0.1 Complessi di catene

Sia K un complesso simpliciale orientato di dimensione n. Indichiamo con $C_p(K)$ il gruppo abeliano libero[1] generato dai simplessi di K di dimensione p e poniamo, per ogni $p < 0$ e per ogni $p > n$, $C_p(K) = \{0\}$.
Il gruppo $C_p(K)$ prende il nome di *gruppo delle catene di dimensione* p e un suo elemento, che è del tipo $\sum_{i=1}^{p} m_i \sigma_p^i$, con σ_p^i simplesso di dimensione p, è detto *p-catena* di K.
Definiamo ora, per ogni p, l'omomorfismo di bordo $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ e, dato che i gruppi sono liberi, sarà sufficiente definirlo sui generatori e poi procedere con l'estensione lineare.
Sia quindi σ_p un simplesso orientato di dimensione p e poniamo:

$$\partial_p(\sigma_p) = \sum_{i=1}^{\alpha(p-1)} \rho \sigma_{p-1}^i$$

dove $\alpha(j)$ denota il numero di simplessi di dimensione j e

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_{p-1} \text{ non è faccia del simplesso di dimensione } p, \\ 1 & \text{se } \sigma_{p-1} \text{ è faccia del simplesso di dimensione } p \text{ con orientazione indotta,} \\ -1 & \text{se } \sigma_{p-1} \text{ è faccia del simplesso di dimensione } p \text{ con orientazione discorde.} \end{cases}$$

Per estensione lineare, data una qualunque catena $c_p = \sum_{i=1}^{p} m_i \sigma_p^i$ di dimensione p, si ha:

$$\partial_p(c_p) = \sum_{i=1}^{\alpha(p)} m_i \partial_p(\sigma_p^i).$$

Proviamo ora che l'omomorfismo di bordo è a quadrato nullo. In questo modo abbiamo associato ad ogni complesso simpliciale un complesso di catene libero[2] $\{(C_p, \partial_p)\}_{p \in \mathbb{Z}}$.

[1] Ovvero l'insieme delle combinazioni lineari formali a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

[2] Si definisce complesso di catene una qualunque successione di gruppi abeliani G_i e di omomorfismi $\partial_i : G_i \to G_{i-1}$ a quadrato nullo. In questo caso parliamo di complessi di catene liberi perchè i gruppi sono liberi.

Proposizione 0.1. *L'omomorfismo di bordo è a quadrato nullo, ovvero* $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$, *per ogni* p.

Dimostrazione. Per linearità, sarà sufficiente provare che $\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma_p^i)) = 0$ per ogni $\sigma_p^i = (V_0, V_1, \dots, V_p)$ simplesso di dimensione p di K. Per come è stato definito l'omomorfismo di bordo si ha:

$$\begin{aligned}\partial_{p-1}\Big(\partial_p(\sigma_p^i)\Big) &= \partial_{p-1}\Big(\partial_p(V_0, V_1, \dots, V_p)\Big) = \\ &= \partial_{p-1}\Big(\sum_i (-1)^i (V_0, V_1, \dots, \hat{V}_i, V_{i+1}, \dots, V_p)\Big) = \\ &= \sum_i (-1)^i \partial_{p-1}(V_0, V_1, \dots, \hat{V}_i, V_{i+1}, \dots, V_p) = \\ &= \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^j (V_0, \dots, \hat{V}_j, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_p) + \\ &+ \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^{j-1} (V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_p).\end{aligned} \tag{1}$$

dove con il 'cappelletto' indichiamo che è stato tolto l'i-esimo vertice. A questo punto l'asserto è provato se si osserva che $i + j$ e $i + j - 1$ hanno parità diverse, per cui la somma è nulla. In altre parole si è utilizzato il fatto che, una faccia di faccia, è faccia di due simplessi e riceve da quest'ultimi orientazioni opposte. □

Questa prorpietà degli omomorfismi di bordo ci permette di dire che, per ogni p, l'immagine di ∂_{p+1} è contenuta nel nucleo di ∂_p:

$$Im(\partial_{p+1}) \subseteq Ker(\partial_p).$$

Dunque, essendo $Im(\partial_{p+1})$ sottogruppo normale di $Ker(\partial_p)$, possiamo considerare il quoziente $Ker(\partial_p)/Im(\partial_{p+1}) := Z_p/B_p := H_p$.
Gli elementi di $B_p := Im(\partial_{p+1})$ e $Z_p := Ker(\partial_p)$ sono chiamati rispettivamente *bordi* e *cicli*, quindi un ciclo è una catena a bordo nullo e diremo che due cicli sono *omologhi* se stanno nella stessa classe di omologia, ovvero se la loro differenza è un bordo. Il gruppo quoziente H_p è detto *p-esimo gruppo*

di omologia del complesso di catene.

Proviamo ora un importante risultato che lega le proprietà, topologiche e algebriche, di un poliedro di un complesso simpliciale.

Teorema 0.2. *Sia K un complesso simpliciale e $|K|$ il suo poliedro.*

$$|K| connesso \iff H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $|K|$ è connesso e proviamo che $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$. A tal proposito consideriamo la seguente funzione:

$$f : Z_0(K) \to \mathbb{Z}$$
$$c_0 = \sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i V_i \mapsto \sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i$$

che ad ogni catena c_0 di dimensione zero associa l'indice di Kronecker $\sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i$. Osserviamo che ogni 0-catena è uno 0-ciclo perchè, se avesse bordo, quest'ultimo avrebbe dimensione -1. La funzione f così definita è chiaramente un omomorfismo in quanto, la somma di due catene di dimensione zero ha indice di Kronecker la somma degli indici di Kronecker. Osserviamo inoltre che, l'ipotesi che $|K|$ sia connesso implica che il complesso K è connesso cioè è possibile congiungere due qualunque vertici mediante una spezzata fatta di simplessi uno-dimensionali. Questo equivale a dire che $V_i - V_0$ è bordo della spezzata che congiunge V_i a V_0, per cui la catena $c_0 = \sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i V_i$ è omologa alla catena $\sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i V_o$. Possiamo allora estendere la funzione f al quoziente, scegliendo come rappresentante per ogni classe una catena del tipo $\sum_{i=1}^{\alpha(0)} m_i V_o$. Abbiamo quindi costruito un omomorfismo di $H_0(K)$ in $\mathbb{Z}$ e banalmente si prova che è un isomorfismo. Infatti, per ogni a appartenente a $\mathbb{Z}$, $f^{-1}(a) = [aV_o]$ per cui f è suriettiva, l'iniettività è ancor più banale.
Viceversa. Supponiamo che $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ e proviamo che $|K|$ è connesso. Se $|K|$ non fosse connesso, poichè le operazioni di passaggio al bordo si fanno sulle componenti connesse, $H_0(K)$ sarebbe somma diretta di tante

copie di $\mathbb{Z}$ quante sono le componenti connesse di $|K|$. Dunque dire che $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ significa che abbiamo una sola componente connessa e cioè, $|K|$ è connesso. $\square$

Vogliamo ora introdurre la nozione di applicazione di catene. Questo ci permetterà di considerare la categoria dei complessi di catene, che denoteremo con $\mathcal{C}$, i cui oggetti sono i complessi di catene e i morfismi le applicazioni di catene.

Definizione 0.3. Consideriamo due complessi di catene:

$$\ldots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} D_p \xrightarrow{\partial_p} D_{p-1} \longrightarrow \ldots$$

Un'applicazione di catene è una famiglia di omomorfismi $\{\varphi_p : C_p \to D_p\}_p$ tali che commutano con il ∂, ovvero: $\varphi_{p-1} \circ \partial_p = \partial_p \circ \varphi_p$.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "\varphi_{p+1}"] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "\varphi_p"] & C_{p-1} \arrow[r, "\partial_{p-1}"] \arrow[d, "\varphi_{p-1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & D_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] & D_p \arrow[r, "\partial_p"] & D_{p-1} \arrow[r, "\partial_{p-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Osservazione 0.4. Un'applicazione di catene muta cicli in cicli e bordi in bordi. Infatti, se z_p è un ciclo di C_p allora:

$$\partial_p\big(\varphi_p(z_p)\big) = \varphi_{p-1}\big(\partial_p(z_p)\big) = \varphi_{p-1}(0) = 0$$

per cui $\varphi_p(z_p)$ è ciclo di D_p. Sia ora b_p un bordo. Possiamo allora scrivere $b_p = \partial_{p+1}(c_{p+1})$ con c_{p+1} catena di dimensione $p+1$. Proviamo che $\varphi_p(b_p)$ è bordo di una $p+1$-catena. Si ha:

$$\varphi_p(b_p) = \varphi_p\big(\partial_{p+1}(c_{p+1})\big) = \partial_{p+1}\big(\varphi_{p+1}(c_{p+1})\big)$$

dunque $\varphi_p(b_p)$ è un bordo di D_p.

0.2 Funtore omologia

Abbiamo visto che i complessi di catene costituiscono una categoria, $\mathcal{C}$, i cui morfismi sono le applicazioni di catene. Vogliamo ora costruire un funtore dalla categoria $\mathcal{C}$ alla categoria $\mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ dei gruppi abeliani graduati [3] che chiameremo *funtore omologia*. Consideriamo la seguente legge:

$$H : \mathcal{C} \to \mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$$

che, ad ogni complesso di catene C_p, associa il p-esimo gruppo di omologia $H_p = Z_p/B_p$ e ad ogni applicazione di catene $\varphi_p : C_p \to D_p$ il morfismo indotto φ_{p*} tra i corrispondenti gruppi abeliani graduati così definito:

$$\varphi_{p*} : H_p(C) \to H_p(D)$$

$$[z_p] \mapsto [\varphi_p(z_p)]$$

Osserviamo che φ_{p*} è ben posta, poichè un'applicazione di catene muta cicli in cicli per cui $\varphi_p(z_p)$ è un ciclo in D_p e quindi ha senso parlare della classe $[\varphi_p(z_p)]$. Inoltre tale classe non dipende dal rappresentante z_p scelto perchè φ_p muta pure bordi in bordi per cui se z_p e $z_p^{'}$ sono due cicli omologhi allora lo saranno anche $\varphi_p(z_p)$ e $\varphi_p(z_p^{'})$ essendo la loro differenza bordo di una $p+1$-catena.

La legge H così definita costituisce un funtore covariante dalla categoria dei complessi di catene alla categoria dei gruppi abeliani graduati, infatti:

- $(1_C)_*([z_p]) = [1_C(z_p)] = [z_p]$;
- $(\varphi_p \circ \psi_p)_*([z_p]) = [\varphi_p\big(\psi_p(z_p)\big)] = \varphi_{p*}\big([\psi_p(z_p)]\big) = (\varphi_{p*} \circ \psi_{p*})([z_p])$.

Vogliamo ora provare che il funtore omologia H è un funtore *omotopico*, cioè si vuole far vedere che applicazioni di catene omotope inducono lo stesso morfismo in omologia. Diamo quindi la seguente definizione:

[3] Un gruppo abeliano graduato è una successione di gruppi abeliani.

Definizione 0.5. Siano $\{\varphi_p : C_p \to D_p\}_p$ e $\{\psi_p : C_p \to D_p\}_p$ due applicazioni di catene. Definiamo una *omotopia* tra le due applicazioni come una famiglia $\{\phi_p : C_p \to D_{p+1}\}_p$ di omomorfismi tali che, per ogni p:

$$\phi_{p-1} \circ \partial_p + \partial_{p+1} \circ \phi_p = \varphi_p - \psi_p.$$

In simboli $\varphi_p \sim \psi_p$.

$$\begin{tikzcd}
C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "\varphi_{p+1};\psi_{p+1}"'] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "\varphi_p"', "\psi_p"] \arrow[dl, "\phi_p"'] & C_{p-1} \arrow[d, "\varphi_{p-1};\psi_{p-1}"] \arrow[dl, "\phi_{p-1}"'] \\
D_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"'] & D_p \arrow[r, "\partial_p"'] & D_{p-1}
\end{tikzcd}$$

Teorema 0.6. *H è un funtore omotopico.*

Dimostrazione. Siano $\{\varphi_p : C_p \to D_p\}_p$ e $\{\psi_p : C_p \to D_p\}_p$ due applicazioni di catene omotope e proviamo che i morfismi indotti φ_{p*} e ψ_{p*} coincidono. Per ogni $[z_p]$ in $H_p(C)$ si ha:

$$\varphi_{p*}([z_p]) = \psi_{p*}([z_p]) \iff [\varphi_p(z_p)] = [\psi_p(z_p)] \iff [\varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p)] = 0.$$

Dunque sarà necessario provare che $\varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p)$ è bordo di una $p+1$-catena di D. Si ha quindi, sfruttando l'omotopia tra le applicazioni di catene:

$$\varphi_p(z_p) - \psi_p(z_p) = \big(\varphi_p - \psi_p\big)(z_p) = \big(\phi_{p-1} \circ \partial_p + \partial_{p+1} \circ \phi_p\big)(z_p) = \partial_{p+1}\big(\phi_p(z_p)\big).$$

L'ultima uguaglianza la si ottiene osservando che $\partial_p(z_p) = 0$, per cui si ha l'asserto. □

Come conseguenza immediata si ha che, dati due complessi di catene omotopi, i gruppi abeliani delle loro omologie sono isomorfi per ogni indice. Diamo però prima la definizione di omotopia tra complessi di catene.

Definizione 0.7. Diremo che due complessi di catene, C e D, sono *omotopi* se esistono due applicazioni di catene $\varphi : C \to D$ e $\psi : D \to C$ tali che:

$$\varphi \circ \psi \sim 1_D \quad e \quad \psi \circ \varphi \sim 1_C.$$

Dunque se C e D sono due complessi di catene omotopi, per quanto detto precedentemente, si ha che:

$$(\varphi \circ \psi)_* = (1_D)_* \quad e \quad (\psi \circ \varphi)_* = (1_C)_*$$

e per le proprietà di funtorialità si ottiene:

$$\varphi_* \circ \psi_* = 1_{H(D)} \quad e \quad \psi_* \circ \varphi_* = 1_{H(C)}.$$

Questo ci fa capire che i morfismi φ_* e ψ_* sono, nella categoria $\mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$, degli isomorfismi in quanto l'uno l'inverso dell'altro.

0.3 Funtore omologia singolare

Nella sezione precedente abbiamo costruito il funtore omologia dalla categoria dei complessi di catene alla categoria dei gruppi abeliani graduati e abbiamo visto che applicazioni di catene omotope inducono lo stesso morfismo in omologia. Nostro scopo è costruire un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei gruppi abeliani graduati e proveremo che, se due spazi topologici sono omotopi, le loro omologie, intese come gruppi abeliani graduati, sono isomorfe.
Introduciamo ora una nozione sufficentemente generale di simplesso in uno spazio topologico, che generalizza in maniera naturale quella di simplesso simpliciale e per far ciò ci metteremo nello spazio di Hilbert $\mathbb{R}^\infty$ [4].
Indichiamo con:

- $\Delta_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots) := U_0$ il *simplesso standard di dimensione* 0;
- $\Delta_1 = U_0U_1$, con $U_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, il *simplesso standard di dimensione* 1;

[4] Gli elementi di $\mathbb{R}^\infty$ sono le successioni di numeri reali con un numero finito di elementi diversi da zero.

- $\Delta_2 = U_0U_1U_2$, con $U_2 = (0, 1, \ldots, 0, \ldots)$, il *simplesso standard di dimensione* 2;

- $\Delta_n = U_0U_1 \ldots U_n$, con $U_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, il *simplesso standard di dimensione* n.

I simplessi standard sono orientati e l'orientazione è quella individuata per indice crescente. Sia ora X un qualunque spazio topologico.

Definizione 0.8. Chiamiamo *p-simplesso singolare di X* una qualunque funzione continua $\sigma : \Delta_p \to X$.

Così come fatto per i simplessi simpliciali, vogliamo ora introdurre i concetti di catena, bordo e ciclo.
Indichiamo con $S_p(X)$, il gruppo abeliano libero generato dai p-simplessi singolari di X e chiamiamo *p-catena*, un qualunque elemento di $S_p(X)$ che sarà del tipo $\sum_i m_i\sigma_p^i$ con σ_p^i, p-simplesso singolare di X.
Vogliamo ora definire l'omomorfismo di bordo $\partial_p : S_p \to S_{p-1}$ in modo tale che la successione $\{(S_p, \partial_p)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ risulti un complesso di catene, detto *complesso delle catene singolari di X*. Analogamente al caso simpliciale, sarà sufficiente definire il bordo di un simplesso singolare $\sigma_p : \Delta_p \to X$. In realtà potremmo pensare di definire ∂_p facendo la restrizione di σ_p alle varie facce di Δ_p ma non possiamo farlo perchè le facce non sono necessariamente simplessi standard. Ci serviremo quindi dei così detti *operatori faccia*, $F_i^p : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ per $i = 1, \ldots, p$; che mandano Δ_{p-1} in ciascuna faccia di Δ_p in questo modo:

$$F_i^p(U_j) = \begin{cases} U_j & \text{se } j > i, \\ U_{j+1} & \text{se } j \leq i. \end{cases}$$

L'omomorfismo di bordo $\partial_p(\sigma_p)$ è definito come la somma di σ_p composta con gli operatori faccia:

$$\partial_p(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma_p \circ F_i^p)$$

e, con analoghe osservazioni fatte nel caso simpliciale, si prova che è a quadrato nullo.
In questo modo, ad ogni spazio topologico X abbiamo associato il complesso delle catene singolari $\{(S_p, \partial_p)\}_{p \in \mathbb{Z}}$. Proveremo ora che, dati due spazi topologici X, Y, una funzione continua $f : X \to Y$ induce per composizione un'applicazione di catene e quindi un morfismo nella categoria $\mathcal{C}$.

Proviamo allora la seguente:

Proposizione 0.9. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo in $\mathcal{TOP}$. L'applicazione $S_p f : S_p(X) \to S_p(Y)$, che ad ogni simplesso singolare $\sigma_p : \Delta_p \to X$ associa il simplesso singolare $f \circ \sigma_p : \Delta_p \to Y$, è un morfismo nella categoria $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Per comodità di scrittura indicheremo con f_{p*} il morfismo indotto da f. Proviamo dunque che f_{p*} è un'applicazione di catene, cioè commuta con il ∂. Ovvero: $f_{(p-1)*} \circ \partial_p = \partial_p \circ f_{p*}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & S_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & S_{p-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & \ldots \\
& \Big\downarrow f_{p*} & & \Big\downarrow f_{(p-1)*} & & \\
\ldots \longrightarrow & S_p(Y) & \xrightarrow{\partial_p} & S_{p-1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & \ldots
\end{array}$$

Si ha:

- $f_{(p-1)*}\big(\partial_p(\sigma_p)\big) = f\big(\partial_p(\sigma_p)\big) = f\big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\sigma_p \circ F_i^p)\big) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(f \circ \sigma_p \circ F_i^p)\big)$;

- $\partial_p\big(f_{p*}(\sigma_p)\big) = \partial_p(f \circ \sigma_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(f \circ \sigma_p \circ F_i^p)\big)$

□

In questo modo abbiamo costruito un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei complessi di catene che chiameremo *funtore complesso singolare*, $S : \mathcal{T}_{\mathcal{OP}} \to \mathcal{C}$.
Per le proprietà funtoriali, componendo il funtore complesso singolare con il

funtore omologia si ottiene un nuovo funtore dalla categoria $\mathcal{T}_{\mathcal{OP}}$ alla categoria $\mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ che chiameremo *funtore omologia singolare* e lo denoteremo con HS.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_{\mathcal{OP}} \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "HS"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "H"] \\ & \mathcal{G}_{\mathcal{AB}} \end{tikzcd}$$

Il funtore HS ad ogni spazio topologico X associa il gruppo abeliano graduato della sua omologia singolare, per semplicità di scrittura al posto di $H_p(S_p(X))$ scriveremo $H_p(X)$; e ad ogni funzione continua $f : X \to Y$ associa il morfismo $f_* : H(X) \to H(Y)$ tra i corrispondenti gruppi di omologia.
Proviamo ora che l'omologia singolare è invariante per omotopia cioè, se due spazi topologici sono omotopi, allora i gruppi abeliani graduati delle loro omologie sono isomorfe. Per provare questo, ricordando che applicazioni di catene omotope inducono lo stesso morfismo in omologia, sarà sufficiente provare il seguente:

Teorema 0.10. *Siano $f, g : X \to Y$ due morfismi in $\mathcal{T}_{\mathcal{OP}}$ omotopi. Allora le applicazioni di catene indotte, $f_*, g_* : S_p(X) \to S_p(Y)$ sono pure loro omotope.*

Dimostrazione. Le funzioni f e g sono omotope per cui esiste $F : X \times I \to Y$, funzione continua, tale che, per ogni $x \in X$:

$$F(x, 0) = f(x)\ ;\ F(x, 1) = g(x).$$

Consideriamo ora le inclusioni di X nel cilindro $X \times I$ a livello 0 e 1:

$$i_0 : x \in X \mapsto (x, 0) \in X \times I$$

$$i_1 : x \in X \mapsto (x, 1) \in X \times I$$

Possiamo allora scrivere $f = F \circ i_0$ e $g = F \circ i_1$, per cui le applicazioni di catene indotte saranno (sfruttando le proprietà funtoriali):

$$f_* = F_* \circ i_{0*}\ ;\ g_* = F_* \circ i_{1*}$$

Dunque, per provare che le funzioni indotte da f e g sono omotope sarà sufficiente trovare un'omotopia tra le applicazioni di catene indotte da i_0 e i_1. Per semplicità di scrittura, le applicazioni indotte da i_0 e i_1 le scriveremo senza la $*$. Dobbiamo quindi costruire, per ogni indice q, un omomorfismo

$$P_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X)$$

tale che:

$$P_{q-1} \circ \partial_q + \partial_{q+1} \circ P_q = i_{1q} - i_{0q}$$ [5]

che chiameremo *operatore prisma.* Come al solito sarà sufficiente definirlo per i generatori di $S_q(X)$. Sia quindi $\sigma_q : \Delta_q \to X$ un q-simplesso singolare di X. Intuitivamente $P_q(\sigma_q)$ dovrà essere una $q+1$ catena rappresentata dalla funzione continua $\sigma_q \times Id : \Delta_q \times I \to X \times I$. Costruiamo quindi il cilindro su Δ_q e poniamo, per $i = 0, \ldots, q$:

$$A_i = (U_i, 0) \; e \; B_i = (U_i, 1)$$

che altro non sono che i vertici del cilindro $\Delta_q \times I$. Triangoliamo ora il cilindro con i $(q+1)$-simplessi orientati $(A_0, A_1, \ldots, A_j, B_j, \ldots, B_q)$, ciascuno dei quali va pensato come un $(q+1)$-simplesso singolare di $\Delta_q \times I$ mediante l'unica applicazione affine che manda, ordinatamente, i vertici di Δ_{q+1} in $A_0, A_1, \ldots, A_j, B_j, \ldots, B_q$.

Indichiamo ora con $\delta_q : \Delta_q \to \Delta_q$. δ_q è il simplesso standard Δ_q pensato come simplesso singolare, e poniamo:

$$P_q(\delta_q) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j (A_0, A_1, \ldots, A_j, B_j, \ldots, B_q).$$

Per cui si ha:

$$P_q(\sigma_q) = (\sigma_q \times Id) P_q(\delta_q)$$

che è una $q+1$ catena singolare di $X \times I$. □

[5] le funzioni i_{1q} e i_{0q} sono in questo caso le applicazioni di catene indotte.

Vogliamo ora calcolare l'omologia singolare nel caso particolare in cui lo spazio topologico è costituito da un solo punto. In questo modo, sfruttando l'invarianza omotopica, saremo in grado di calcolare l'omologia singolare di un qualunque spazio contraibile. Sia quindi $X = \{P\}$ uno spazio topologico. Osserviamo che, per ogni $q \geq 0$, esiste un'unica funzione continua $\sigma_q : \Delta_q \to \{P\}$ per cui, il gruppo abeliano libero $S_q(X)$ è ciclico e quindi isomorfo a $\mathbb{Z}$. Calcoliamo ora il bordo di σ_q che è somma delle $q+1$ facce orientate coerentemente;

$$\partial_q(\sigma_q) = \underbrace{\sigma_{q-1} - \sigma_{q-1} + \cdots + (-1)^q \sigma_{q-1}}_{q+1 volte} = \begin{cases} \sigma_{q-1} & \text{se } q \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } q \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Questo implica che, nel caso in cui q è pari, l'unico ciclo è la catena nulla cioè $Z_q = \{0\}$ e di conseguenza anche il gruppo dei bordi $B_q = \{0\}$, essendo suo sottogruppo. Nel caso invece di q dispari, si ha che il bordo di una qualunque catena è nullo e quindi $Z_q = S_q$ inoltre, ogni catena c_q è bordo di una c_{q+1} perchè $q+1$ è pari e quindi $B_q = S_q$. Ricapitolando:

$$B_q = Z_q = \begin{cases} 0 & \text{se } q \text{ è pari,} \\ S_q & \text{se } q \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Possiamo allora dire che, per ogni $q > 0$, il gruppo di omologia singolare di un punto è sempre nullo. Vediamo ora cosa succede se $q = 0$.
In questo caso, poichè una 0-catena è uno 0-ciclo si ha $Z_0 = S_0$. Inoltre, $B_0 = Im(\partial_1) = 0$, essendo ∂_1 l'omomorfismo nullo per quanto detto precedentemente. Abbiamo quindi che:

$$H_0 \simeq S_0 \simeq \mathbb{Z}\ ^6.$$

Siamo ora in grado di dire che *l'omologia singolare di uno spazio contraibile è tutta nulla tranne che nella dimensione zero in cui vale $\mathbb{Z}$.*

[6] Osserviamo che questo risultato lo si poteva ottenere come conseguenza del teorema (0.2).