

1. Valore assoluto di un numero reale

Definizione. Il *valore assoluto* di un numero reale x , denotato con $|x|$, è definito dall'uguaglianza:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto di un numero è il numero stesso se esso è non negativo, è l'opposto del numero, in caso contrario. Dalla definizione segue che:

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Esempio 1. $|5| = 5$ (perché $5 > 0$), $|0| = 0$ (perché $0 = 0$), $|\frac{-3}{5}| = -(\frac{-3}{5}) = \frac{3}{5}$ (perché $\frac{-3}{5} < 0$)

Proprietà del valore assoluto: Il valore assoluto di un numero verifica la proprietà (1) e le seguenti:

1. $|-x| = |x|$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|xy| = |x||y|$;
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ per $y \neq 0$;
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
6. $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

L'equazione $|x| = a$ e l'insieme delle sue soluzioni $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| = a\}$.

1°. Sia $a < 0$. Per la (1) il valore assoluto non può essere negativo, perciò $|x| = a$ non ha soluzioni; l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto: $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| = a\} = \emptyset$.

2°. Sia $a = 0$. Per la proprietà 2., $|x| = 0$ ha la sola soluzione 0 , quindi $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 0\} = \{0\}$.

3°. Sia $a > 0$. Per definizione di valore assoluto si ha una soluzione **positiva** ponendo $x = |x| = a$, che è ovviamente a , e l'altra **negativa**, che per la proprietà 1 (per cui $|-a| = |a|$), è $-a$; perciò:

$$|x| = a \Leftrightarrow (x = a \text{ o } x = -a) \tag{2}$$

e $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| = a\} = \{-a, a\}$.

Esempi 2

Risolviamo $|x| = 2$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\}$.

Siamo nel caso 3°. L'insieme delle soluzioni è allora $S = \{-2, 2\}$

Risolviamo $|x| = -3$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| = -3\}$.

Siamo nel caso 1°. L'equazione non ha soluzioni reali perché $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora $S = \emptyset$.

Risolviamo $|x-2| = 0$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| = 0\}$.

Per la proprietà 2. è $|x-2| = 0$ se e solo se è $x-2 = 0$, cioè se e solo se è $x = 2$. Allora $S = \{2\}$.

Risolviamo $|x-2| = 4$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| = 4\}$.

Siamo nel caso 3° con $x-2$ al posto di x . Allora

$$|x-2| = 4 \Leftrightarrow (x-2 = -4 \text{ o } x-2 = 4) \Leftrightarrow (x = -2 \text{ o } x = 6). \quad \text{Quindi } S = \{-2, 6\}$$

Risolviamo $|x-2| = |2x-4|$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| = |2x-4|\}$.

Due numeri hanno lo stesso valore assoluto se e solo se coincidono o (per la proprietà 1.) sono opposti, perciò:

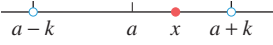
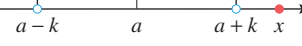
$$|x-2| = |2x-4| \Leftrightarrow (x-2 = 2x-4 \text{ o } x-2 = -2x+4) \Leftrightarrow (x=2 \text{ o } x=2/3). \quad \text{Allora } S = \{2/3, 2\}.$$

Risolviamo $\left|\frac{3-x}{2}\right| = 2$

1.1 Alcune disequazioni con il valore assoluto e l'insieme S delle soluzioni.

Sia $k > 0$. Nella tabella sottostante indichiamo a sinistra le soluzioni delle disequazioni $|x| < k$, $|x| \leq k$, $|x| > k$, $|x| \geq k$ e a destra le soluzioni delle disequazioni che si ottengono dalle precedenti sostituendo x con $x-a$.

$k > 0$

| | |
|---|--|
| $ x < k \Leftrightarrow -k < x < k \Leftrightarrow x \in]-k, k [$ $S =]-k, k [$ ins. delle soluzioni | $ x-a < k \Leftrightarrow -k < x-a < k \Leftrightarrow a-k < x < a+k \Leftrightarrow x \in]a-k, a+k [$  $S =]a-k, a+k [$ insieme delle soluzioni |
| $ x \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$ $S = [-k, k]$ ins. delle soluzioni | $ x-a \leq k \Leftrightarrow -k \leq x-a \leq k \Leftrightarrow a-k \leq x \leq a+k \Leftrightarrow x \in [a-k, a+k]$ $S = [a-k, a+k]$ insieme delle soluzioni |
| $ x > k \Leftrightarrow x < -k \text{ o } x > k$ $S =]-\infty, -k[\cup]k, +\infty [$ ins. delle soluzioni | $ x-a > k \Leftrightarrow (x-a < -k \text{ o } x-a > k) \Leftrightarrow (x < a-k \text{ o } x > a+k) \Leftrightarrow$ $x \in]-\infty, a-k[\cup]a+k, +\infty [$  $S =]-\infty, a-k[\cup]a+k, +\infty [$ ins. delle soluzioni |
| $ x \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \text{ o } x \geq k$ $S =]-\infty, -k] \cup [k, +\infty [$ ins. delle soluzioni | $ x-a \geq k \Leftrightarrow (x-a \leq -k \text{ o } x-a \geq k) \Leftrightarrow (x \leq a-k \text{ o } x \geq a+k) \Leftrightarrow$ $x \in]-\infty, a-k] \cup [a+k, +\infty [$ $S =]-\infty, a-k] \cup [a+k, +\infty [$ ins. delle soluzioni |

Mostriamo come giungere a determinare le soluzioni della disequazione $|x| < k$.

Il numero 0 è ovviamente una soluzione della disequazione $|x| < k$ e, per la proprietà 1. del valore assoluto, $x \neq 0$ è una soluzione della disequazione se e solo se anche $-x$ lo è: *pertanto, per aver e tutte le soluzioni, è sufficiente determinare le soluzioni positive della disequazione ed aggiungere ad esse i valori opposti e lo 0.*

Le **soluzioni positive** di $|x| < k$ si ottengono ponendo $x=|x| < k$ e sono tutti i numeri positivi minori di k , cioè gli x compresi tra 0 e k : le **soluzioni negative** sono i numeri opposti delle soluzioni positive, cioè i numeri compresi tra $-k$ e 0; aggiungendo lo 0 possiamo dire che **sono soluzioni tutti i numeri compresi tra $-k$ e k .**

$$\begin{array}{c}
 \text{-----} \underline{\quad k \quad} \quad \bullet \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \bullet \quad \underline{\quad k \quad} \text{-----} \\
 -k < -|x| < 0 \qquad 0 < x = |x| < k < 0
 \end{array}$$

$S = \{ x \in \mathbb{R} : |x| < k \} =]-k, k [$

Mostriamo come giungere a determinare le soluzioni della disequazione $|x| > k$.

Il numero 0 non è ovviamente una soluzione della disequazione; cerchiamo le soluzioni positive cioè quelle per cui è $x=|x| > k$: queste sono ovviamente costituite dai numeri x maggiori di k ; tutte le altre soluzioni sono date dai numeri opposti che sono ovviamente minori di $-k$

$$\begin{array}{c}
 \text{-----} \underline{\quad k \quad} \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad k \quad} \text{-----} \\
 -|x| < k \qquad \qquad \qquad x = |x| > k
 \end{array}$$

$S = \{ x \in \mathbb{R} : |x| > k \} =]-\infty, -k[\cup]k, +\infty [$

In modo analogo, cioè determinando le soluzioni positive dapprima, si giunge all'insieme della soluzioni delle altre disequazioni

Esempi 3.

Risolviamo $|x-2| < 4$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 4\}$.

$$|x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-2 < 4 \Leftrightarrow 2-4 < x < 2+4 \Leftrightarrow x \in]-2, 6[. \text{ Allora } S =]-2, 6[.$$

$$\text{-----} \quad -2 \cdot \text{-----} \quad 6 \cdot \text{-----}$$

Risolviamo $|x-2| \leq 4$ troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 4\}$.

$$|x-2| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-2 \leq 4 \Leftrightarrow 2-4 \leq x \leq 2+4 \Leftrightarrow x \in [2-4, 2+4]. \text{ Allora } S = [-2, 6].$$

$$\text{-----} \quad -2 \cdot \text{-----} \quad 6 \cdot \text{-----}$$

Risolviamo $|x-2| > 4$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| > 4\}$.

$$|x-2| > 4 \Leftrightarrow (x-2 < -4 \text{ o } x-2 > 4) \Leftrightarrow (x < 2-4 \text{ o } x > 2+4) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2-4[\cup]2+4, +\infty[.$$

$$\text{Allora } S =]-\infty, -2[\cup]6, +\infty[\quad \text{-----} \quad -2 \cdot \text{-----} \quad 6 \cdot \text{-----}$$

Risolviamo $|x-2| \geq 4$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 4\}$.

$$|x-2| \geq 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2-4] \cup [2+4, +\infty[. \text{ Allora } S =]-\infty, -2] \cup [6, +\infty[.$$

$$\text{-----} \quad -2 \cdot \text{-----} \quad 6 \cdot \text{-----}$$

Risolviamo $|2x-3| \leq 4$, troviamo cioè l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |2x-3| \leq 4\}$.

$$|2x-3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2x-3 \leq 4 \Leftrightarrow 3-4 \leq 2x \leq 3+4 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \leq 7 \Leftrightarrow -1/2 \leq x \leq 7/2$$

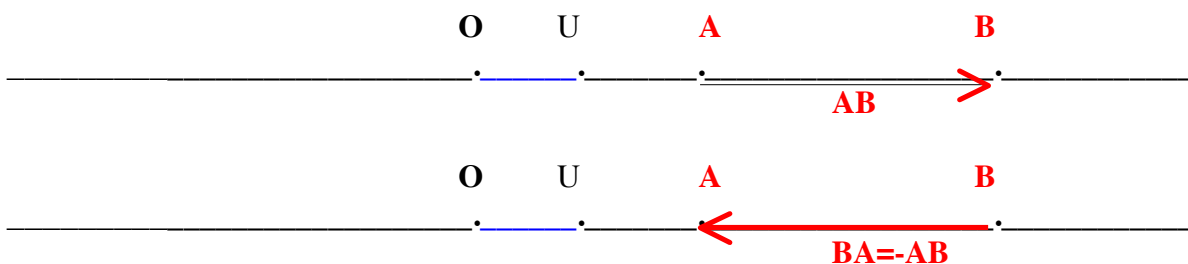
$$\text{Allora } S = [-1/2, 7/2]. \quad \text{-----} \quad -1/2 \cdot \text{-----} \quad 7/2 \cdot \text{-----}$$

2. Significato geometrico del valore assoluto e distanza di due punti sulla retta.

Sia r un asse cartesiano (retta sulla quale è stato fissato un riferimento cartesiano (O, U)) e siano A e B punti distinti di r ; conveniamo di indicare:

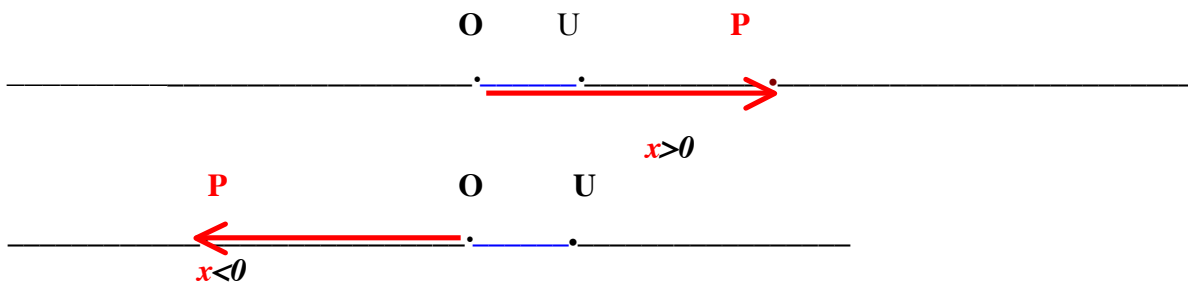
- con \overline{AB} o, indifferentemente, con \overline{BA} il segmento di estremi A e B ;
- con \overrightarrow{AB} il segmento di estremi A e B orientato da A a B : allora \overrightarrow{BA} , segmento orientato da B ad A è detto opposto di \overrightarrow{AB} e si scrive $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- con $|AB|$ o $|\overline{AB}|$ la lunghezza del segmento \overline{AB} rispetto a $\underline{u} = \overline{OU}$.
- con (AB) a misura relativa del segmento orientato \overrightarrow{AB} rispetto al segmento orientato \overrightarrow{OU} definita nel modo seguente:

$$(AB) = \text{misura relativa di } \overrightarrow{AB} = \begin{cases} |AB| & \text{se } \overrightarrow{AB} \text{ è orientato concordemente ad } \overrightarrow{OU} \\ -|AB| & \text{se } \overrightarrow{AB} \text{ è orientato in modo discorde ad } \overrightarrow{OU} \end{cases}$$



Sappiamo che ogni numero reale x individua un punto P sull'asse cartesiano e viceversa: x è detto *ascissa di P nel riferimento (O, U)* . Il legame tra P e la sua ascissa x , è il seguente:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{se } P = O \\ |OP| (> 0) & \text{se } \overrightarrow{OP} \text{ è orientato concordemente ad } \overrightarrow{OU} \\ -|OP| (< 0) & \text{se } \overrightarrow{OP} \text{ è orientato in modo discorde ad } \overrightarrow{OU} \end{cases}$$



Perciò: se $P \neq O$ è un punto dell'asse r e x è la sua ascissa:

- x è la **misura relativa** del segmento orientato \overrightarrow{OP} rispetto a segmento orientato \overrightarrow{OU} (e quindi *relativa al verso fissato sulla retta*),
- $|x|$ è la **lunghezza** $|OP|$ di \overline{OP} . (significato geometrico di $|x|$)

Esempio 4. Sia A di ascissa -2 e B di ascissa 5 :



Allora: $|AB| = |AO| + |OB| = 2 + 5 = 7$ $(AB) = 7$ e $(BA) = -7$

Nota: $(AB) = 7 = 5 - (-2)$ (ascissa di B - ascissa di A) $(BA) = -7 = -2 - (5)$ (ascissa di A - ascissa di B)

Distanza di due punti A e B.

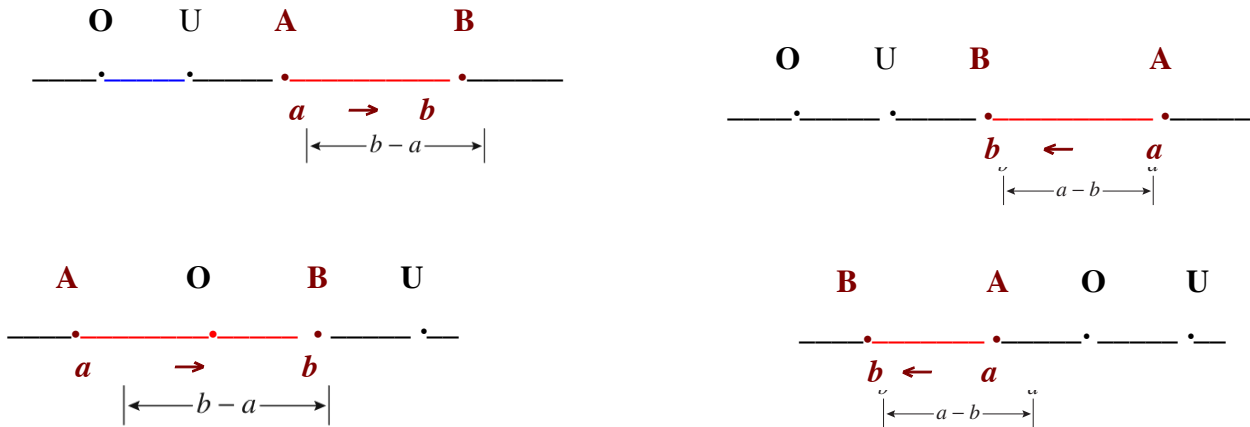
Siano a e b rispettivamente l'ascissa del punto A e l'ascissa del punto B dell'asse r :

- la differenza $b-a$ (positiva se B segue A nel verso dell'asse, negativa se B precede A) è la **misura relativa del segmento orientato AB** :

$$(AB) = b-a;$$

- Il valore assoluto $|b-a|$ è la **lunghezza del segmento \overline{AB}** o **distanza tra A e B**, indicata con $d(A, B)$:

$$d(A, B) = |b-a| = |a-b|$$



In particolare è:

$$d(A, O) = |a-0| = |a| \quad (\text{distanza di } A \text{ dall'origine } O)$$

3. Struttura metrica di \mathbb{R}

Definizione di distanza i due numeri. La *distanza tra numeri* reali è suggerita dalla distanza di due punti sulla retta, ma prescinde dalla rappresentazione dei numeri sulla retta e quindi da un'unità di misura.

Definizione. Se a e b sono numeri reali, **distanza di a e b** è il valore assoluto $|b-a| = |a-b|$.

Poniamo cioè:

$$d(a, b) = |b-a| = |a-b| \quad (\text{distanza dei numeri } a \text{ e } b)$$

In particolare:

$$d = d(a, 0) = |a| \quad (\text{distanza di } a \text{ da } 0)$$

Esempio 4: $d(-5, 3) = |-5-3| = 8 = 3-(-5)$; $d(-5, -3) = |-5+3| = 2 = -3-(-5)$

Proprietà della distanza di due numeri.

1. $d(a, b) \geq 0$
2. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
3. $d(a, b) = d(b, a)$ (prop. di simmetria)
4. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(a, c)$ (disuguaglianza triangolare)

L'insieme dei numeri reali \mathbb{R} considerato insieme all'applicazione *distanza o metrica*

$$d: (a, b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow d(a, b) = |b-a| \in [0, +\infty[$$

assume il nome di *spazio metrico dei numeri reali*.

4. Intorno di un numero reale definito attraverso il concetto di distanza

Abbiamo definito *intorno di raggio ϑ di un numero reale c* l'intervallo aperto $]c-\vartheta, c+\vartheta[$. Utilizzando il concetto di distanza possiamo ridefinire il concetto di **intorno** di un numero reale c : *intorno di c di raggio $\vartheta > 0$* è l' *insieme dei numeri reali x che hanno da c distanza minore di ϑ*

$$I(c, \vartheta) = I_c = \{x \in \mathbb{R} : |x-c| < \vartheta\} \quad \text{intorno di } c \text{ di raggio } \vartheta$$

Infatti, dall'equivalenza $|x-c| < \vartheta \Leftrightarrow c-\vartheta < x < c+\vartheta$ ottenuta studiando le disuguaglianze con il valore assoluto, deduciamo la seguente uguaglianza tra insiemi:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-c| < \vartheta\} = \{x \in \mathbb{R} : c-\vartheta < x < c+\vartheta\} =]c-\vartheta, c+\vartheta[= I(c; \vartheta) \quad (3)$$



perciò l'insieme considerato, definito in termini di distanza, è l'*intervallo aperto di centro c e raggio o semidimensione ϑ* , che nel fascicolo sui numeri reali abbiamo chiamato intorno di c di raggio ϑ .

Relazione tra gli intorni di uno stesso punto c :

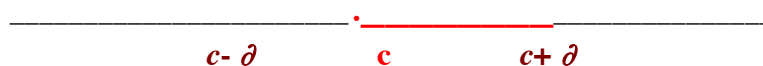
$$\text{se } \vartheta' < \vartheta'' \text{ allora } I(c, \vartheta') \subset I(c, \vartheta'')$$

Esempi. L'intorno di 3 di raggio 4 è l'intervallo $]3-4, 3+4[=]-1, 7[$; l'intorno di 0 di raggio 4 è l'intervallo $] -4, 4[$; l'intorno di -3 di raggio 4 è l'intervallo

Intorno destro e intorno sinistro di $c \in \mathbb{R}$

Un *intorno destro di c di raggio $\vartheta > 0$* è l'insieme

$$I(c, \vartheta)^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq c \text{ e } |x-c| < \vartheta\} = \{x \in \mathbb{R} : c \leq x < c+\vartheta\} = [c, c+\vartheta[$$



Un *intorno sinistro di c di raggio $r > 0$* è l'insieme

$$I(c, \vartheta)^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq c \text{ e } |x-c| < \vartheta\} = \{x \in \mathbb{R} : c-\vartheta < x \leq c\} =]c-\vartheta, c]$$



Pertanto un intorno $]c-\vartheta, c+\vartheta[$ di c è unione di un intorno sinistro e di un intorno destro di c con lo stesso raggio: $]c-\vartheta, c+\vartheta[=]c-\vartheta, c] \cup [c, c+\vartheta[$.

$]c-\vartheta, c+\vartheta[$ è detto **intorno completo di c** .