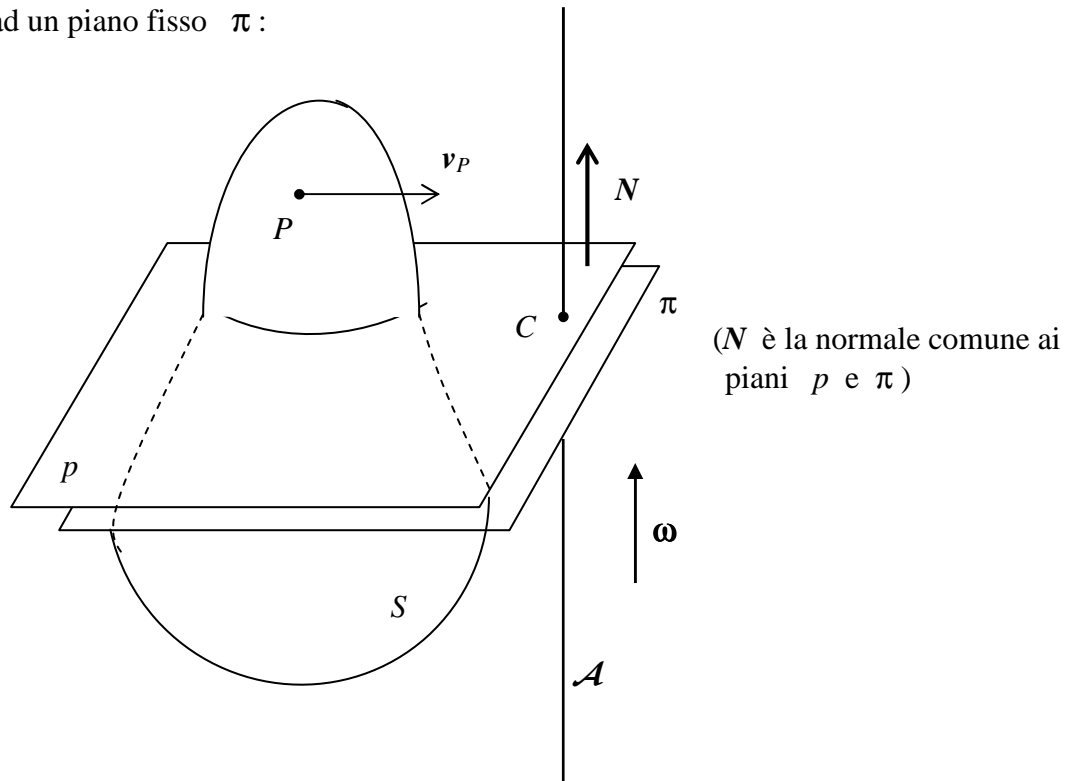


MOTI RIGIDI PIANI

Un moto di un sistema rigido S si dice “piano” quando le velocità dei punti di S si mantengono sempre parallele ad un piano fisso π :



Una definizione equivalente, e utile, è: quando esiste un piano p solidale a S che si muove rimanendo sovrapposto (o sottoposto?) al piano fisso π .

Studiamo l'atto di moto nei moti rigidi piani. Dalla definizione risulta ovviamente

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \forall P \in S;$$

d'altra parte, dall'atto di moto rigido generale $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$, moltiplicando scalarmente 1° e 2° membro per \mathbf{N} , si ottiene:

$$(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \forall P, Q \in S.$$

Ciò comporta che (in un istante t qualsiasi) o è $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ o è $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, e allora necessariamente $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{N}$. In ogni caso, è $I_{\text{cin}} = 0$.

1) se $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$, l'atto di moto è traslatorio in quel t : $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q \quad \forall P, Q$

$$2) \text{ se } \boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_{\text{cin}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P = 0 \\ \exists \text{ asse di Mozzi } \mathcal{A} \parallel \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{N} : \\ \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{A}) \quad \forall P \in S \quad (\mathbf{A} \in \mathcal{A}); \end{cases}$$

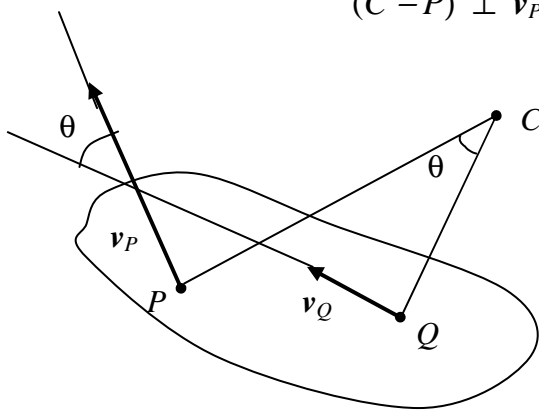
l'atto di moto è quindi rotatorio in quel t .

Riassumendo, nel moto rigido piano l'atto di moto è o traslatorio o rotatorio. In quest'ultimo caso, si definisce il “centro istantaneo di rotazione” C come l'intersezione dell'asse di Mozzi coi piani (sovrapposti) π e p :

$$C = C(t) \equiv \mathcal{A}(t) \cap \pi/p .$$

Dall'atto di moto rotatorio per $P, Q \in p$ (punti di S giacenti su piano p), $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times (P - C)$ e $\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times (Q - C)$, si deduce che

$$(C - P) \perp \mathbf{v}_P, \quad (C - Q) \perp \mathbf{v}_Q$$



donde il Teorema di Chasles: “il centro istantaneo C appartiene alle perpendicolari alle velocità dei punti di S su p , tali perpendicolari passanti per i punti stessi”.

$P, Q \in S \cap p$ ($\boldsymbol{\omega}$ perpendicolare al foglio)
 p scorre sul foglio, che è π .

Immaginiamo ora di far allontanare C all'infinito: l'angolo θ tende a zero, cioè i vettori $C - P$ e $C - Q$ tendono a diventare paralleli (e concordi), e con essi anche \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q .

$$\text{Inoltre: } (1 \leq) \frac{|\mathbf{v}_P|}{|\mathbf{v}_Q|} = \frac{|\boldsymbol{\omega}|}{|\boldsymbol{\omega}|} \frac{|P - C|}{|Q - C|} \leq \frac{|P - Q| + |Q - C|}{|Q - C|} = 1 + \frac{|P - Q|}{|Q - C|},$$

e quindi al limite per $C \rightarrow \infty$:

$$\frac{|\mathbf{v}_P|}{|\mathbf{v}_Q|} = 1, \quad \text{ossia } |\mathbf{v}_P| = |\mathbf{v}_Q| .$$

Allora, al limite per $C \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q \quad \forall P, Q \in S ,$$

che è proprio l'atto di moto traslatorio!

Ciò giustifica l'interpretazione dell'atto di moto traslatorio come il caso limite dell'atto di moto rotatorio quando il centro istantaneo va all'infinito.

In conclusione, possiamo dire che nel moto rigido piano l'atto di moto può sempre considerarsi rotatorio, con centro istantaneo al finito (quando l'atto di moto è “genuinamente” rotatorio) o eventualmente all'infinito (quando l'atto di moto è in realtà traslatorio).

N.B. Il teorema di Chasles continua a valere negli istanti in cui l'atto di moto è traslatorio: in tal caso,

infatti, le velocità dei punti sono tutte parallele assieme alle loro perpendicolari, le quali allora – come suol dirsi – si incontrano all’infinito.

BASE e RULLETTA (nel moto rigido piano)

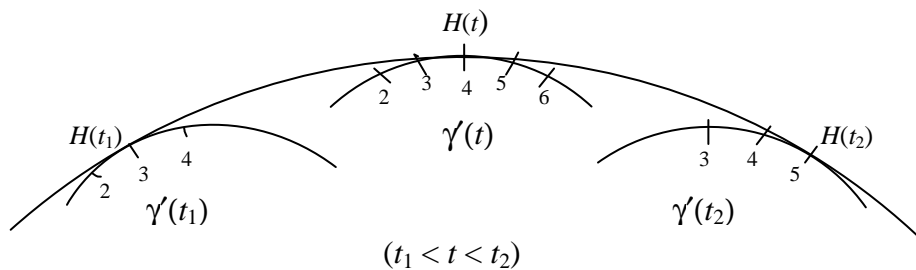
$C = C(t)$: C come centro istantaneo occupa nel tempo posizioni diverse, sia rispetto al piano fisso π sia rispetto al piano solidale (mobile) p (occorre convincersi che C è visto muoversi sia da π sia da p !).

Ebbene, il luogo delle posizioni occupate da C sul piano fisso dicesi “base” del moto piano (ed è una curva tracciata su π), mentre il luogo delle posizioni occupate da C sul piano mobile dicesi “rulletta” del moto piano (ed è una curva su p).

Base e rulletta sono le cosiddette “traiettorie polari” del moto rigido piano. Vogliamo ora dimostrare che, durante tale moto, la rulletta rotola senza strisciare sulla base.

Vediamo prima cosa si intende per “rotolamento senza strisciamento” (ossia “puro”) di una curva (del piano) mobile su una curva (del piano) fissa/o. Facciamo cioè un po’ di teoria dei profili coniugati (“profilo” è sinonimo di curva).

Sia γ una curva fissa e $\gamma'(t)$ una curva mobile: se γ e $\gamma'(t)$ hanno ad ogni istante in comune un punto e la tangente nel punto (geometricamente: γ “involuppa” $\gamma'(t)$), si dice che γ' rotola su γ .



Denotiamo con H il punto di contatto delle due curve istante per istante: esso è visto muoversi sia rispetto a γ che rispetto a γ' , percorrendo la curva γ rispetto ad un osservatore fisso, e la curva γ' rispetto ad un osservatore mobile con γ' .

Con quale velocità si muove, ossia cambia posizione H rispetto a γ e γ' ? Per il principio dei moti relativi:

$$v_a(H) = v_r(H) + v_\tau(H),$$

ove $v_a(H)$ è la velocità di H rispetto a γ , $v_r(H)$ la velocità di H rispetto a γ' , e $v_\tau(H)$ è la velocità di trascinamento di H , ossia la velocità rispetto a γ di quel punto (o celletta) della curva mobile che nell’istante considerato si trova sovrapposto ad H (ad esempio: nell’istante t_1 , $v_\tau(H)$ è la velocità rispetto a γ del punto “3” di γ' ; nell’istante t , $v_\tau(H)$ è la velocità rispetto a γ del punto

“4” di γ' ; nell'istante t_2 , $\mathbf{v}_\tau(H)$ è la velocità rispetto a γ del punto “5” di γ'). $\mathbf{v}_\tau(H)$, se c'è diversa da zero, dicesi “velocità di strisciamento” di γ' su γ ; essa in ogni caso ha la direzione della tangente comune a γ e γ' in H , perché tale direzione hanno $\mathbf{v}_a(H)$ e $\mathbf{v}_r(H)$ e allora anche la loro differenza $\mathbf{v}_a(H) - \mathbf{v}_r(H) = \mathbf{v}_\tau(H)$.

Se $\mathbf{v}_\tau(H) = \mathbf{0}$ si dice che γ' rotola senza strisciare su γ .

Applichiamo tali concetti alle traiettorie polari (base e rulletta nel moto rigido piano):

Base e rulletta hanno in ogni istante il centro istantaneo C in comune (per come sono definite: luoghi delle posizioni assunte da C su γ e γ'); inoltre, dal principio dei moti relativi, si ha che

$$\underbrace{\mathbf{v}_a(C)}_{\text{velocità con cui } C \text{ si muove su } \gamma} = \underbrace{\mathbf{v}_r(C)}_{\text{...su } \gamma'} + \underbrace{\mathbf{v}_\tau(C)}_{\text{velocità (risp. } \gamma \text{) del punto di } \gamma' \text{ che si trova sovrapposto a } C}$$

Ma, per l'atto di moto rotatorio della rulletta $\gamma' (\in p)$ sulla base $\gamma (\in \pi)$, è

$$\mathbf{v}_\tau(C) = \mathbf{v}_a(C' = C) = \boldsymbol{\omega} \times (C' - C) = \mathbf{0} ,$$

e quindi

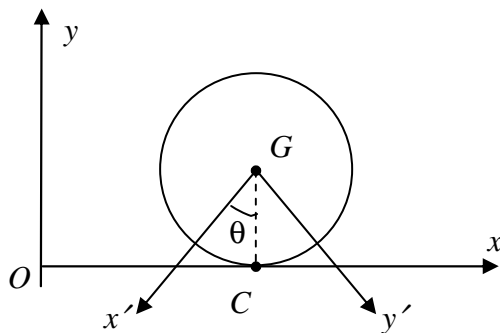
$$\dot{s}_a(C) \mathbf{t}_{\text{base in } C} = \dot{s}_r(C) \mathbf{t}_{\text{rulletta in } C} .$$

Base e rulletta hanno allora anche la tangente in comune in C , e la velocità di strisciamento è nulla: la rulletta rotola senza strisciare sulla base!

N.B. Il movimento della rulletta rispetto alla base è un fatto relativo: un osservatore solidale al piano mobile direbbe legittimamente che è la base a rotolare senza strisciare sulla rulletta.

Esempi

- 1) Rotolamento puro di disco su guida rettilinea (l'atto di moto è rotatorio attorno a C punto di contatto).



Sia $x_G = x_G(t)$ la legge oraria con cui G si muove sulla retta $y = R$ (raggio del disco); anche $\theta = \theta(t)$.

Nel piano fisso Oxy :

$$C \equiv \begin{cases} x_C = x_G = x_G(t) \\ y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{la base è l'asse } x$$

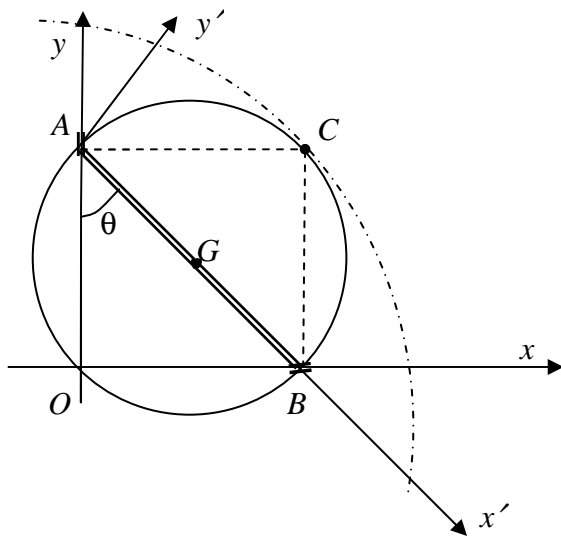
Nel piano mobile $G x' y'$:

$$C \equiv \begin{cases} x'_C = R \cos \theta(t) \\ y'_C = R \sin \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \text{la rulletta è la circonferenza di centro } G \text{ e raggio } R \text{ (la linea di contorno del disco).}$$

Effettivamente, la rulletta rotola senza strisciare sulla base!

N.B. La velocità del punto del disco che istantaneamente si trova a contatto con l'asse x (quindi sovrapposto a C in quell'istante) è nulla! (base = retta, rulletta = circonferenza: “**moto cicloidale**”)

2) Asta rigida AB lunga l con gli estremi mobili sugli assi x e y (l'atto di moto è rotatorio attorno a C , la cui posizione è data dal teorema Chasles).



Sia $\theta = \theta(t)$ la legge oraria del movimento.

$$A \equiv \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = l \cos \theta \end{cases}$$

$$B \equiv \begin{cases} x_B = l \sin \theta \\ y_B = 0 \end{cases}$$

Nel piano fisso Oxy :

$$C \equiv \begin{cases} x_C = x_B = l \sin \theta(t) \\ y_C = y_A = l \cos \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \text{(quadrando e sommando)} \quad x_C^2 + y_C^2 = l^2 \Rightarrow \text{la base è la}$$

circonferenza di centro O e raggio l .

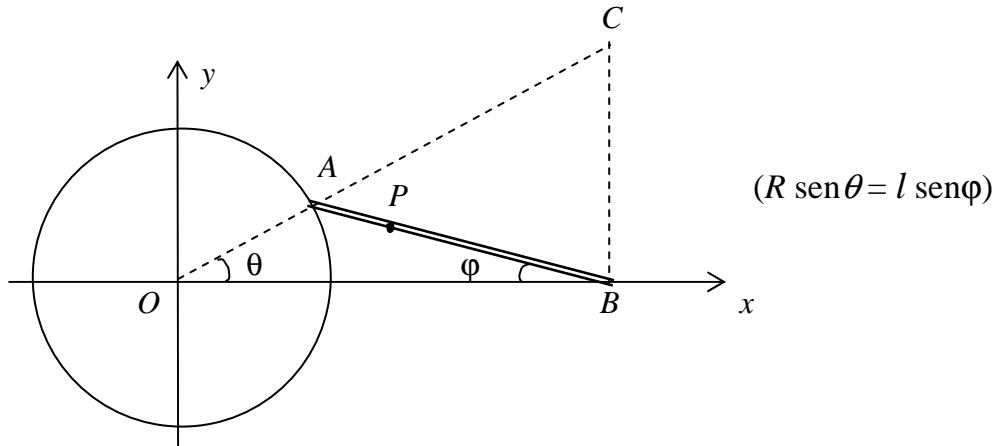
Nel piano mobile $A x' y'$:

$$C \equiv \begin{cases} x'_C = l \sin^2 \theta = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos 2\theta \\ y'_C = l \sin \theta \cos \theta = \frac{l}{2} \sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \text{(quadrando e sommando)} \quad \left(x'_C - \frac{l}{2}\right)^2 + y'^2_C = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

la rulletta è la circonferenza di centro G e raggio $l/2$ (tangente internamente alla base nel punto comune C). Durante il movimento dell'asta con gli estremi A su y e B su x , la rulletta rotola senza strisciare all'interno della base (la base è tratteggiata, la rulletta è a tratto pieno).

(qui base e rulletta = circonferenze, e rulletta rotola all'interno di base: “moto **ipo-cicloidale**”; se invece la rulletta rotolasse all'esterno di base, il moto rigido piano si direbbe “**epi-cicloidale**”)

3) Asta rigida di lunghezza l con estremo A mobile su circonferenza di centro O e raggio $R (< l)$ ed estremo B mobile su semiasse $x > R$ (modello del motore alternativo: B è il pistone, l'asta è la biella, la circonferenza è il contorno del volano).



Sia $\theta = \theta(t)$ la legge oraria del moto circolare di A attorno ad O ($|\dot{\theta}|$ è la velocità angolare del volano), e sia P un punto qualsiasi dell'asta AB .

Se $s \equiv \overline{AP}$, vale:

$$P \equiv \begin{cases} x_P(s) = R \cos \theta + s \cos \varphi = R \cos \theta + s \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \theta} \\ y_P(s) = (l-s) \sin \varphi = \frac{l-s}{l} R \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_P \equiv \begin{cases} \dot{x}_P(s) = -R \dot{\theta} \sin \theta - s \frac{R^2/l^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - R^2/l^2 \sin^2 \theta}} \dot{\theta} \\ \dot{y}_P(s) = \frac{l-s}{l} R \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P (s = l)$. E' sempre rotatorio l'atto di moto (con C al finito come nella figura)? Per rispondere, vediamo se esistono istanti in cui l'atto di moto è traslatorio: in questi istanti, \mathbf{v}_P non deve dipendere da P , cioè da s , ed essi quindi sono quelli in cui

$$\cos \theta(t) = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$$

Allora, l'atto di moto è traslatorio (con C all'infinito) quando A tocca l'asse y , e in quell'istante si ha $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A = -R \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_1$. Le equazioni parametriche della base si ottengono ponendo:

$$x_C(t) = x_B(t) = R \cos \theta(t) + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2 \theta(t)}$$

$$y_C(t) = x_C(t) \tan \theta(t) = R \sin \theta(t) + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2 \theta(t)} \tan \theta(t)$$

da cui si evince che quando $\theta \rightarrow \pi/2, 3\pi/2$, la base ha un asintoto verticale nell'ascissa $\sqrt{\ell^2 - R^2}$, cui il centro si avvicina quando l'atto di moto sta per diventare traslatorio.

