Punti interni, di frontiera e di accumulazione per una parte di R

Utilizzando il concetto di intorno di possiamo considerare particolari punti di un insieme numerico A o punti di $\hat{R}$ che a esso si rapportano in modo speciale: *punti interni* ad A, *punti di frontiera* per A e *punti di accumulazione* per A

1. Punti interni a una parte A di R e punti di frontiera per A.

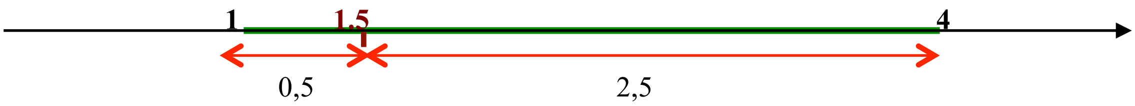
Definizione di punto interno. *Siano* **A** *un sottoinsieme di* **R** e x_0 *un elemento di* **A**. *Il punto* x_0 *è un* **punto interno** *di* **A** *se e solo se* <u>*esiste*</u> *un intorno completo di* x_0 *tutto contenuto in* A.

$$x_0 \text{ interno } a \ A \Leftrightarrow \exists \ I(x_0) \subseteq A$$

L'insieme dei punti interni **A** è indicato con **A°** ed è chiamato l' **interno** di A

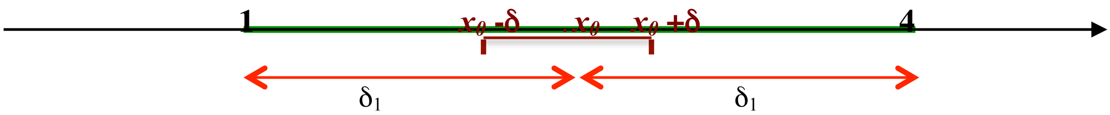
Definizione di punto di frontiera. *Siano* **A** *un sottoinsieme di* **R** e x_0 *un numero reale. Il punto* x_0 è un **punto di frontiera per A** *se e solo se ad* <u>*ogni*</u> *intorno completo di* x_0 *appartiene almeno un punto di* A *e almeno un punto del complementare* **–A**, *cioè non appartenente ad* A.

Esempio 1. Consideriamo l'intervallo **I = [1, 3]** e il punto **1.5** che appartiene all'intervallo.



Domanda:
1,5 *è interno a* I ? Lo è se esiste un intorno **]1.5 -δ, 1.5 +δ[** di **1.5** incluso in **I.**
Cerchiamo un tale intorno: scegliamo **δ** in modo che sia minore sia della distanza di **1.5** da **1,** che è 0.5, che della distanza di **1.5** da **4**, che vale 2.5; *scegliamo ad esempio* **δ = 0.2.**
L'intorno di 1.5 dato da **]1.5 -δ, 1.5 +δ[=]1.5 - 0.2, 1.5 +0.2[= =]1.3, 1.7 [** **è incluso in I** perché i suoi estremi sono compresi tra gli estremi dell'intervallo: **allora 1.5 è interno a I**

In realtà ogni punto dell'intervallo **I = [1, 3]** <u>*diverso dagli estremi*</u> **1** e **3** *è punto interno ad* **I**



Infatti se $x_0 \in$ **]1, 4[**, basta scegliere δ positivo e minore delle distanze positive $\delta_1 = |x_0 - 4|$ e $\delta_2 = |x_0 - 1|$, **e** si ha allora che l'intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 è incluso in **I,** e quindi x_0 *è punto interno ad* **I.**

1 non è interno ad **I** perché un intorno completo di **1,]1 - δ, 1 +δ [,** non può essere contenuto in **I = [1, 3]**: non appartengono infatti ad **I** gli elementi dell'intorno compresi tra **1 - δ e 1;** tuttavia **1** è punto di frontiera perché ad ogni suo intorno appartengono punti di **I** (a destra di **1**)e punti che non appartengono a I (a sinistra di !

3 non è interno ad **I** perché un intorno completo di **3,]3 - δ, 3 +δ [,** non può essere contenuto in **I = [1, 3]**: non appartengono infatti ad **I** gli elementi dell'intorno compresi tra **3** e **3 + δ;** tuttavia **3** è punto di frontiera.

Allora **I° = [1, 3]** (interno di I). I numeri **1** e **3** sono ovviamente *punti di frontiera per* **I.**

NOTA sugli intervalli di R:

a) Se I è uno qualsiasi degli intervalli $]a, b[, [a, b],]a, b], [a, b[$, allora *l'interno* **I°** *è* l'intervallo aperto avente gli stessi estremi: **I°**$=]a, b[$; *gli estremi* a *e* b *sono punti di frontiera*.

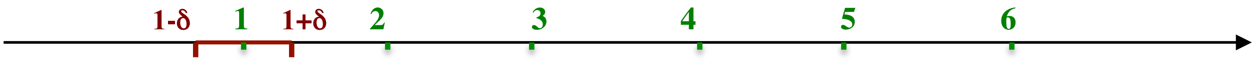
b) Se I è uno qualsiasi degli intervalli $]a, +\infty[, [a, +\infty[,]-\infty, a[,]-\infty, a]$, *l'interno* **I°** *è* l'intervallo aperto con gli stessi estremi, quindi:

$$]a, +\infty[^\circ = [a, +\infty[^\circ =]a, +\infty[\qquad \text{e} \qquad]-\infty, a[^\circ =]-\infty, a]^\circ =]-\infty, a[.$$

L'estremo reale a *è punto di frontiera*.

c) R è considerato come un particolare intervallo di stesso, indicato $]-\infty, +\infty[$; ogni suo punto è interno e allora $R^\circ = R =]-\infty, +\infty[$.

Esempio 2. *L'insieme* **N** *dei numeri naturali è una parte di R che non ha elementi interni:* **N°**$=\varnothing$



Un intorno completo $]1-\delta, 1+\delta[$ di **1** contiene il numero naturale **1** e gli infiniti razionali e irrazionali compresi tra $1-\delta$ e $1+\delta$, quindi non può essere contenuto in **N**, perciò **1 non è interno a** N.

Poiché a un intorno $]1-\delta, 1+\delta[$ di **1** appartiene almeno l'elemento **1** di **N** e appartengono elementi che non sono in **N,** possiamo affermare che **1** *è punto di frontiera per* **N.**

In modo analogo si dimostra che ogni altro numero naturale n *non è interno a* **N**, *ma è di frontiera per* **N.**

Esempio 3. *L'insieme* **Q** *dei numeri razionali è una parte di R che non ha elementi interni:* **Q**°$=\varnothing$

Infatti, poiché **R-Q** è denso in **R** (tra due reali cadono infiniti irrazionali), un intorno $I(x_0;\delta)=]x_0-\delta, x_0+\delta[$ di un numero razionale x_0 contiene infiniti irrazionali e quindi esso non può essere incluso in **Q**.

2. Punto di accumulazione per una parte A di R.

Definizione di punto di accumulazione reale . *Siano* **A** *un sottoinsieme di* **R** e x_0 *numero reale. Il punto* x_0 è un **punto di accumulazione per A** *se e solo se ad* *ogni* *intorno completo di* x_0 *appartiene almeno un punto di* A *diverso* da x_0.

$$x_0 \text{ è un } \textbf{punto di accumulazione per A} \Leftrightarrow \forall\, I(x_0;\delta)\ \exists x \in A: x \in I(x_0;\delta) - \{x_0\}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \delta>0\ \exists x \in A: x \in I(x_0;\delta) - \{x_0\}$$

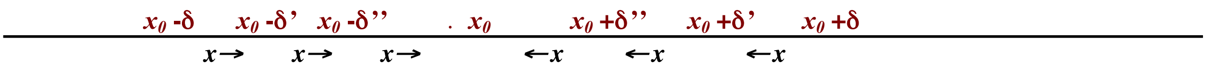
Utilizzando la definizione in termini di distanza di un intorno completo di x_0

$$I(x_0;\delta) =]x_0-\delta, x_0+\delta[= \{x \in R: |x - x_0| < \delta\},$$

e l'equivalenza $x \neq x_0 \Leftrightarrow 0 < |x - x_0|$, possiamo dare al seguente equivalente definizione di punto di accumulazione:

$$x_0 \in R \text{ è } \textbf{punto di accumulazione per A} \Leftrightarrow \forall \delta>0\ \exists\, x \in A: 0 < |x - x_0| < \delta$$

Perciò, se x_0 è punto di accumulazione per **A,** prendendo raggi δ sempre più piccoli e cioè avvicinandoci sempre più a x_0, troveremo sempre numeri di A distinti da x_0: potremmo dire *che i punti di A si accumulano intorno a* x_0 o anche che *si può far variare* $x \in$**A** *in modo che tenda a* x_0 .

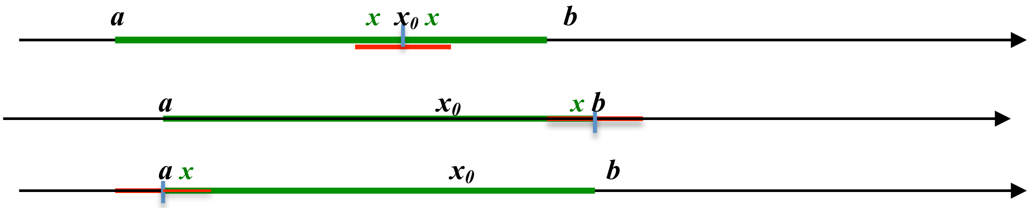


L'insieme dei punti di accumulazione reali per A è detto ***derivato di A*** *ed è indicato con* ***Dr(A)***

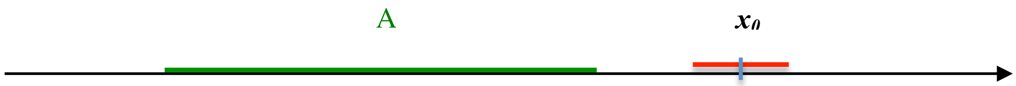
Punti di accumulazione reali di un intervallo limitato.

Sia* A** uno degli intervalli limitati **]*a, b*[, [*a, b*],]*a, b*], [*a, b* [.** Allora ***ogni punto interno ad A ed ognuno dei due estremi è punto di accumulazione.

L'affermazione è illustrata dalle seguenti figure in cui l'intorno di x_0 , punto interno, o di ***a*** o di ***b*** è colorato in rosso e i punti di A sono colorati in verde



Ogni altro punto x_0 di R, cioè ***ogni*** $x_0 \notin [a, b]$, ***non è punto di accumulazione per* A**



x_0 non è punto di accumulazione per A

Allora l'insieme dei punti di accumulazione A, intervallo di estremi a e b, è l'intervallo chiuso **[*a, b*]:**

$$Dr\,(A) = [a, b]$$

Esercizio. *Sia* **A** *uno degli intervalli non limitati* **]*a, +∝*[, [*a, +∝*[:** *determinare il derivato* ***Dr* (A)**

Sia **A** *uno degli intervalli non limitati* **] -∝, *a*[,]- ∝, *a*]:** *determinare il derivato* ***Dr* (A).**

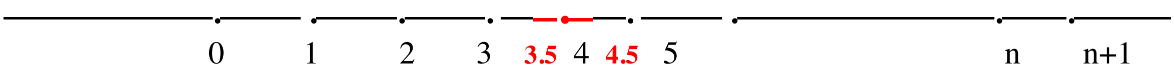
Esempio 4. Sia **A= Q**

Per la proprietà di densità di Q in R (tra due numeri reali cadono infiniti razionali) si ha che ad ogni intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di un numero reale x_0 appartengono numeri di **Q** distinti da x_0: allora x_0 ***è punto di accumulazione per* Q .** Valendo quanto osservato per ogni numero reale x_0 il derivato di **Q** è **R:** ***Dr* (Q) =R.**

Esempio 5. Sia **A= N**

Consideriamo il numero naturale $n = 4$. Possiamo costruire intorni **I (4; δ)** di **4** che contengono altri numeri naturali, ma anche intorni **I (4; δ)** che non contengono numeri naturali distinti da 4, ad esempio:

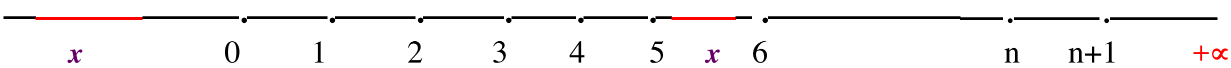
I (4; 0.5) =]4-0.5, 4+0.5[=]3.5, 4.5[***non contiene alcun numero naturale distinto da* 4.**



Allora **4 non è punto di accumulazione per N**

In modo analogo si dimostra che **ogni altro numero naturale non è di accumulazione per N**

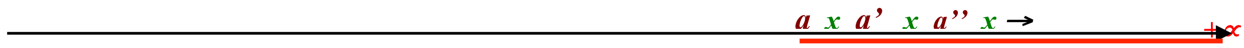
Se scegliamo ***x reale*** e $x \notin$ **N**, anche ***x*** **non è di accumulazione per N,** come suggerisce il sottostante grafico in cui ***x*** è scelto < 1 o compreso tra 5 e 6, e in rosso è segnato un intorno di ***x*** al quale non appartengono numeri di N.



Quando +∝ -∝ sono detti punti di accumulazione

Definizione (+∝ *come punto di accumulazione*). *Sia* **A** *un sottoinsieme di R. Allora* +∝ *è* **punto di accumulazione** *per* **A** *se e solo se ad ogni intorno* **]*a*, +∝[** ***di* +∝ *appartiene almeno un punto di*** **A** (cioè è non vuota l'intersezione **A**∩ **]*a*, +∝[)**

$$+\propto \text{ é } \textbf{\textit{punto di accumulazione per}} \textbf{ A} \Leftrightarrow \forall\,]a, +\propto[\ \exists x \in A \cap\,]a, +\propto[$$



In altre parole:

$$+\propto \text{ é } \textbf{\textit{punto di accumulazione per}} \textbf{ A} \Leftrightarrow \forall a \in R\ \ \exists x \in A: x > a \Leftrightarrow +\propto = \sup A$$

Se +∝ *è di accumulazione per **A**,* per ogni scelta di ***a*** troviamo numeri dell'insieme A più grandi di ***a***: per illustrare tale situazione potremmo dire che *si può far variare* ***x*** ∈**A** *in modo che diventi sempre più grande e quindi " tenda a* +∝ " .

Definizione (-∝ *come punto di accumulazione*). *Siano* **A** *un sottoinsieme di R.* -∝ *è* **punto di accumulazione** ***per A*** *se e solo se ad ogni intorno* **] -∝, *a*[** ***di* -∝ *appartiene almeno un punto di A***

$$-\propto \text{ é } \textbf{\textit{punto di accumulazione per}} \textbf{ A} \Leftrightarrow \forall\,]-\propto, a[\ \exists x \in A \cap\,]-\propto, a[$$

In altre parole:

$$-\propto \text{ é } \textbf{\textit{punto di accumulazione per}} \textbf{ A} \Leftrightarrow \forall a \in R\ \ \exists x \in A: x < a \Leftrightarrow -\propto = \inf A$$

Per rappresentare la situazione potremmo dire che *si può far variare* ***x*** ∈**A** *in modo che diventi sempre più piccolo e quindi " tenda a* -∝ " .

Esempio 6. Sia **A= Q**

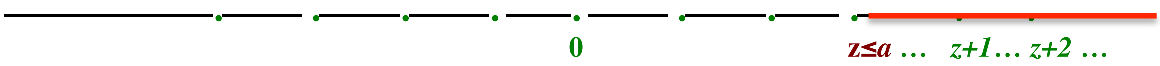
Per la proprietà di densità di Q in R (tra due numeri reali cadono infiniti razionali) si ha che :

- a un intorno**]*a*, +∝[** di +∝ appartengono infiniti numeri razionali; valendo ciò per ogni scelta dell'intorno, +∝ **è punto di accumulazione per Q**
- a un intorno **]-∝, *a*[** di -∝ appartengono infiniti numeri razionali; valendo ciò per ogni scelta dell'intorno, -∝ **è punto di accumulazione per Q**

Poiché Dr(**Q**) = **R** (vedi Esempio **5) l'insieme di tutti i punti di accumulazione di Q è** $\hat{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

Esercizio. Determinare l'insieme dei punti di accumulazione di **R-Q**

Esempio 7. Sia **A= Z**

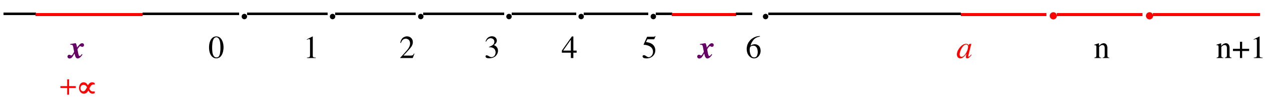


Consideriamo l'intorno **]*a*, +∝[** di +∝. Posto **z =[*a*],** parte intera di ***a***[(*)], è ***a*** < ***z+1*** e quindi *l'intero z+1 e gli interi più grandi appartengono all'intorno considerato*. Quanto detto vale per ogni scelta dell'intorno **]*a*, +∝[** di +∝ , quindi

+∝ ***è punto di accumulazione per Z***

In modo analogo si dimostra che -∝ ***è punto di accumulazione per Z***

Esempio 8. Sia **A= N**



Ad ogni intorno **]*a*, +∝[** di +∝ appartengono infiniti numeri naturali, quindi +∝ **è punto di accumulazione per N.** -∝ ovviamente **non è di accumulazione per N-**

Poiché N non ha punti di accumulazione reali +∝ **è l'unico punto di accumulazione per N .**

[(*)] ricordiamo che:

parte intera di un numero *x* è **il più grande intero minore o uguale *a x***: esso viene indicato con **[*x*].** Ovviamente: [*x*]= *x* *se e solo se x è intero.*

***Se x ≥ 0,* [*x*] *è il numero intero z indicato dalle cifre che precedono la virgola nella rappresentazione decimale di x; ad esempio la parte intera di 2.71 è 2*:** in simboli **[*2.71*]=2**

____*2*____________ *2.71*______*3*_________________*4*_

***Se x < 0,* [*x*] *è il numero intero negativo z-1, dove z è l'intero indicato dal segno e dalle cifre che precedono la virgola; ad esempio la parte intera di -2.71 è -3*:** in simboli **[-*2.71*]=-3**

___*-3*___*-2.71*____________*-2*________________*-1*_