

**ESERCIZI SU PARTI LIBERE, SPAZI E SOTTOSPAZI
VETTORIALI, MATRICI DEL CAMBIO DELLA BASE, SISTEMI
LINEARI**

1. Verificare se i seguenti sistemi S_i sono linearmente indipendenti. Estrarre da ognuno di essi una base per $L(S_i)$:

$$S_1 = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (-1, 1, 1, -1), (1, 2, 2, 0)];$$

$$S_2 = [(1, -1, 2), (1, 1, 0), (-1, 1, 0)];$$

$$S_3 = [(1, -1, 1), (-2, 2, -2), (3, -3, 3)];$$

$$S_4 = [(1, 1), (1, 2)];$$

$$S_5 = [(1, -1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 0, 1)];$$

$$S_6 = [(1, 0, -1), (0, 0, 0), (-2, 0, 2)];$$

$$S_7 = [(1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0)]$$

2. Per quali valori di k i seguenti sistemi sono linearmente indipendenti?

$$S_1 = [(k + 1, 1, 0), (-2, 1, 0), (0, 1, k)];$$

$$S_2 = [(k, k, k, k), (1, 0, 1, k), (1, 1, 1, 1)];$$

$$S_3 = [(1, k + 2, 1), (1, 1, -1), (1, 0, 1)];$$

$$S_4 = [(k, 0), (1, k + 1)]$$

3. Verificare se i seguenti vettori dipendono dal sistema S_i specificato:

i) $\mathbf{v}_1 = (5, 3, 7), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ da $S_1 = [(1, 2, 3), (-2, 3, 2)]$

ii) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 5, 8)$ da $S_1 = [(2, 4, 6), (-1, -2, -3), (-4, -6, -8)]$

iii) $\mathbf{v}_1 = (5, 3, 7), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ da $S_1 = [(1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 0, 1)]$

4. Si consideri $S = [(1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 2), (3, 1, -3, -1)]$. Detto H il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 generato da S , si determini la dimensione ed una base di H . Che dimensione avrà un sottospazio K tale che $\mathbb{R}^4 = H \oplus K$?

Determinare un tale sottospazio K .

5. Per quali valori di t la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile? Posto $t = 0$ determinare l'inversa della matrice A .

6. Consideriamo le seguenti basi di \mathbb{R}^2 :

$$S = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = [(1, 0), (0, 1)] \text{ e } U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = [(1, 3), (1, 4)]$$

determinare le matrici che permettono di passare dalla base S alla base U e, viceversa, dalla base U alla base S . Sia poi \mathbf{v} un vettore di \mathbb{R}^2 che nella base canonica S ha coordinate $(5, -3)$; determinare le sue coordinate nella base U .

7. Estrarre una base dai seguenti sistemi:

$$S_1 = [(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)]; S_2 = [(-2, -1, 1), (0, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 1)]; \\ S_3 = [(-2, 3), (1, 1), (1, -1), (2, 1)]$$

8. Completare a basi i seguenti sistemi:

$$S_1 = [(1, 1, -1, 0), (2, 0, 0, 1)]; S_2 = [(1, 0, 1)]; S_3 = [(1, -1, -1), (1, 0, 1)]$$

9. Considerate le seguenti basi di \mathbb{R}^3 :

$$S = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [(1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 0, 0)] \text{ e} \\ U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 0, 0)]$$

determinare le matrici che permettono di passare dalla base S alla base U e, viceversa, dalla base U alla base S . Sia poi \mathbf{v} un vettore di \mathbb{R}^3 che nella base canonica S ha coordinate $(5, -1, 1)$; determinare le sue coordinate nella base U .

10. Si consideri il sistema di vettori $S = [(0, 0, -3, 1), (-1, 2, 4, 0), (1, -2, -10, 4)]$ in \mathbb{R}^4 .

i) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{w}_k = (1, -2, -7, k + 1)$ dipende da S ?

ii) In relazione ad uno di questi valori esprimere \mathbf{w}_k come combinazione dei vettori di S .

11. Si consideri il sistema di vettori $S_k = [(-2, -1, 2, 3), (1, 1, 0, 2), (-3, -2, 2, k - 1)]$ in \mathbb{R}^4 , al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

i) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{w} = (-1, 0, 2, 5)$ dipende da S_k ?

ii) Se possibile esprimere \mathbf{w} come combinazione dei vettori di S_0 .

12. Sia $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×3 . Considerato L_1 sottospazio di V :

$$L_1 = \left\{ M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \mid -a_{11} + 2a_{21} - a_{23} = a_{11} - a_{21} = a_{12} = a_{23} = 0 \right\}$$

determinare:

- i) $\dim_{\mathbb{R}} L$;
- ii) una base di L ;
- iii) un sottospazio supplementare di L in V .

13. i) Per quali k la somma dei sottospazi $U = L((1, 2, 4))$ e $W_k = ((k + 1, 0, k), (0, k + 1, 1))$ è un sottospazio proprio di \mathbb{R}^3 ?

- ii) Se $k = -1$ determinare un sottospazio L tale che $(U + W_{-1}) \oplus L = \mathbb{R}^3$.

14. Considerato il sistema

$$S_t = \{\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1, 1, 1), \mathbf{v} = (-1, 1, 0, 2, 1, -1), \mathbf{w}_t = (3, -3, 0, 1, t, t + 2)\}$$

- i) discutere la dimensione di $L_t = L(S_t)$ al variare di t ;
- ii) determinare L_1 ed una sua base;
- iii) determinare un sottospazio supplementare di L_1 in \mathbb{R}^6 .

15. Sia $V = M_{3,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici 3×2 . Considerato L sottospazio di V :

$$L = \left\{ M = \begin{pmatrix} a + 2b & -b \\ a - b & 0 \\ 0 & 5a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ determinare:}$$

- i) $\dim_{\mathbb{R}} L$;
- ii) una base di L ;
- iii) un sottospazio supplementare di L in V .

16. Si consideri il sistema di vettori

$$S_k = [(-2, -1, 2, 3), (1, 1, 0, 2), (-3, -2, 2, k)]$$

in \mathbb{R}^4 , al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

- i) Posto $U_k = L(S_k)$, discutere la dimensione di U_k al variare di k ;
- ii) Per quali valori di k il sottospazio $W = L((-1, 0, 2, 5))$ è contenuto in U_k ?

17. Sia $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×3 . Considerati L_1 e L_2 sottospazi di V :

$$L_1 = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & a + 3b & 0 \\ -b & 0 & 2a + 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ e}$$

$$L_2 = \left\{ M = \begin{pmatrix} 2c + d & -c + 4d & 0 \\ c - d & 0 & 2c + 4d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

determinare:

- i) $\dim_{\mathbb{R}} L_1$ e $\dim_{\mathbb{R}} L_2$;
- ii) $\dim_{\mathbb{R}}(L_1 + L_2)$, $\dim_{\mathbb{R}}(L_1 \cap L_2)$;
- iii) un sottospazio supplementare di L_1 in V .

18. Sia $V = M_{3,3}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici 3×3 . Considerati L_1 e L_2 sottospazi di V :

$$L_1 = \{M \in V \mid M \text{ è triangolare alta}\} \text{ e } L_2 = \{M \in V \mid M \text{ è triangolare bassa}\}$$

determinare:

- i) $\dim_{\mathbb{R}}(L_1 + L_2)$ e $\dim_{\mathbb{R}}(L_1 \cap L_2)$;
- ii) una base di $(L_1 \cap L_2)$;
- iii) un sottospazio supplementare di $(L_1 \cap L_2)$ in V .

19. Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 e si consideri il sottospazio

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

si determini:

- i) $\dim_{\mathbb{R}} L$;
- ii) una base di L ;
- iii) un sottospazio supplementare di L in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

20. Si consideri il sistema di matrici

$$S_k = \left[M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \right]$$

in $M_{2,2}(\mathbb{R})$, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

- i) Posto $U_k = L(S_k)$, discutere la dimensione di U_k al variare di k ;
- ii) Per quali valori di k il sottospazio $W = L\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ è contenuto in U_k ?

21. Sia $V = \mathbb{R}_3[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado al più 3. Considerati U e W sottospazi di V :

$$U = L(1 + x^2, 1 + x) \text{ e } W = L(x - x^2, 1 + x^3) \text{ determinare:}$$

- i) $\dim_{\mathbb{R}} U + W$, $\dim_{\mathbb{R}} U \cap W$
- ii) una base di $U + W$;
- iii) un sottospazio supplementare di $U \cap W$ in V .

22. Sia $V = \mathbb{R}_4[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : gr(f(x)) \leq 4\}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi aventi grado al più 4. Considerato

$$L = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_0 + 2a_2 - a_4 = a_1 = 0\}$$

sottospazio di V , determinare:

- i) $\dim_{\mathbb{R}} L$;
- ii) una base di L ;
- iii) un sottospazio supplementare di L in $\mathbb{R}_4[x]$.

23. Sia $V = \mathbb{R}_4[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : gr(f(x)) \leq 4\}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi aventi grado al più 4. Considerati i sottospazi di V

$$L_1 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_0 - a_4 = 5a_1 = 0\} \text{ e}$$
$$L_2 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid 2a_0 - a_2 - a_4 = 3a_3 = a_0 - a_2 = 0\}$$

determinare:

- i) $\dim_{\mathbb{R}} L_1$ e $\dim_{\mathbb{R}} L_2$;
- ii) $\dim_{\mathbb{R}} (L_1 + L_2)$;
- iii) $\dim_{\mathbb{R}} (L_1 \cap L_2)$.

24. Considerato il sistema di vettori L :

$$L = (\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (1, 1, -1))$$

- i) verificare che L è una base di \mathbb{R}^3 .
- ii) Se $B = [\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)]$ è la base canonica, determinare la matrice che permette di passare dalla base B alla base L e quella che determina il passaggio da L a B .
- iii) Determinare in vettore coordinato rispetto alla base canonica del vettore \mathbf{v} che nella base L ha vettore coordinato $(1, 1, 1)$

25.i) Determinare $H = \text{Sol}(\Sigma)$ con

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} ;$$

- ii) Che dimensione ha H ? Scrivere una sua base;
- iii) Se K è un sottospazio supplementare di H , K che dimensione può avere?

26. Si consideri il sistema lineare Σ :

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- i) Determinare $S = \text{Sol}(\Sigma)$, una sua base e la sua dimensione;
- ii) determinare un sottospazio supplementare di S in \mathbb{R}^5 .

27. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 2 \\ x + y + tz = 2 \end{cases}$$

si discuta la compatibilità del sistema al variare del parametro t . Si trovino poi le (eventuali) soluzioni nei casi in cui $t=1$ e $t=3$.

28. Considerato il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = t \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + tx_4 = 1 \end{cases}$$

se ne studi la compatibilità al variare del parametro t e se ne determinino le soluzioni, se possibile, nei casi in cui $t = 1$ e $t = 3$.

29. Discutere, al variare del parametro k , la compatibilità del seguente sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + y + kz = k \\ x + y + 2z = k + 1 \end{cases}$$

Determinare poi, se possibile, l'insieme delle soluzioni di tale sistema nei casi in cui $k = 3$ e $k = 1$.