formali finite  $\sum_{i=1}^k \rho_i a_i$ , con  $\rho_i \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ; per un gruppo siffatto  $G$  si ha che  $G \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ .

**Definizione 0.1.** Si dice *gruppo delle catene di dimensione  $p$* <sup>1</sup> ( $p \in \mathbb{Z}$ ) il gruppo

$$C_p(K) = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 0 \vee p > n; \\ \text{gruppo abeliano libero generato dai } p\text{-simplessi} & \text{se } 0 \leq p \leq n; \end{cases}$$

ed i suoi elementi saranno detti *catene  $p$ -dimensionali* o  *$p$ -catene* di  $K$ .

In questo modo al complesso simpliciale resta associata una successione di gruppi

$$\dots 0 \dots 0 \dots C_0, C_1 \dots C_n, 0 \dots 0 \dots$$

Definiamo degli omomorfismo  $C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}$ <sup>2</sup> al modo seguente:

---

<sup>1</sup>Utilizzeremo indifferentemente le espressioni "p-simplesso", "simplesso p-dimensionale" e "simplesso di dimensione p", e così via.

<sup>2</sup>Nel seguito talvolta si scriverà soltanto  $\partial$ , omettendo l'indice.

se  $\sigma_p$  è un generatore di  $C_p$ , poniamo

$$\partial\sigma_p = \sum_{i=1}^{\alpha(p-1)} \rho_i \sigma_{p-1}^i \quad \rho_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_{p-1}^i \not\prec \sigma_p; \\ 1 & \text{se } \sigma_{p-1}^i \prec \sigma_p, \text{ con orientazione concorde;} \\ -1 & \text{se } \sigma_{p-1}^i \prec \sigma_p, \text{ con orientazione discorde;} \end{cases}$$

dove con  $\sigma_{p-1}^i$  si indica l' $i$ -esimo  $(p-1)$ -simpleso ed  $\alpha(p-1)$  è il numero dei simplessi di dimensione  $(p-1)$  di  $K$ .

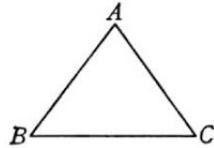
**Definizione 0.2.** L'omomorfismo  $\partial$ , esteso a  $C_p$  per linearità, si dice anche *operatore di bordo*, in quanto associa ad ogni generatore  $\sigma_p$  la somma orientata delle sue  $(p-1)$ -facce, ovvero il suo bordo.

Siamo giunti, così, ad una successione di gruppi abeliani e di omomorfismi:

$$\dots 0 \dots 0 \dots \xleftarrow{\partial_3} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_h} C_h \xleftarrow{\partial_{h+1}} \dots 0 \dots$$

Vediamo come agisce l'operatore di bordo in un caso semplice:

consideriamo un triangolo orientato  $(ABC)$



ed applichiamo due volte l'operatore, ottenendo  $\partial(ABC) = (AB) + (BC) + (CA)$  e  $\partial\partial(ABC) = B - A + C - B + A - C = 0$ . In generale

**Proposizione 0.1.**  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $p \in \mathbb{Z}$ , consideriamo un  $p$ -simpleso orientato  $(V_0, V_1, \dots, V_p)$ .

Abbiamo, allora

$$\begin{aligned} \partial(V_0, V_1, \dots, V_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (V_0, V_1, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_p) \\ \partial\partial(V_0, V_1, \dots, V_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(V_0, V_1, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_p) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^p \sum_{0 \leq j < i} (-1)^i (-1)^j (V_0, V_1, \dots, \hat{V}_j, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_p) + \sum_{i=0}^p \sum_{i < j \leq p} (-1)^i (-1)^{j-1} (V_0, V_1, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_p) = 0$$

□

**Definizione 0.3.** Un omomorfismo  $\phi : C_p \longrightarrow C_{p+k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , si dice *di grado*  $k$ .

La successione  $(C_p, \partial_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  di gruppi abeliani (nello specifico, liberi) di omomorfismi di grado - 1 a quadrato nullo che abbiamo associato al complesso costituiscono ciò che è definito come *complesso di catene*.

Notiamo che la condizione  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$  si può riformulare dicendo che

$Im \partial_p \subseteq ker \partial_{p-1}$ ; inoltre  $Im \partial_p \trianglelefteq ker \partial_{p-1}$  (essendo i gruppi delle catene abeliani), per cui possiamo passare al quoziente.

**Definizione 0.4.** I gruppi  $Z_p = ker \partial_p$  e  $B_p = Im \partial_{p+1}$  si dicono, rispettivamente *gruppo dei p-cicli* e *gruppo dei p-bordi* del complesso. Il gruppo quoziente  $H_p = \frac{Z_p}{B_p}$  è detto *p-esimo gruppo di omologia* del complesso, e la successione di gruppi abeliani  $(H_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  si dice *omologia* del complesso; inoltre due  $p$ -cicli equivalenti modulo  $B_p$  si dicono *omologhi*.

Per il fatto che  $Im \partial_p \subseteq ker \partial_{p-1}$ ,  $\forall p \in \mathbb{Z}$ , la successione di omomorfismi di cui sopra è *semi-esatta*. Nel caso in cui si abbia  $Im \partial_p = ker \partial_{p-1}$ ,  $\forall p \in \mathbb{Z}$ , diremo la successione *esatta*.

*Osservazione 1.* Consideriamo gli omomorfismi di gruppi

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \longrightarrow 0$$

Se  $Im 0 = ker f$ , si ha che  $f$  è un monomorfismo, mentre se  $Im f = ker 0$ ,  $f$  è un epimorfismo. In particolare, se la successione è esatta  $f$  risulta essere un isomorfismo.

Un primo esempio di proprietà topologica codificata dall'omologia è dato dal seguente

**Teorema 0.2.** *Dato un complesso simpliciale*  $K$

$$|K| \text{ connesso} \iff H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Supponiamo il poliedro connesso. Per definizione

$$H_0 = \frac{Z_0}{B_0} \simeq \frac{C_0}{B_0}$$

L'applicazione

$$f : \sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i V_i \in C_0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i \in \mathbb{Z}$$

è un omomorfismo, come è facile verificare. Essendo  $|K|$  connesso per poligonalità, per ogni  $i$ ,  $V_i - V_0$  è un bordo, e pertanto ogni catena del tipo  $\sum m_i V_i$  è omologa a  $\sum m_i V_0$ . Allora l'immagine non dipende dal rappresentante in omologia, ossia è ben definita  $\tilde{f} : [\sum m_i V_i] \in H_0 \longrightarrow \sum m_i \in \mathbb{Z}$ , ed è iniettiva. D'altra parte, per ogni  $m \in \mathbb{Z}$  si ha  $f(mV_0) = m$ , cioè  $\tilde{f}$  è un isomorfismo.

Passiamo a mostrare che se  $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ , allora il poliedro di  $K$  è connesso. Sia  $|K| = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$ , dove  $\Omega_i$  sono le componenti connesse del poliedro. Osserviamo che l'operazione di bordo conserva le componenti connesse, nel senso che i simplessi del bordo di una catena i cui simplessi stanno in una certa componente vi appartengono a loro volta. Ciò detto, si ha che

$$H_0(K) = \bigoplus_{i=1}^k H_0(\Omega_i)$$

per quanto appena visto, per ogni  $i = 1, \dots, k$ ,

$$H_0(\Omega_i) \simeq \mathbb{Z}$$

e dunque

$$\mathbb{Z} \simeq H_0(K) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z} \implies k = 1$$

cioè  $|K|$  è connesso. □

*Osservazione 2.* Si può facilmente verificare che i complessi simpliciali costituiscono una categoria, che indicheremo con **CS**, i cui morfismi sono dati dalle applicazioni simpliciali.

Anche i complessi di catene **CC** costituiscono una categoria, di cui ora definiremo i morfismi.

**Definizione 0.5.** Dati due complessi di catene  $C$  e  $D$ , diciamo *applicazione di catene* una successione  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  di omomorfismi di grado 0  $\varphi_p : C_p \longrightarrow D_p$  che, per ogni  $p \in \mathbb{Z}$ , rendano commutativi i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xleftarrow{\partial_{p+1}} & C_{p+1} \\ \varphi_{p+1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{p+1} \\ D_p & \xleftarrow{\partial_{p+1}} & D_{p+1} \end{array}$$

ovvero, per cui

$$\varphi_p \circ \partial_{p+1} = \partial_{p+1} \circ \varphi_{p+1}.$$

Accanto alle categorie precedenti, consideriamo quella dei gruppi abeliani graduati **GrAb** ed i relativi morfismi.

**Definizione 0.6.** Diciamo *gruppo abeliano graduato* una successione  $G = (G_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  di gruppi abeliani. Dati due gruppi abeliani graduati  $G$  e  $G'$ , si dice *omomorfismo di gruppi abeliani graduati* una successione di omomorfismi  $f = (f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ , con  $f_p : G_p \longrightarrow G'_p, \forall p \in \mathbb{Z}$ .

E' facile verificare, anche in questo caso, che si tratta di una categoria.

Vogliamo definire un funtore covariante dalla categoria dei complessi di catene a quella dei gruppi abeliani graduati. Dati due complessi di catene  $C = (C_p, \partial_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  e  $D = (D_p, \partial_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  ed un applicazione di catene  $\varphi = (\varphi_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  tra di essi, vogliamo associare a quest'ultima un omomorfismo di gruppi abeliani graduati tra le omologie dei complessi.

Per ogni  $p \in \mathbb{Z}$  a  $\varphi_p : C_p \longrightarrow D_p$  associamo  $\varphi_{p*} : H_p(C) \longrightarrow H_p(D)$ , definito ponendo  $\varphi_{p*}[z_p] = [\varphi_p(z_p)]$ .

Verifichiamo che  $\varphi$  porta cicli in cicli e che le  $\varphi_{p*}$  sono ben poste.

Se  $z_p$  è un  $p$ -ciclo si ha che  $\partial_p z_p = 0$  e  $\partial_p(\varphi_p(z_p)) = \partial_p \circ \varphi_p(z_p) = \varphi_{p-1} \circ \partial_p(z_p) = 0$ , cioè  $\varphi_p(z_p)$  è un ciclo.

Dati  $z_p, z'_p \in Z_p$ ,  $z'_p \sim z_p$  equivale a dire che  $z_p - z'_p = \partial_{p+1}c_{p+1}$ , per una certa  $c_{p+1} \in C_{p+1}$  e perciò

$$\varphi_p(z_p) - \varphi_p(z'_p) = \varphi_p(z_p - z'_p) = \varphi_p \circ \partial_{p+1}(c_{p+1}) = \partial_{p+1} \circ \varphi_{p+1}(c_{p+1})$$

ovvero  $\varphi_p(z_p) \sim \varphi_p(z'_p)$ .

Infine è facile vedere che  $\varphi_p$  è un omomorfismo, tale essendo  $\varphi$ , e che con la posizione precedente abbiamo effettivamente definito un funtore covariante.

**Definizione 0.7.** Il funtore  $H : \mathbf{CC} \longrightarrow \mathbf{GrAb}$  sopra definito si dirà *funtore omologia*.

**Definizione 0.8.** Dati due complessi di catene  $C$  e  $D$  e due applicazioni di catene  $\varphi, \psi$  di  $C$  in  $D$ , diciamo che  $\varphi$  è omotopa a  $\psi$ , se esiste una successione  $\Phi = (\Phi_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  di omomorfismi di grado 1  $\Phi_p : C_p \longrightarrow D_{p+1}$ , per cui si abbia

$\Phi_{p-1} \circ \partial_p + \partial_{p+1} \circ \Phi_p = \varphi_p - \psi_p, \forall p \in \mathbb{Z}$ . In tal caso le applicazioni  $\varphi, \psi$  si dicono omotope e si indica, come di consueto,  $\varphi \sim \psi$ .

**Teorema 0.3.** Se  $\varphi, \psi$  sono omotope, allora  $\varphi_* = \psi_*$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $p \in \mathbb{Z}$ , consideriamo gli omomorfismi indotti

$\varphi_{p*} : H_p(C) \longrightarrow H_p(D)$  e  $\psi_{p*} : H_p(C) \longrightarrow H_p(D)$ . Preso  $[z_p] \in H_p(C)$ , abbiamo le seguenti equivalenze

$$[\varphi_p(z_p)] = [\psi_p(z_p)] \iff [\varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p)] = 0 \iff \varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p) \in B_p(D).$$

D'altra parte, per definizione di omotopia di catene

$$\varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p) = (\Phi \circ \partial + \partial \circ \Psi)(z_p) = (\partial \circ \Psi)(z_p)$$

giacché  $(\Phi \circ \partial)(z_p) = 0$ , essendo un  $z_p$  ciclo. Perciò  $\varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p) \in B_p(D)$  e  $\varphi_* = \psi_*$ . □

In analogia a quanto noto per gli spazi topologici diamo la seguente

**Definizione 0.9.** Due complessi di catene  $C$  e  $D$  si dicono *omotopi* se esistono due applicazioni di catene  $\varphi : C \longrightarrow D$  e  $\psi : D \longrightarrow C$ , tali che  $\varphi \circ \psi \sim 1_D$  e  $\psi \circ \varphi \sim 1_C$ .

**Proposizione 0.4.** *Due complessi di catene omotopi hanno omologie isomorfe.*

*Dimostrazione.* Dati  $C$  e  $D$  complessi di catene omotopi, esistono  $\varphi$  e  $\psi$  applicazioni di catene per cui  $\varphi \circ \psi \sim 1_D$  e  $\psi \circ \varphi \sim 1_C$ . Passando alle applicazioni indotte tra le omologie  $\varphi_* \circ \psi_* = 1_{H(D)}$  e  $\psi_* \circ \varphi_* = 1_{H(C)}$ .  $\square$

Dunque il funtore omologia risulta invariante per omotopie. Un funtore siffatto si dice *omotopico*.