Università degli studi di Napoli "Federico II"

CdL in Matematica Triennale + Vecchio Ordinamento

CdL in Ingegneria Edile

Prova scritta di Fisica Generale 1

19 Ottobre 2015

Esercizio 1

In una partita di rugby si deve trasformare una punizione, da una distanza D=10 m dalla porta, facendo passare la palla passa tra i pali e superando la traversa alta H=3m (vedi figura). Assumendo di potere trascurare la resistenza dell'aria, determinare:

1. l'espressione in funzione dell'angolo di alzo θ della velocità minima con cui deve partire il pallone per trasformare la punizione;
2. come conviene scegliere l'angolo di alzo θ minimizzare questa velocità di lancio (effettuare lo studio in termini di tgθ prima di passare agli angoli);
3. in queste condizioni il tempo necessario alla palla per sorvolare la traversa.

Esercizio 2

Un'asta omogenea di lunghezza L=1m e massa M= 1kg è vincolata, a un estremo O, a un asse orizzontale, intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta è tenuta in equilibrio, in posizione orizzontale tipo ponte levatoio, tramite un filo ideale, attaccato all'estremo opposto e fissato a una parete verticale alla quota L/2 sopra O. Determinare:

1. la tensione T del filo e le caratteristiche della reazione **R** esercitata dal vincolo;
2. se la sbarra viene colpita, al centro e dal basso verso l'alto, da una corpo di massa m=0,5 kg e velocità **v** che vi si conficca, ricavare l'espressione della velocità angolare del sistema dopo l'urto e il valore minimo v_{min} che permette al sistema di raggiungere la posizione verticale (vedi figura);

Esercizio 3

Un recipiente con pareti adiabatiche e volume V=10 litri contiene 1,50 litri di acqua alla temperatura T_0= 20.0°C. Fornendo unicamente calore l'acqua viene trasformata in vapore e portata alla temperatura T_{200}= 200°C. Trattando il vapore acqueo come un gas ideale poliatomico e trascurando il contributo dell'aria contenuta inizialmente nel recipiente, determinare:

a) il numero di moli di vapore acqueo ricordando che la massa molare dell'acqua vale M=18g;
b) la quantità di calore che è stata fornita all'acqua;
c) la pressione finale del vapore all'interno del recipiente;

Si ricorda a che per un gas poliatomico C_V=3R e che c_a=4,18 kJ/(kg.K) e λ_{ev}=2270 kJ/kg

Soluzione

Esercizio 1 In un riferimento con origine nel punto in cui si calcia la trasformazione, il moto del pallone equivale a quello di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_θ e angolo di alzo θ, le equazioni orarie e e della traiettoria sono:

$$\begin{cases} x = +v_\theta \cos\theta\, t \\ y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 \; + v_\theta \sin\theta\, t \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{g}{2v_\theta^2 \cos^2\theta}\, x^2 \; + \tan\theta\, x \tag{1}$$

(a) per realizzare la trasformazione la palla, per $x = D$, deve trovarsi ad una quota $y_{x=D} \geq H$ e dunque:

$$-\frac{g}{2v_\theta^2\cos^2\theta}\, D^2 \; + \tan\theta\, D \geq H \Rightarrow \underbrace{-\frac{g}{2v_\theta^2\cos^2\theta}\, D^2}_{<0} \; \geq \underbrace{(H - D\tan\theta)}_{<0} \tag{2}$$

Questo mostra che si deve avere $H - D\tan\theta < 0 \Rightarrow \tan\theta > \frac{H}{D}$ come è molto intuitivo dal pinto di vista fisico: per potere superare la barriera bisogna puntare sopra perché la gravità può solo abbassare la traiettoria! Esplicitando la disequazione rispetto a v_θ^2 si ottiene:

$$v_\theta^2 \; \geq \frac{gD}{2\cos^2\theta\left(\tan\theta - \frac{H}{D}\right)} \tag{3}$$

(2) per trovare la minima velocità minima di lancio dobbiamo minimizzare la (3) rispetto all'angolo θ, conviene lavorare con $\xi = \tan\theta$ visto che la funzione tangente è monotona crescente nell'intervallo di interesse $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sfruttando la relazione $\cos^{-2}\theta = 1 + \tan^2\theta$, possiamo riscrivere la (3) come:

$$v_\theta^2 = \left(\frac{g\,D}{2}\right)\frac{1+\tan^2\theta}{\left(\tan\theta - \frac{H}{D}\right)} \equiv \left(\frac{g\,D}{2}\right)\frac{1+\xi^2}{\xi - \frac{H}{D}} \tag{4}$$

Differenziando rispetto a ξ e annullando la derivata troviamo la condizione di minimo (facile da verificare con considerazioni fisiche o tramite le derivate seconde):

$$\frac{\partial v^2}{\partial \xi} \propto \frac{\xi^2 - 2\frac{H}{D}\xi - 1}{\left(\xi - \frac{H}{D}\right)^2} = 0 \Rightarrow \tan\theta_{min} = \frac{H}{D} + \sqrt{1 + \left(\frac{H}{D}\right)^2} \approx 1,34 \Rightarrow \theta_{min} \approx 53^\circ \tag{5}$$

ed esplicitando il valore della velocità di lancio minima:

$$v_{min} = \sqrt{\left(\frac{gD}{2}\right)\left(\frac{1+\tan^2\theta_{min}}{\tan\theta_{min} - \frac{H}{D}}\right)} \approx 11,5\, m/s \tag{6}$$

(3) il tempo necessario per attraversare la porta si ottiene semplicemnte dalle leggi orarie:

$$t = \frac{D}{v_{min}\cos\theta_{min}} = \sqrt{\left(\frac{2D}{g}\right)\left(\tan\theta_{min} - \frac{H}{D}\right)} \approx 1,46\,\mathrm{s} \tag{7}$$

Esercizio 2

(1) per ottenere l'equilibrio del sistema si deve realizzare la condizione di annullamento sia delle forze esterne che dei loro momenti. Dopo avere definito la tensione $\vec{T}$ lungo il filo che dai dati del problema forma un angolo $\theta = \left(\frac{L/2}{L}\right) \approx 26,6°$ con l'orizzontale e la reazione $\vec{R}$ sul perno formante un angolo β con l'orizzontale, possiamo scrivere la condizione di equilibrio per i momenti rispetto al polo O:

$$M\,g\,\frac{L}{2} - T\,L\,\sin\theta = 0 \Rightarrow T = \frac{M\,g}{2\sin\theta} \approx 11\,\mathrm{N} \tag{8}$$

e successivamente quella per le forze:

$$\begin{cases} M\,g - R\sin\beta - T\sin\theta = 0 \\ R\cos\beta - T\cos\theta = 0 \end{cases} \begin{cases} R\sin\beta = M\,g - T\sin\theta \\ R\cos\beta = T\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

e dunque:

$$\begin{cases} R = \sqrt{M^2g^2 + T^2 - 2\,M\,gT\,\sin\theta} = \sqrt{M^2g^2 + T^2 - M^2\,g^2} = T \approx 11\,\mathrm{N} \\ \cos\beta = \cos\theta \Rightarrow \beta = \theta \approx 26,6° \end{cases} \tag{10}$$

par(2) per trovare la velocitá angolare nel passaggio per la posizione di equilibrio stabile possiamo usare il teorema dell'energia cinetica. Detto I il momento d'inerzia della sbarra rispetto a O ($I = \frac{1}{3}M\,L^2$):

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 - 0 = M\,g\,\frac{L}{2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g\,L\,M}{I} = \frac{3\,g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3\,g}{L}} \approx 3,84\,\mathrm{rad/s} \tag{11}$$

(3) nell'urto completamente anelastico della sbarra con il corpo si conserva il momento angolare rispetto a O. Detta ω_f la velocitá angolare del sistema (sbarra +corpo) dopo l'urto, possiamo scrivere:

$$m\,v\,\frac{L}{2} = I_{tot}\,\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{m\,v\,L}{2\,I_{tot}} \tag{12}$$

dove abbiamo usato $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ momento d'inerzia della sbarra e $I_{tot} = I_0 + m\frac{L^2}{4}$. Per ricavare la velocità minima che permette al sistema di raggiungere la posizione verticale, scriviamo il teorema dell'energia cinetica fra gli istanti subito dopo l'urto e quando si raggiunge la verticale:

$$\frac{1}{2}I_{tot}\omega_{vert}^2 - \frac{1}{2}I_{tot}\omega_f^2 = -(M+m)\,g\,\frac{L}{2} \Rightarrow \omega_{vert}^2 = \omega_f^2 - \frac{2\,(M+m)\,g\,\frac{L}{2}}{I_{tot}} \tag{13}$$

Per raggiungere la verticale deve risultare $\omega_{vert}^2 \geq 0$ e dunque:

$$\omega_f^2 \geq \frac{2\,(M+m)\,g\,\frac{L}{2}}{I_{tot}} \Rightarrow v^2 \geq \left(\frac{M+m}{m}\right)\left(\frac{I_{tot}}{m\frac{L^2}{4}}\right)g\,L = v_{min}^2 \tag{14}$$

$$v_{min} = \sqrt{\left(\frac{M+m}{m}\right)\left(\frac{4M+3m}{3m}\right)g\,L} \approx 10,4\,\mathrm{m/s} \tag{15}$$

Esercizio 3

(a) il numero di moli si ricava dalla massa di acqua $m_a = \rho_a V_a$ e dalla massa molare M:

$$n = \frac{m_a}{M} = \frac{\rho_a V_a}{M} \approx \; 83,3/, \mathrm{moli} \tag{14}$$

(b) la quantità di calore necessari comprende tre contributi delle fasi: 1) riscaldamento acqua da $T_0 \to T_{100}$, 2) evaporazione a T_{100}, 3) riscaldamento del vapore da $T_{100} \to T_{200}$.

$$Q_{tot} = m_a c_a (T_{100} - T_0) \; + m_a \lambda_{ev} \; + n3R(T_{200} - T_{100}) \approx 4,11\,\mathrm{MJ} \tag{15}$$

(c) la pressione finale si ricava dall'equazione dei gas perfetti:

$$p\,V \; = \; n\,R\,T_{200} \;\Rightarrow\; p \;=\; \frac{n\,R\,T_{200}}{V} \approx \; 330 \cdot 10^5 \mathrm{Pa} \approx \; 330\,\mathrm{atm} \tag{16}$$