

Università degli Studi di Napoli «Federico II»
Facoltà di Architettura

Upta

Corso di laurea in Urbanistica e Scienze della Pianificazione Territoriale e Ambientale

Corso integrato di Matematica e statistica

Docente: Livia D'Apuzzo.

Cenni di teoria degli insiemi

1. Notazioni e Convenzioni nel linguaggio della teoria degli insiemi

- Gli *oggetti* sono in genere indicati con lettere minuscole: $a, b, c, \dots, s, t, \dots, x, y, z$.
- Gli *insiemi* sono in genere indicati con lettere maiuscole: $A, B, C, \dots, S, T, \dots, X, Y, Z$.

Relazione tra insiemi e oggetti. Gli insiemi sono costituiti da oggetti (si parla infatti di insieme di animali, insieme di matite, insieme dei numeri naturali, insieme delle vocali, cioè un insieme è detto attraverso i suoi oggetti) e un insieme è ben definito se e solo se sono noti tutti gli oggetti che lo costituiscono. Gli oggetti, che costituiscono un insieme, sono detti anche *elementi dell'insieme*.

- *Singleton* è l'insieme costituito da un solo oggetto.

Nonostante un insieme sia definito attraverso gli oggetti che lo costituiscono, si conviene di considerare *l'insieme vuoto*, cioè privo di oggetti

- L'*insieme vuoto* è denotato con il simbolo \emptyset .

Rappresentazione degli insiemi

Un insieme, non vuoto, è costituito di oggetti ed è noto quando sono noti i suoi oggetti; quindi la rappresentazione di un insieme deve essere tale che si possa stabilire se un oggetto appartiene o non all'insieme. Ci sono due tipi di rappresentazione, quella *elencativa o tabulare o estensiva*, e quella *intensiva, per proprietà caratteristica*. In entrambe le notazioni si usano le parentesi graffe $\{$.

$\{ \}$ indicano un insieme

I. Notazione estensiva o elencativa (per insieme con un numero finito e non troppo numeroso di elementi): *gli elementi dell'insieme vengono elencati uno dopo l'altro e racchiusi tra parentesi graffe; non ha importanza l'ordine in cui gli oggetti sono indicati, né se un oggetto viene indicato più volte.*

$$A = \{ \text{🦴}, \text{🐘}, \text{🦁}, \text{🌹}, \text{🔨} \}$$

$$B = \{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{a, b, a, b, c\}$$

$$C = \{3, 4, 7, 1\} = \{3, 3, 3, 7, 4, 1, 1\}$$

$\{a\}$ singleton, $\{2\}$ singleton, $\{ \text{🦴} \}$ singleton.

Un insieme può avere come oggetti altri insiemi

$$T = \{ \{a\}, \emptyset, \{b, c\} \}$$

Nota: $a \neq \{a\}$ perché a è un oggetto e $\{a\}$ è un insieme

SULLA NOTAZIONE ELENCATIVA

- *difficile elencare tutti gli oggetti di un insieme se questi sono numerosi;*

- *impossibile elencare tutti gli oggetti di un insieme se questi sono in quantità infinita.*

Si può ovviare indicando solo alcuni elementi dell'insieme e usando i punti sospensivi per gli elementi non indicati, quando questi sono facilmente immaginabili

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 39, 40\}$ può indicare l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 40

$\{1, 2, 3, \dots\}$ può indicare l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali

Tuttavia la notazione di un insieme che utilizza i punti sospensivi può essere ambigua:

$\{1, 2, 3, \dots\}$ indica l'insieme dei numeri naturali
o l'insieme dei numeri primi?

Per tali tipi d'insiemi occorre usare la notazione intensiva.

II. Notazione intensiva o per proprietà caratteristica. Tra le parentesi graffe $\{\}$ si scrive una lettera, ad esempio x , che indica il generico elemento dell'insieme, seguita dal simbolo “:” o dal simbolo “|”, che si legge *tale che*, e subito dopo da una asserzione $P(x)$ su x che indica la o le proprietà di cui deve godere x per appartenere all'insieme.

$S = \{x: P(x)\}$ o $S = \{x | P(x)\}$ è l'insieme degli x tali che $P(x)$ è verificata

Ad esempio l'insieme *A dei colleghi di Maria* si denota nel seguente modo

$A = \{x: x \text{ è collega di Maria}\}$ o con $A = \{x | x \text{ è collega di Maria}\}$

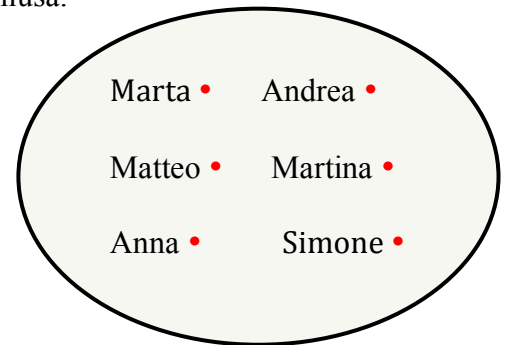
e si legge : *A è l'insieme degli x tali che x è collega di Maria*

$B = \{x: x \text{ è collega di Maria e ha ventitré anni}\}$

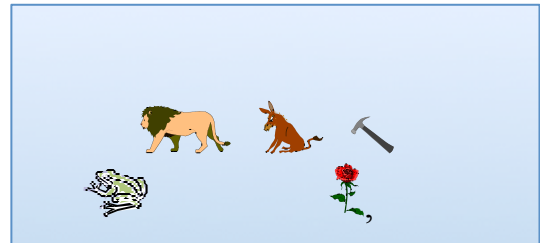
Accanto alle due notazioni, quella estensiva e quella intensiva, per avere un supporto intuitivo si usa rappresentare gli insiemi attraverso i *diagrammi di Eulero- Venn*.

Un **diagramma di Eulero- Venn** raffigura un insieme con una linea chiusa (ovale, cerchio, rettangolo) e i suoi elementi come punti all'interno della linea chiusa.

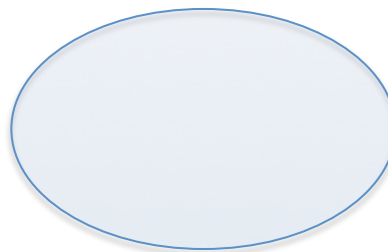
$A = \{Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna\} \rightarrow$



$A = \{ \text{🐸, 🐰, 🦁, 🌹, 🛠️} \} \rightarrow$



Se, all'interno della linea chiusa, nessun punto è evidenziato, si sottintende che tutti i punti racchiusi dalla curva sono elementi dell'insieme così rappresentato



Il segno di appartenenza “ \in ”

Il segno \in , detto *segno di appartenenza*, si pone tra un oggetto ed un insieme per dire che “l’oggetto appartiene all’insieme” cioè che “l’oggetto è elemento dell’insieme”

$a \in A$ si legge “ a appartiene ad A ” o “ a è elemento di A ”

Esempi.

$Andrea \in \{Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna\}$

$7 \in \{x: x \text{ è un numero primo}\}$

Se $A = \{\text{🍄}, \text{🐘}, \text{🦁}, \text{🌹}, \text{🔨}\}$ allora $\text{🐘} \in A$

Nota: $a \neq \{a\}$ ed $a \in \{a\}$

Il segno \notin si pone tra un oggetto ed un insieme per dire che “l’oggetto **non** appartiene all’insieme”.

$a \notin A$ si legge “ a non appartiene ad A ” o “ a non è elemento di A ”

Esempi.

$Giulio \notin \{Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna\}$,

$3 \notin \{1, 2, 4, 8\}$ $8 \notin \{x: x \text{ è un numero primo}\}$

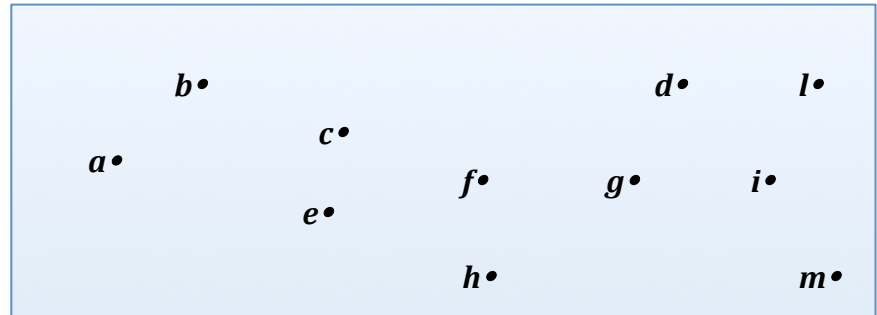
$x \notin \emptyset$

2. Sottoinsiemi o parti di un insieme e il segno di inclusione “ \subseteq ”

Consideriamo un insieme U , costituito da tutti gli oggetti di interesse per noi:

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$$

U



Consideriamo ora un altro insieme A costituito da oggetti che appartengono a U : un insieme siffatto detto *parte* o *sottoinsieme* di U .

Per indicare che A è parte di U si pone tra A ed U il segno di inclusione \subseteq :

$$A \subseteq U \quad \text{si legge} \quad \text{“}A \text{ è incluso in } U\text{”}$$

Per indicare che U ha come sua parte A si pone tra U e A ed U il segno \supseteq :

$$U \supseteq A \quad \text{si legge} \quad \text{“}U \text{ include } A\text{”}$$

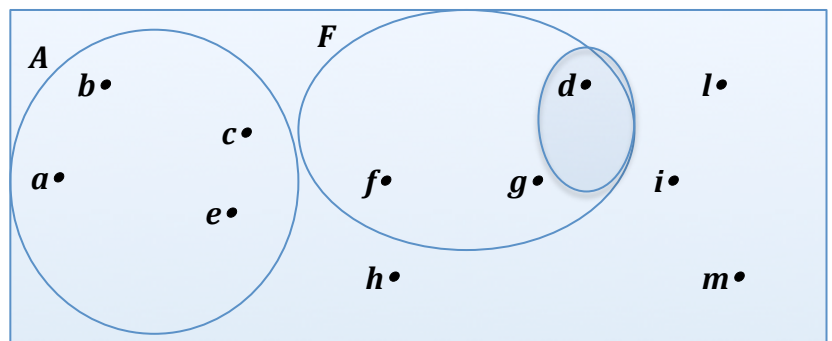
Esempi

$$A = \{a, b, c, e\} \subseteq U$$

$$F = \{f, g, d\} \subseteq U$$

$$\{d\} \subseteq U \quad \{d\} \subseteq F$$

perciò $\{d\} \subseteq F \subseteq U$



Per dire che un insieme non è parte di un altro si usa il segno di inclusione barrato

$$\{a, e, i, o, u\} \not\subseteq U$$

Per convenzione l'insieme vuoto è considerato parte di ogni insieme U : $\emptyset \subseteq U$

Con tale convenzione si ha la seguente

Definizione di parte o sottoinsieme di in insieme. A è parte o sottoinsieme di un insieme U se e solo se A è l'insieme vuoto oppure $A \neq \emptyset$ ed ogni elemento di A è anche elemento di U .

In base alla definizione data, un insieme U è **parte di se stesso** (infatti ogni elemento di U appartiene a U): $U \subseteq U$; U è detto allora **parte impropria di U** ; le altre parti di U sono allora dette parti proprie.

Nota sul concetto di uguaglianza di insiemi: due insiemi sono **uguali** se e solo se **coincidono**, cioè **hanno gli stessi elementi**. Allora

$$A=B \text{ se e solo se } (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

Parti proprie e Il segno di inclusione stretta \subset .

Una **parte propria** A di U è una parte di U non coincidente con U ; essa è perciò definita dalle seguente condizione:

$$A \subseteq U \text{ e } A \neq U \tag{1}$$

Per indicare che A è **parte propria di U** e cioè che verifica la (1), poniamo tra A e U il simbolo di inclusione stretta " \subset " e diciamo che A è **inclusa strettamente in U** :

$$A \subset U \quad \text{si legge } A \text{ è } \textit{incluso strettamente in } U;$$

la stessa informazione è fornita dalla seguente scrittura

$$U \supset A \quad \text{che si legge } U \textit{ include strettamente } A$$

Il simbolo $\not\subset$ si pone tra due insiemi per dire che il primo non è incluso strettamente nel secondo

Esempi

$$A = \{a, b, c, e\} \subset U$$

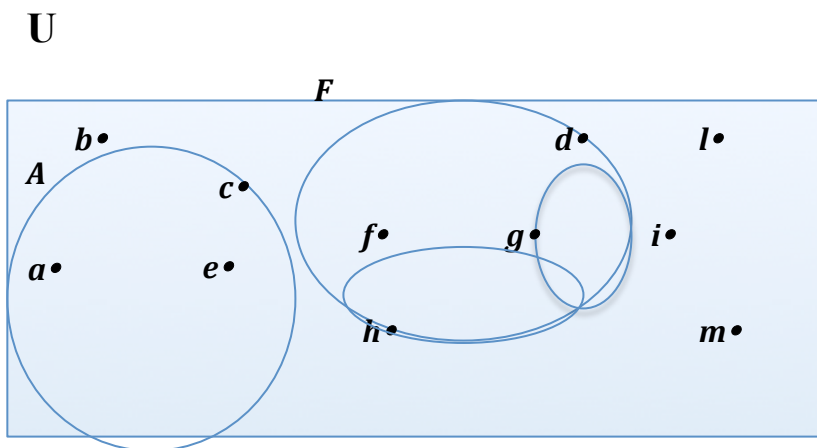
$$F = \{f, g, d\} \subset U$$

$$\{d\} \subset U \quad \{d\} \subset F$$

$$\text{perciò } \{d\} \subset F \subset U$$

$$\emptyset \subset A, \quad \{f, g\} \subset F$$

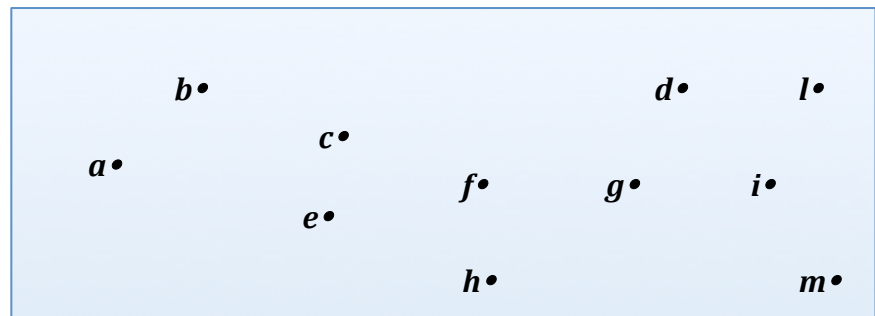
$$A \subseteq A \quad A \not\subset A$$



Sulla notazione intensiva di una parte. Una parte di un insieme U può essere individuata attraverso una proprietà di cui godono alcuni elementi di U o, se la parte è vuota, da nessun elemento di U ; allora si può utilizzare per essa la notazione intensiva per proprietà caratteristica, specificando però che la proprietà va riferita a elementi dell'insieme U ; ciò va fatto indicando subito dopo la prima parentesi graffa che $x \in U$

Esempio. Con riferimento all'insieme $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$

U



La parte $V = \{a, e, i\}$ può essere descritta con notazione intensiva nel seguente modo

$$V = \{x \in U : x \text{ è una vocale} \} = \{a, e, i\}$$

Notiamo che la scrittura $\{x : x \text{ è una vocale} \}$ in cui non è specificata l'appartenenza di x a U , indica un insieme con più elementi, $\{a, e, i, o, u\}$, che non è parte di U :

$$V = \{x \in U : x \text{ è una vocale} \} = \{a, e, i\} \subseteq U$$

$$\{x : x \text{ è una vocale} \} = \{a, e, i, o, u\} \not\subseteq U$$

La parte vuota di U può essere descritta da una proprietà che non è verificata da nessun elemento di U :

$$\emptyset = \{x \in U : x = u \text{ o } x = z \}$$

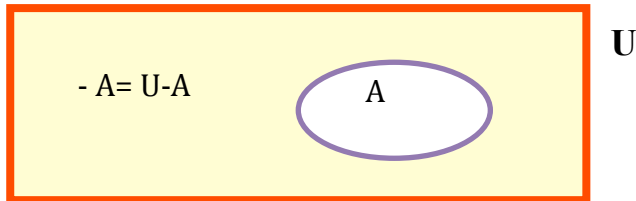
$$\emptyset = \{x \in U : x = u \text{ o } x = z \}$$

2.1 Complemento di una parte rispetto all'insieme

Definizione .Sia A un sottoinsieme di U ; si chiama **parte complementare di A o complemento di A rispetto all'insieme U** , la parte di U costituita dagli elementi che non appartengono a A .

La parte complementare di B viene indicata con uno dei simboli A^c , $-A$, $C_u A$, $S-A$
Allora per definizione è:

$$A^c = -A = U - A = \{x \in U : x \notin A\} \quad \text{complemento di } A \text{ rispetto ad } U.$$



Casi particolari:

$$-(-A) = A \quad \text{il complemento del complemento della parte } A \text{ è } A$$

$$-U = U - U = \emptyset \quad \text{il complemento di tutto l'insieme } U \text{ è la parte vuota}$$

$$U - \emptyset = U \quad \text{il complemento della parte vuota è tutto l'insieme } U$$

Esempi: se $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$ e $A = \{g, l, m\}$ allora

$$-A = U - A = \{a, b, c, d, e, f, h, i\}$$

Se $U = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $A = \{1, 3, 7\}$ allora $-A = \{2, 5\}$

Se $U = \{x : \text{studente del c. di laurea in Urbanistica}\}$ e $A = \{x \in U : x \text{ di sesso femminile}\}$

allora $-A = \{x \in U : x \dots\dots\dots\}$

3. L'insieme delle parti di un insieme S

Definizione. Dato un insieme S , si definisce insieme delle parti di S l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi propri e impropri. L'insieme delle parti di S si indica con $P(S)$

S insieme		$P(S)$ = insieme delle parti di S
Se $S = \emptyset$	allora	$P(S) = \{\emptyset\}$
Se $S = \{a\}$	allora	$P(S) = \{\emptyset, \{a\}\}$
Se $S = \{a, b\}$	allora	$P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
Se $S = \{a, b, c\}$	allora	$P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
.....		

Se S ha n elementi allora $P(S) = \{\emptyset, \dots, S\}$ ha 2^n elementi

Esercizio:

$S = \{a, 1, 0\}$ e $T = \{\emptyset, \{a\}, \{0\}, \{1\}, \{a, 1\}, \{a, 0\}, S\}$

T è l'insieme $P(T)$ delle parti di S o è un insieme di parti di S ?

Nota sull'ordinamento parziale indotto in $P(S)$ della relazione di inclusione.

Gli elementi di $P(S)$, cioè le parti di S , possono essere allineate attraverso la relazione di inclusione: *in un allineamento una parte precede ogni altra parte in cui è inclusa*; ma, se S ha più di un elemento, non si ha un allineamento unico e totale, ma solo allineamenti parziali perché ci sono parti di S che non sono confrontabili attraverso la relazione di \subseteq o di \supseteq , cioè non sono l'una inclusa nell'altra.

Ad esempio se $S = \{a, b, c\}$ e quindi $P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$, si hanno gli allineamenti

$$\emptyset \subset \{a\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\}$$

$$\emptyset \subset \{a\} \subset \{a, c\} \subset \{a, b, c\}$$

$$\emptyset \subset \{b\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\}$$

$$\emptyset \subset \{b\} \subset \{b, c\} \subset \{a, b, c\}$$

$$\emptyset \subset \{c\} \subset \{a, c\} \subset \{a, b, c\}$$

$$\emptyset \subset \{c\} \subset \{b, c\} \subset \{a, b, c\}$$

$\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ non sono confrontabili attraverso la relazione di inclusione e quindi non possono comparire in uno stesso allineamento.

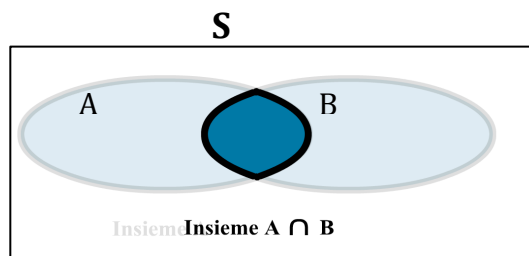
4. Operazioni nell'insieme $P(S)$ delle parti di S

Un'operazione binaria nell'insieme $P(S)$ delle parti di S , agisce su una coppia (A, B) di parti (elementi di $P(S)$) per ottenere un'altra parte di S .

4.1 L'operazione di intersezione e il simbolo di intersezione \cap

L'operazione d'intersezione costruisce a partire da una coppia (A, B) di parti di S l'insieme costituito dagli elementi comuni alle due parti considerate: tale insieme viene indicato con $A \cap B$ (A intersecato B):

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$



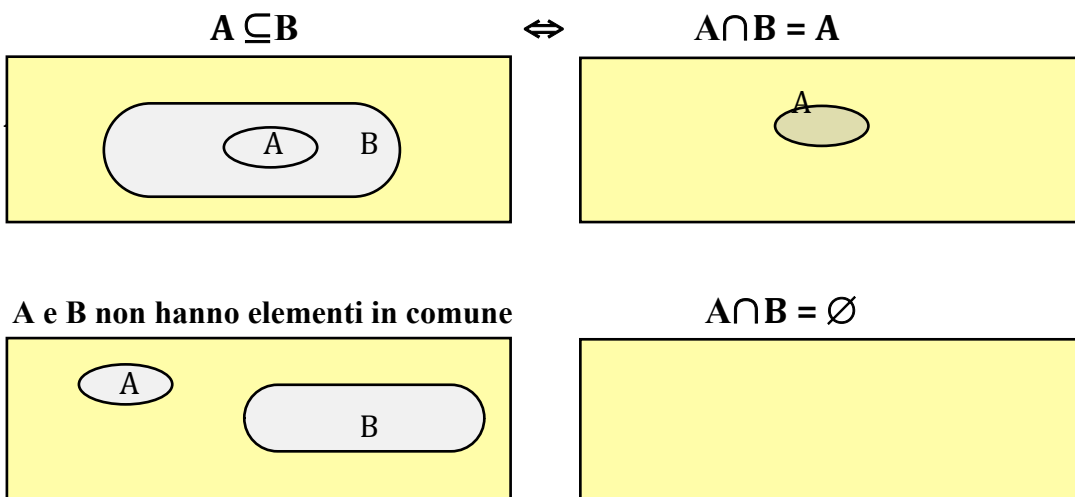
Se utilizziamo la notazione intensiva per le parti A e B di S .

$$A = \{x \in S : P_1(x)\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in S : P_2(x)\},$$

allora l'insieme $A \cap B$ è così definito:

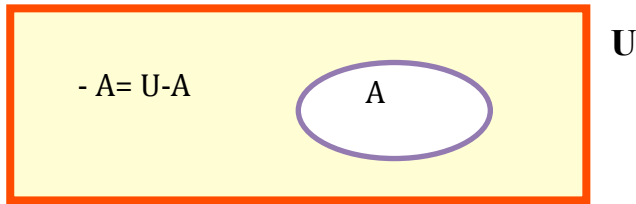
$$A \cap B = \{x \in S : P_1(x) \text{ e } P_2(x)\}$$

Casi particolari:



Se $A \cap B = \emptyset$, A e B si dicono sottoinsiemi DISGIUNTI di S

Esempi di insiemi disgiunti sono A e B = -A (complemento di A)



Esempi: $S = \{1, 7, 2, 3, 5\}$

1. se $A = \{2, 5\}$ e $B = \{7, 3, 5\}$ allora $A \cap B = \{5\}$

2. se $X = \{x \in S : x \text{ è dispari}\}$ e $Y = \{x \in S : x < 5\}$

allora $X \cap Y = \{x \in S : \text{“}x \text{ è dispari” e “}x < 5\text{”}\} = \{1, 3\}$

3. se $T = \{x \in S : x \text{ è pari}\} = \{2\}$ e $V = \{x \in S : x > 3\} = \{5, 7\}$

allora $T \cap V = \{x \in S : \text{“}x \text{ è pari” e “}x > 3\text{”}\} = \emptyset$

Proprietà:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

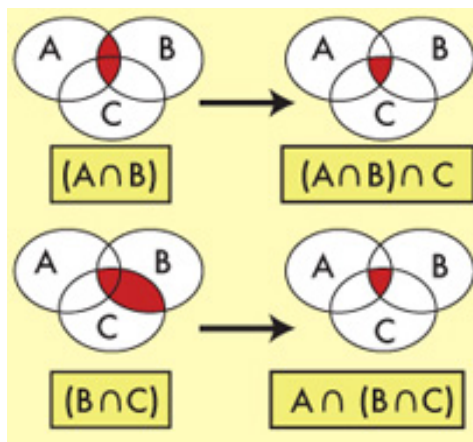
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

S elemento neutro rispetto all'operazione di intersezione

idempotenza

prop. commutativa

prop. associativa

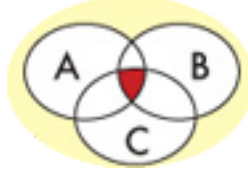


prop. associativa

Intersezione di tre insiemi:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =$$

$$= \{x \in S : x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\}$$



Intersezione di quattro insiemi:

$$A \cap B \cap C \cap D = (A \cap B \cap C) \cap D = \{x \in S : x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C \text{ e } x \in D\}$$

Intersezione di n insiemi: indichiamo gli n insiemi con una stessa lettera maiuscola A e con a pedice un indice che varia da 1 a n :

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$I = \{1, 2, \dots, n\} \text{ insieme degli indici}$$

L'intersezione degli n insieme è allora l'insieme:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \in S : x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x \in A_n\}$$

$$= \{x \in S : x \in A_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \{x \in S : x \in A_i \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

L'insieme intersezione $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ è indicato più brevemente con un dei simboli

$$\bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i \in I} A_i.$$

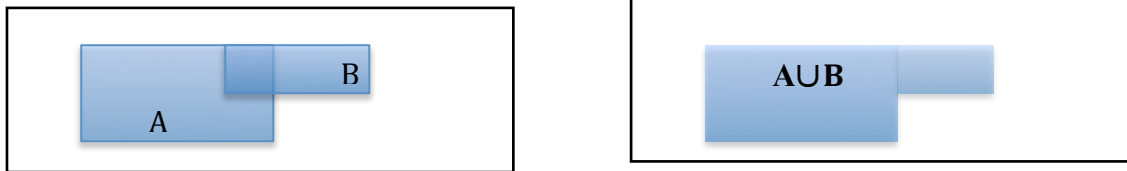
Allora:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in S : x \in A_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

4.2 L'operazione di unione e il simbolo di intersezione \cup .

L'operazione di unione associa a una coppia (A, B) di parti di S l'insieme costruito con tutti gli elementi di entrambe le parti considerate: tale insieme viene indicato con $A \cup B$ (*A unito B*):

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$$

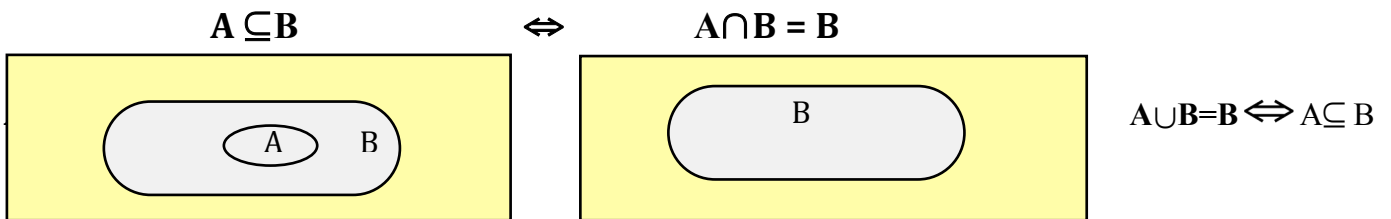


Se $A = \{x \in S: P_1(x)\}$ e $B = \{x \in S: P_2(x)\}$

allora

$$A \cup B = \{x \in S: P_1(x) \text{ o } P_2(x)\}$$

Caso particolare:



Esempio: $S = \{1, 7, 2, 3, 5\}$

1. se $A = \{2, 5\}$ e $B = \{7, 3, 5\}$ allora $A \cup B = \{2, 5, 7, 3, 5\} = \{2, 5, 7, 3\}$;

2. se $X = \{x \in S: x \text{ è pari}\}$ e $Y = \{x \in S: x < 5\}$
allora $X \cup Y = \{x \in S: "x \text{ è pari}" \text{ o } "x < 5"\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 3\}$;

3. se $T = \{x \in S: x \text{ è pari}\} = \{2\}$ e $V = \{x \in S: x > 3\} = \{5, 7\}$

allora $T \cup V = \{x \in S: "x \text{ è pari}" \text{ o } "x > 3"\} = \{2, 5, 7\}$

Proprietà:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

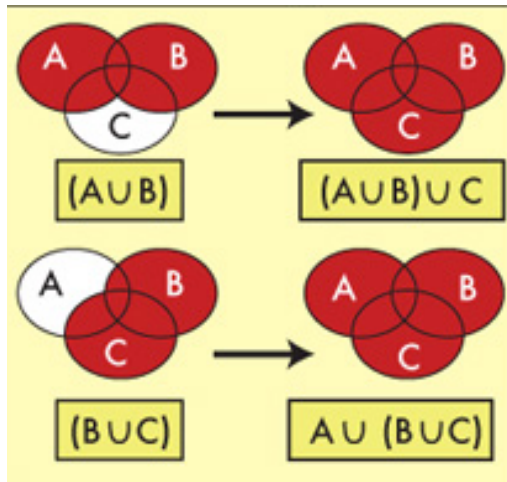
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

\emptyset elemento neutro

idempotenza

prop. commutativa

prop. associativ



prop. associativa

Unione di tre insiemi:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{x \in S : x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C\}$$



$A \cup B \cup C$

Unione di quattro insiemi:

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \cup B \cup C) \cup D = \{x \in S : x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C \text{ o } x \in D\}$$

Unione di n insiemi: A_1, A_2, \dots, A_n

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ insieme degli indici

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \in S : x \in A_1 \text{ o } x \in A_2 \text{ o } \dots \text{ o } x \in A_n\} =$$

$$= \{x \in S : \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : x \in A_i\}$$

L'insieme unione $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ è indicato più brevemente con un dei simboli

$$\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i \in I} A_i$$

Allora

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in S : \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : x \in A_i\}$$

Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione:

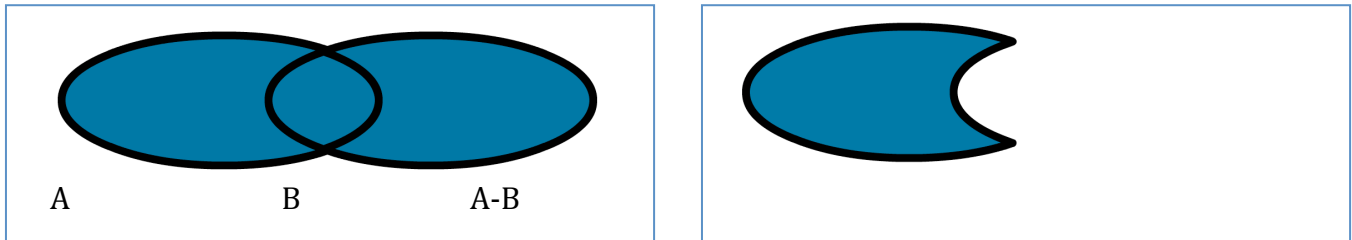
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4.3 L'operazione di differenza

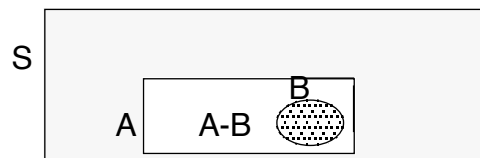
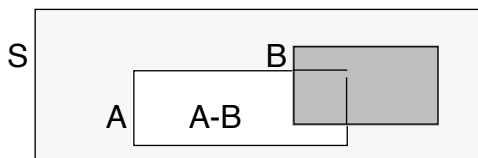
L'operazione di differenza associa a una coppia (A, B) di parti di S l'insieme costruito con tutti gli elementi di A che non appartengono a B : tale insieme viene indicato con $A-B$ e chiamato **insieme differenza** di A e B

$$A - B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x \in A: x \notin B\} \text{ parte di } A$$

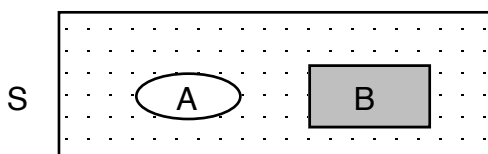


La parte $A - B$ è detta anche **parte complementare** di B rispetto ad A .

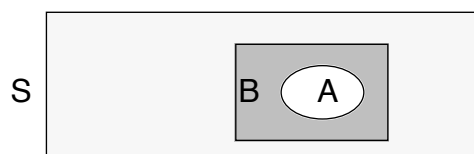
$$A - B = A - (A \cap B)$$



$$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$



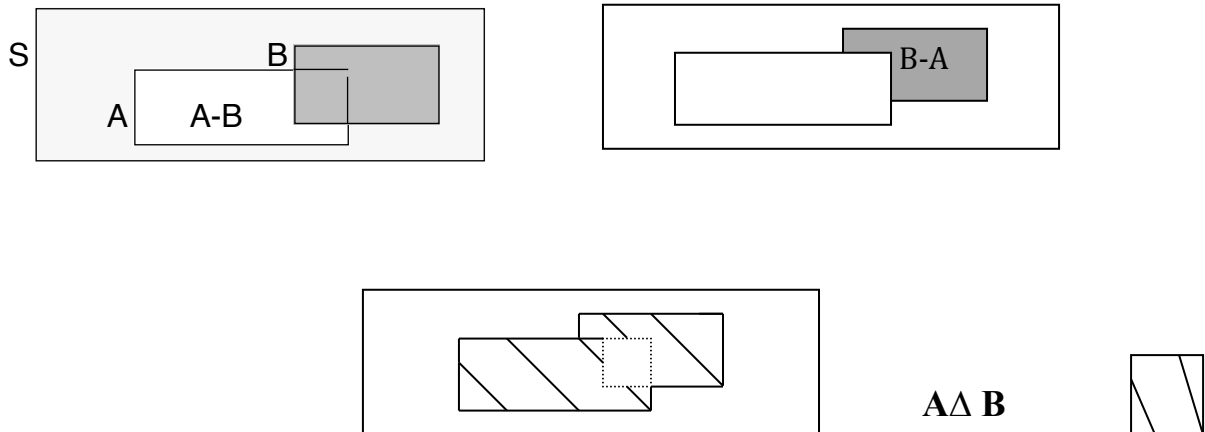
$$A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$$



4.3.1 Differenza simmetrica di due parti di un insieme

La differenza simmetrica di A e B, denotata con $A \Delta B$, è l'insieme unione di A-B e B-A

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$



$$A \Delta B = B \Delta A$$

proprietà commutativa

Esempi: $S = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$$A = \{2, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 7\}$$

$$C = \{2, 5\}$$

$$A-B = \{2, 5\}$$

$$B-A = \{1, 3\}$$

$$A \Delta B = \{2, 5\}$$

$$\cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$A-C = \{7\}$$

$$C-A = \emptyset$$

$$B-C =$$

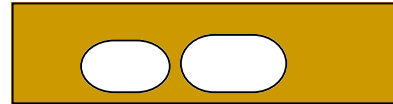
$$C-B =$$

$$A \Delta C =$$

5. Partizioni di un insieme S

Ricordiamo che:

due parti non vuote di un insieme si dicono disgiunte se la loro intersezione è la parte vuota di S



$$A \cap B = \emptyset$$

Esempi: $S = \{1, 7, 2, 3, 5\}$

$$A = \{2, 5\} \quad B = \{1, 7, 3\} \quad B' = \{7, 3\}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad A \cap B' = \emptyset \quad B \cap B' = \{7, 3\}$$

A e B sono parti disgiunte di S, A e B' sono parti disgiunte di S

\mathbb{N} = insieme sei numeri naturali

$$N_p = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ è pari}\}$$

$$N_d = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ è dispari}\}$$

$$N_p \cap N_d = \emptyset$$

N_p e N_d sono parti disgiunte di \mathbb{N}

Consideriamo il caso particolare di due parti *non vuote* di S che siano *disgiunte* e la cui *unione* è S

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \quad A \cap B = \emptyset \quad A \cup B = S \quad (2)$$

Allora ogni elemento di S appartiene ad una delle due parti e ad una sola
Nel caso siano vere le (2) diciamo che $\{A, B\}$ è una **partizione** di S.



Se $\{A, B\}$ è una *partizione di S* allora $A = -B$ e $B = -A$

Esempio: le parti N_p e N_d di \mathbb{N} verificano le condizioni

$$N_p \neq \emptyset, N_d \neq \emptyset \quad N_p \cap N_d = \emptyset \quad N_p \cup N_d = \mathbb{N}$$

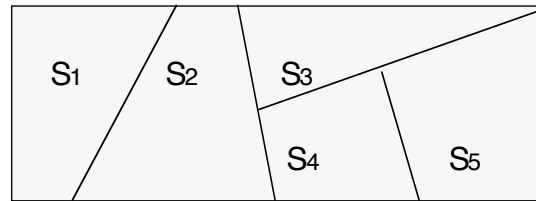
Allora $\{N_p, N_d\}$ è una **partizione di \mathbb{N}**

Il concetto di partizione si può estendere a più di due insiemi

Definizione generale di partizione di S.

Sia $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, $k \geq 2$, un insieme di parti di S. Diremo che Π è una partizione di S se e solo se le seguenti condizioni sono verificate:

1. $S_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ per $i \neq j$
3. $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$



Se $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ è una partizione di S, ogni elemento x di S appartiene ad uno ed uno solo degli elementi S_i della partizione.

Esempi

1. $S = \{1, 7, 2, 3, 5\}$

$\Pi = \{\{1\}, \{7, 3\}, \{2, 5\}\}$ è una partizione di S

$\Pi' = \{\{1\}, \{7, 2, 3\}, \{2, 5\}\}$ non lo è. Perché?

$\Pi'' = \{\{1\}, \{7\}, \{2, 5\}\}$ non lo è. Perché?

$\Pi = \{\emptyset, \{1\}, \{7, 3\}, \{2, 5\}\}$ non lo è. Perché?

Costruire una partizione di S diversa dalla precedente Π .

2. $S = \{x \in S : x \text{ studente del 1° anno di un corso afferente al DIARC dell'Univ. Federico II}\}$

$S_1 = \{x \in S : x \text{ iscritto al corso di laurea quinquennale in Architettura}\}$

$S_2 = \{x \in S : x \text{ iscritto al corso di laurea in Scienze dell'Architettura}\}$

$S_3 = \{x \in S : x \text{ iscritto al corso di laurea in Urbanistica, Pianificazione -Territoriale e Ambiente}\}$

$\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ partizione di S

Ogni studente iscritto al primo anno di un corso del DIARC appartiene a uno e uno solo dei corsi di laurea istituiti presso il dipartimento, cioè ad uno ed uno solo degli insiemi elementi di Π .