Università degli Studi di Napoli
Federico II

Corso di Identificazione dei Modelli e Controllo Ottimo

Prof. Franco Garofalo

Introduzione Alla Teoria Dei Giochi

A cura di
Elena Napoletano
elena.napoletano@unina.it

Teoria dei Giochi

Disciplina che studia problemi di scelta in presenza di decisori multipli.

- **Ottimizzazione** in presenza di interazione strategica tra più soggetti.
- **Cifra di merito**: funzione di utilità (assiomi di razionalità di Von Neumann e Morgenstern).

Cenni storici

- Cournot: «Duopolio di Cournot» (1838);
- Von Neumann & Morgenstern: *«Theory of Games and Economic Behavior»,* (1944);
- John Nash, Premio Nobel per l'Economia (1994): *«Non-cooperative games»*, (1950).

Classificazione dei giochi

1. **Cooperativi**: i giocatori perseguono un obiettivo comune, e tendono ad accordarsi per migliorare il proprio profitto.

   Non cooperativi: i giocatori hanno obiettivi diversi, per cui non stipulano accordi vincolanti tra di loro.

2. **Ad informazione completa**: le funzioni di utilità dei giocatori sono conoscenza comune.

   Ad informazione incompleta: almeno un giocatore non conosce la funzione di utilità degli altri giocatori.

3. **Statici**: i giocatori scelgono le proprie mosse simultaneamente, senza conoscere in anticipo le mosse degli avversari.

   Dinamici: le mosse sono di tipo sequenziale, per cui la scelta di un giocatore ad un certo istante è condizionata da quelle dei giocatori agli istanti precedenti.

   > **Ad informazione perfetta**: ad ogni istante del gioco il giocatore a cui spetta la mossa conosce l'intera storia del gioco.

   > **Ad informazione imperfetta**: almeno un giocatore può non conoscere l'intera storia del gioco.

Classificazione dei giochi

1. **Cooperativi**: i giocatori perseguono un obiettivo comune, e tendono ad accordarsi per migliorare il proprio profitto.

   Non cooperativi: i giocatori hanno obiettivi diversi, per cui non stipulano accordi vincolanti tra di loro.

2. **Ad informazione completa**: le funzioni di utilità dei giocatori sono conoscenza comune.

   Ad informazione incompleta: almeno un giocatore non conosce la funzione di utilità degli altri giocatori.

3. **Statici**: i giocatori scelgono le proprie mosse simultaneamente, senza conoscere in anticipo le mosse degli avversari.

   Dinamici: le mosse sono di tipo sequenziale, per cui la scelta di un giocatore ad un certo istante è condizionata da quelle dei giocatori agli istanti precedenti.

   > **Ad informazione perfetta**: ad ogni istante del gioco il giocatore a cui spetta la mossa conosce l'intera storia del gioco.

   > **Ad informazione imperfetta**: almeno un giocatore può non conoscere l'intera storia del gioco.

Rappresentazione in forma normale

$$G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$$

1. $n =$ numero di **giocatori**. Il generico giocatore è indicato con $i = 1, \ldots, n$.

2. $S_i =$ spazio delle **strategie**. La strategia scelta dal giocatore i-esimo è indicata con $s_i \in S_i$.
   $(s_1, \ldots, s_n) =$ possibile combinazione di strategie (una per ogni giocatore).

3. $u_i(s_1, \ldots, s_n) =$ funzione di **payoff** (utilità) del giocatore i-esimo per quella specifica combinazione di strategie.

Esempio

$n = 2;$

$S_1 = \{Su,\ Gi\text{ù}\};$

$S_2 = \{Sinistra,\ Centro,\ Destra\}.$

Esempio

$n = 2;$
$S_1 = \{Su,\ Giù\};$
$S_2 = \{Sinistra,\ Centro,\ Destra\}.$

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1	1	0
	Giù	0	0	2

Es: $u_1(Giù, Sinistra) = 0$

Esempio

$n = 2;$
$S_1 = \{Su,\ Giù\};$
$S_2 = \{Sinistra,\ Centro,\ Destra\}.$

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1	1	0
	Giù	0	0	2

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	0	2	1
	Giù	3	1	0

Esempio

$n = 2;$
$S_1 = \{Su,\ Giù\};$
$S_2 = \{Sinistra,\ Centro,\ Destra\}.$

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Matrice dei payoff

Analisi di un gioco

- Analizzare un gioco significa determinare la **funzione di miglior risposta** di ogni giocatore a tutte le possibili strategie dell'altro.

- Se esiste una interazione comune tra le strategie di miglior risposta dei giocatori, il gioco ha un **equilibrio attrattivo** e dunque si può determinare in anticipo come si concluderà.

Esempio di analisi di un gioco

P 2

P 1		Sinistra	Centro	Destra
	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Esempio di analisi di un gioco

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	<u>1</u>,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Esempio di analisi di un gioco

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	<u>1</u>,0	<u>1</u>,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Esempio di analisi di un gioco

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	<u>1</u>,0	<u>1</u>,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	<u>2</u>,0

Esempio di analisi di un gioco

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	<u>1</u>,0	<u>1</u>,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	<u>2</u>,0

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Esempio di analisi di un gioco

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Esempio di analisi di un gioco

			P 2	
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	$\underline{1}$,0	$\underline{1}$,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	$\underline{2}$,0

			P 2	
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,$\underline{2}$	0,1
	Giù	0,$\underline{3}$	0,1	2,0

Esempio di analisi di un gioco

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	<u>1</u>,0	<u>1</u>,<u>2</u>	0,1
	Giù	0,<u>3</u>	0,1	<u>2</u>,0

Nell'intersezione delle funzioni di miglior risposta dei giocatori, nessuno dei due giocatori può migliorare la propria utilità spostandosi, ammesso che l'altro giocatore non cambi strategia.
Questo concetto è catturato dalla definizione di **«Equilibrio di Nash»**.

Equilibrio di Nash

Nel gioco in forma normale

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\},$$

la combinazione di strategie $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ è un **Equilibrio di Nash** se, per ogni giocatore i, s_i^* è la **miglior risposta** alle strategie specificate degli altri $n-1$ giocatori $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*), \ \forall s_i \in S_i.$$

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	0,-3	-2,-2

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	$\underline{0}$,-3	-2,-2

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	$\underline{0}$,-3	-$\underline{2}$,-2

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	$\underline{0}$,-3	-$\underline{2}$,-2

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	0,-3	-2,-2

Dilemma del prigioniero

P 2

		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	$\underline{0}$,-3	-$\underline{2}$,-2

P 2

		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, $\underline{0}$
	C	0,-3	-2,-2

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, 0
	C	$\underline{0}$,-3	-$\underline{2}$,-2

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, $\underline{0}$
	C	0,-3	-2,-$\underline{2}$

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, $\underline{0}$
	C	$\underline{0}$,-3	-$\underline{2}$,-$\underline{2}$

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, $\underline{0}$
	C	$\underline{0}$,-3	$-\underline{2},-\underline{2}$

$\boxed{\text{NE} = (C,C)}$

Efficienza di Pareto

- L'**ottimo di Pareto** è una situazione di allocazione efficiente delle risorse. In un ottimo paretiano, non è possibile migliorare l'utilità di un soggetto senza peggiorare quella degli altri soggetti.

- L'ottimo di Pareto è razionale dal punto di vista collettivo, ma non lo è dal punto di vista individuale: nei giochi non cooperativi, in cui i soggetti agiscono col fine di massimizzare la propria utilità, anche a discapito degli altri, non sempre si raggiungere un ottimo di Pareto.

Dilemma del prigioniero

		P 2	
		$\bar{C}$	C
P 1	$\bar{C}$	-1,-1	-3, $\underline{0}$
	C	$\underline{0}$,-3	-$\underline{2}$,-$\underline{2}$

In questo caso, l'equilibrio di Nash non è un ottimo di Pareto: se entrambi i giocatori scegliessero di non confessare, aumenterebbero entrambi la propria utilità.

Strategie dominate

Nel gioco in forma normale

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\},$$

siano s_i' e $s_i'' \in S_i$.

- La strategia s_i' è **strettamente dominata** da s_i'' se
$$u_i(s_1, \dots, s_i', \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_i'', \dots, s_n),$$
$$\forall (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in (S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n).$$
- La strategia s_i' è **debolmente dominata** da s_i'' se
  1. $u_i(\mathrm{s}_1, \dots \mathrm{s}_\mathrm{i}', \dots, \mathrm{s}_\mathrm{n}) \leq u_i(\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_\mathrm{i}'', \dots, \mathrm{s}_\mathrm{n})$. $\forall (\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1}, \dots, \mathrm{s}_\mathrm{n}) \in (\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{S}_{\mathrm{i}+1}, \dots, \mathrm{S}_\mathrm{n})$;
  2. esiste un profilo $(\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1}, \dots, \mathrm{s}_\mathrm{n})$ tale che $u_i(\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_\mathrm{i}', \dots, \mathrm{s}_\mathrm{n}) < u_i(s_1, \dots, s_i'', \dots, s_n)$

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

P 2

P 1		Sinistra	Centro	Destra
	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

		P 2 Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

P 1	P 2	Sinistra	Centro	Destra
	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

P 2

		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

		P 2		
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

P 2

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

			P 2	
		Sinistra	Centro	Destra
P 1	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

P 2

P 1		Sinistra	Centro	Destra
	Su	1,0	1,2	0,1
	Giù	0,3	0,1	2,0

Se l'eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate consente la sopravvivenza di un'unica combinazione di strategie, essa rappresenta l'unico **Equilibrio di Nash** del gioco.

Giochi a somma zero

Nella matrice dei payoff, una casella è un equilibrio di Nash se il payoff del primo giocatore è il massimo dei payoff sulla colonna e il payoff del secondo giocatore è il massimo sulla riga.

Possiamo facilmente immaginare una situazione nella quale non esiste una cella con queste caratteristiche.

Esempio: «pari o dispari»

		P 2	
		Pari	Dispari
P 1	Pari	-1, 1	1,-1
	Dispari	1,-1	-1, 1

NE = ?

Strategie miste

- Quando l'ipotesi di razionalità non è sufficiente a determinare univocamente la scelta di un giocatore, le strategie diventano **aleatorie**.
- Le scelte ottime di un giocatore dipendono dalla probabilità con cui l'altro giocatore sceglie le sue mosse.

Strategia pura → Strategia mista

- Una «strategia mista» del giocatore i è una **distribuzione di probabilità** sul set di strategie pure disponibili in S_i.
- In questo scenario, ogni giocatore **sceglie** la probabilità di giocare le sue strategie pure in modo da massimizzare la propria <u>utilità attesa</u>.

Strategie miste

Siano:

- $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$;
- $p_{ik} =$ probabilità che il giocatore i scelga la strategia pura s_{ik}, con $k = 1, \dots, K$.

Una **strategia mista** per il giocatore i è la distribuzione di probabilità

$$p_i = (p_{i1}, \dots, p_{iK})$$

$$0 \le p_{ik} \le 1, \text{ per } k = 1, \dots, K; \sum_{k=1}^{K} p_{ik} = 1.$$

Rappresentazione di un gioco in forma normale con strategie miste:

$$G = \{S_1, \dots, S_n; E[u_1], \dots, E[u_n]\}.$$

Strategie miste

Esempio: «Pari o Dispari»

- {Pari, Dispari}: strategie **pure**
- $\Pr\{Pari\} = p; \Pr\{Dispari\} = 1 - p$:
- $(p, 1 - p)$ = strategia **mista**.

Le strategie pure sono casi limite delle strategie miste.

p = 1 → Pari = strategia pura

p = 0 → Dispari = strategia pura

Strategie miste: equilibrio di Nash

Nel gioco in forma normale

$$G = \{S_1, \ldots, S_n; E[u_1], \ldots, E[u_n]\},$$

il profilo di strategie miste $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ è un **Equilibrio di Nash** se, per ogni giocatore i, p_i^* è la **miglior risposta** alle strategie miste degli altri $n-1$ giocatori $(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)$:

$$E[u_i(p_1^*, \ldots, p_i^*, \ldots, p_n^*)] \geq E[u_i(p_1^*, \ldots, p_i, \ldots, p_n^*)].$$

Strategie miste: esempio

		P 2 Pari	Dispari
P 1	Pari	-1, 1	1,-1
	Dispari	1,-1	-1, 1

	q	$1-q$
p	pq	$p(1-q)$
$1-p$	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Strategie miste: esempio

		P 2 Pari	Dispari
P 1	Pari	-1, 1	1,-1
	Dispari	1,-1	-1, 1

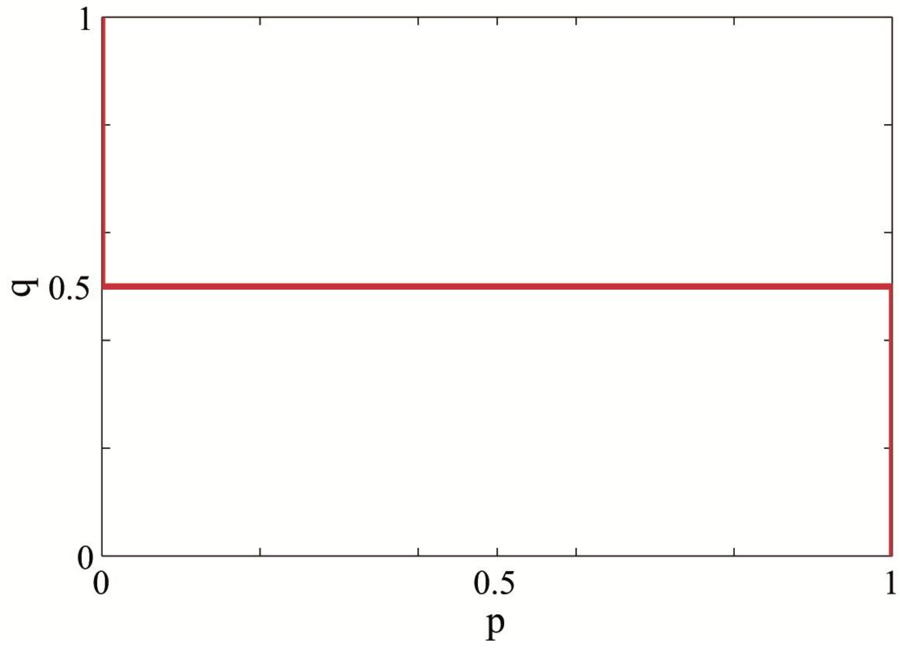
	q	$1-q$
p	pq	$p(1-q)$
$1-p$	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

$$E[u_1] = pq(-1) + p(1-q)(1) + (1-p)q(1) + \\ + (1-p)(1-q)(-1) = (2-4q)p + (2q-1).$$

$$E[u_2] = -E[u_1] = (4p-2)q + (1-2p).$$

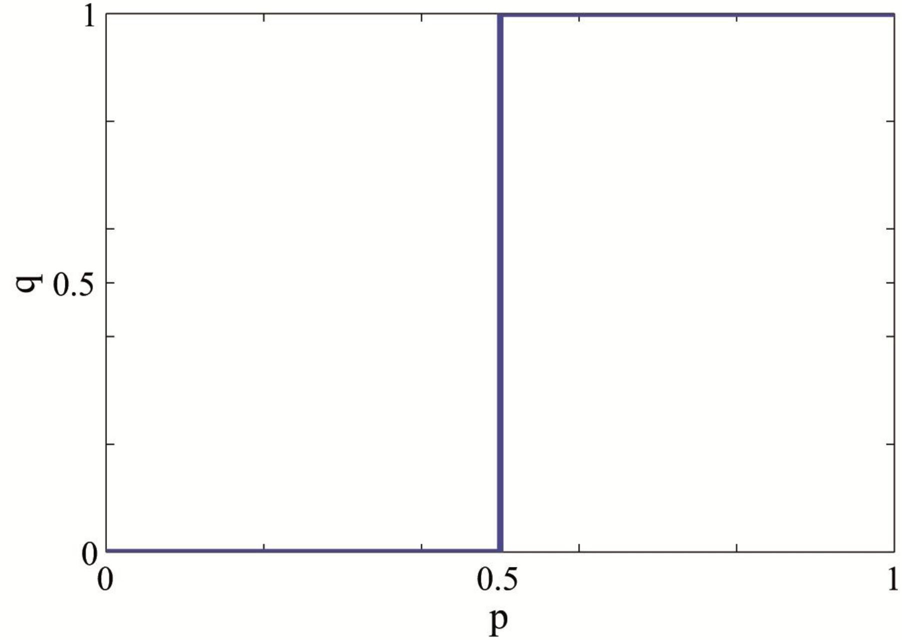
Funzione di miglior risposta

$$p^*(q) = arg\max_{\mathrm{p}}[(2-4q)p + (2q-1)] \Rightarrow \begin{cases} p^* = 1 & se\ q < 1\backslash 2 \\ p^* = 0 & se\ q > 1\backslash 2 \\ p^* \in [0,1] & se\ q = 1\backslash 2 \end{cases}$$



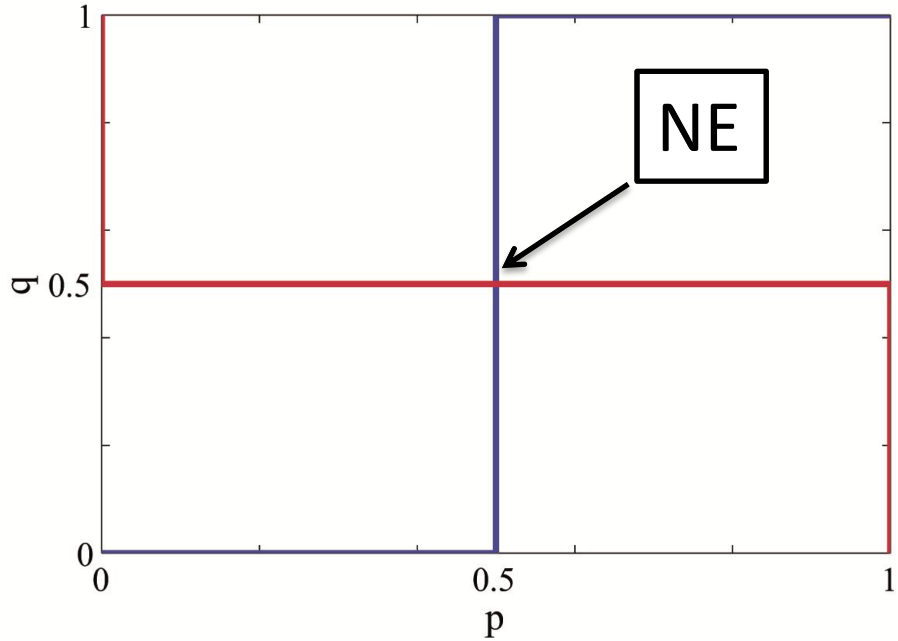
Funzione di miglior risposta

$$q^*(p) = arg\,\max_{q}[(4p-2)q + (1-2p)] \Rightarrow \begin{cases} q^* = 1 & se\ p > 1\backslash 2 \\ q^* = 0 & se\ p < 1\backslash 2 \\ q^* \in [0,1] & se\ p = 1\backslash 2 \end{cases}$$



Funzione di miglior risposta

$$\boxed{NE = (p = 1\backslash 2; \; q = 1\backslash 2)}$$



Teorema di Nash

«In ogni gioco finito (un gioco in cui sia il numero dei giocatori che gli spazi di strategie sono finiti) esiste almeno un Equilibrio di Nash, eventualmente in strategie miste.»

Classificazione dei giochi

1. **Cooperativi**: i giocatori perseguono un obiettivo comune, e tendono ad accordarsi per migliorare il proprio profitto.

   Non cooperativi: i giocatori hanno obiettivi diversi, per cui non stipulano accordi vincolanti tra di loro.

2. **Ad informazione completa**: le funzioni di utilità dei giocatori sono conoscenza comune.

   Ad informazione incompleta: almeno un giocatore non conosce la funzione di utilità degli altri giocatori.

3. **Statici**: i giocatori scelgono le proprie mosse simultaneamente, senza conoscere in anticipo le mosse degli avversari.

   Dinamici: le mosse sono di tipo sequenziale, per cui la scelta di un giocatore ad un certo istante è condizionata da quelle dei giocatori agli istanti precedenti.

   > **Ad informazione perfetta**: ad ogni istante del gioco il giocatore a cui spetta la mossa conosce l'intera storia del gioco.

   > **Ad informazione imperfetta**: almeno un giocatore può non conoscere l'intera storia del gioco.

Rappresentazione in forma estesa

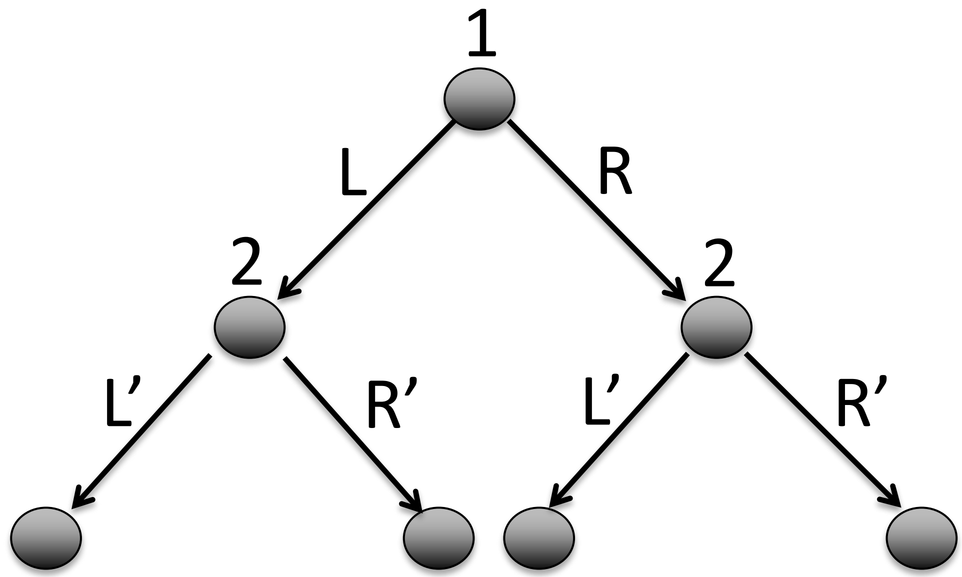
Bisogna specificare:

1. il numero di giocatori n;
2. a. quando i giocatori hanno diritto alla mossa;

   b. le azioni ammissibili di ogni giocatore $(a_i \in A_i)$ ad ogni step del gioco;

   c. la conoscenza di ogni giocatore al momento della mossa;
3. i payoff di ogni giocatore in corrispondenza di ogni possibile combinazione di mosse degli altri giocatori.

Rappresentazione in forma estesa: esempio



$$\begin{array}{l} \text{Payoff 1} \\ \text{Payoff 2} \end{array} \quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Induzione a ritroso

È un algoritmo di risoluzione dei giochi dinamici ad informazione completa. In un gioco a 2 stadi:

- si parte dalla mossa del giocatore 2, che si trova a risolvere il seguente problema:

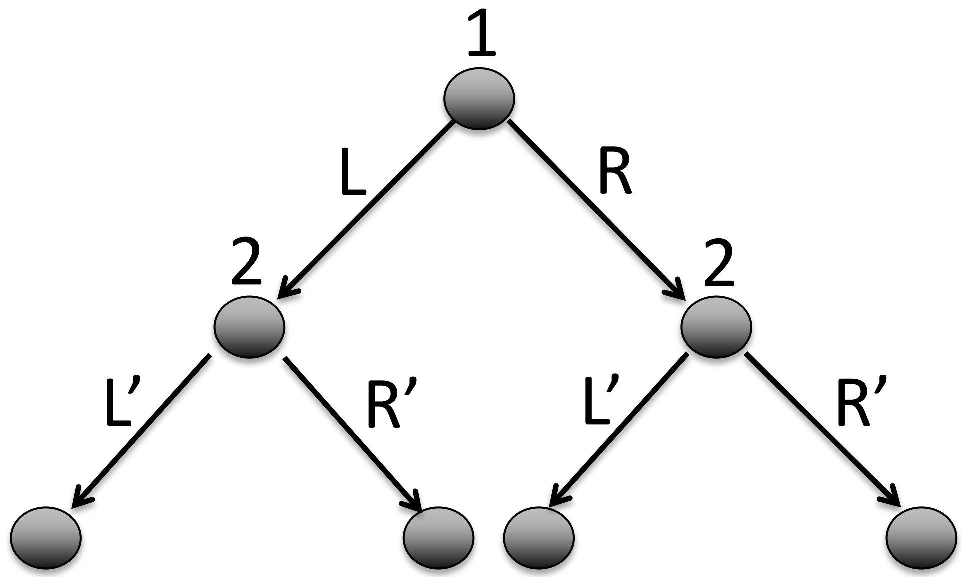
$$R_2(a_1) = arg \max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2);$$

- il giocatore 1 sa che 2 risponderà in maniera ottimale ad ogni sua mossa, quindi sceglie

$$a_1^* = arg \max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1));$$

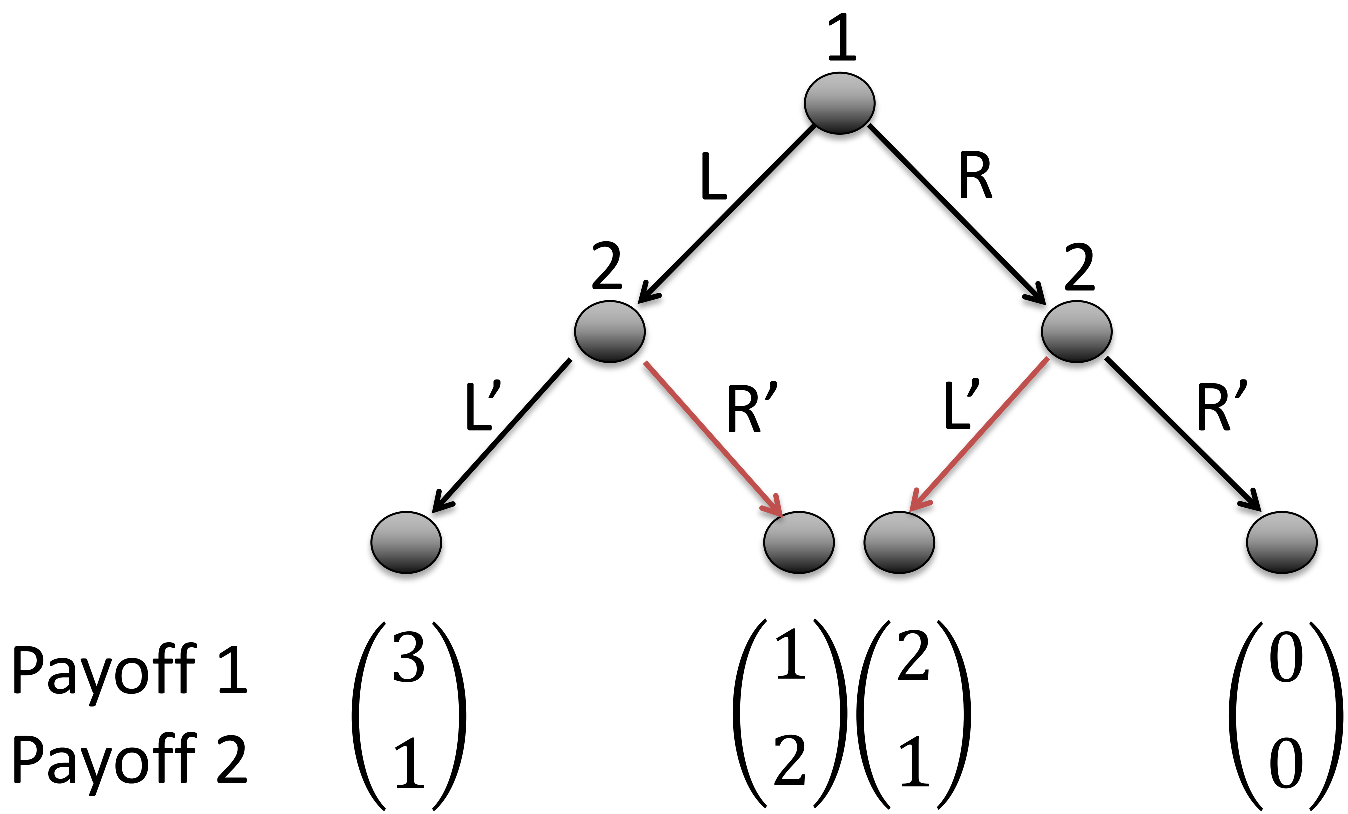
- la soluzione del gioco è $(a_1^*, R_2(a_1^*))$.

Induzione a ritroso: esempio

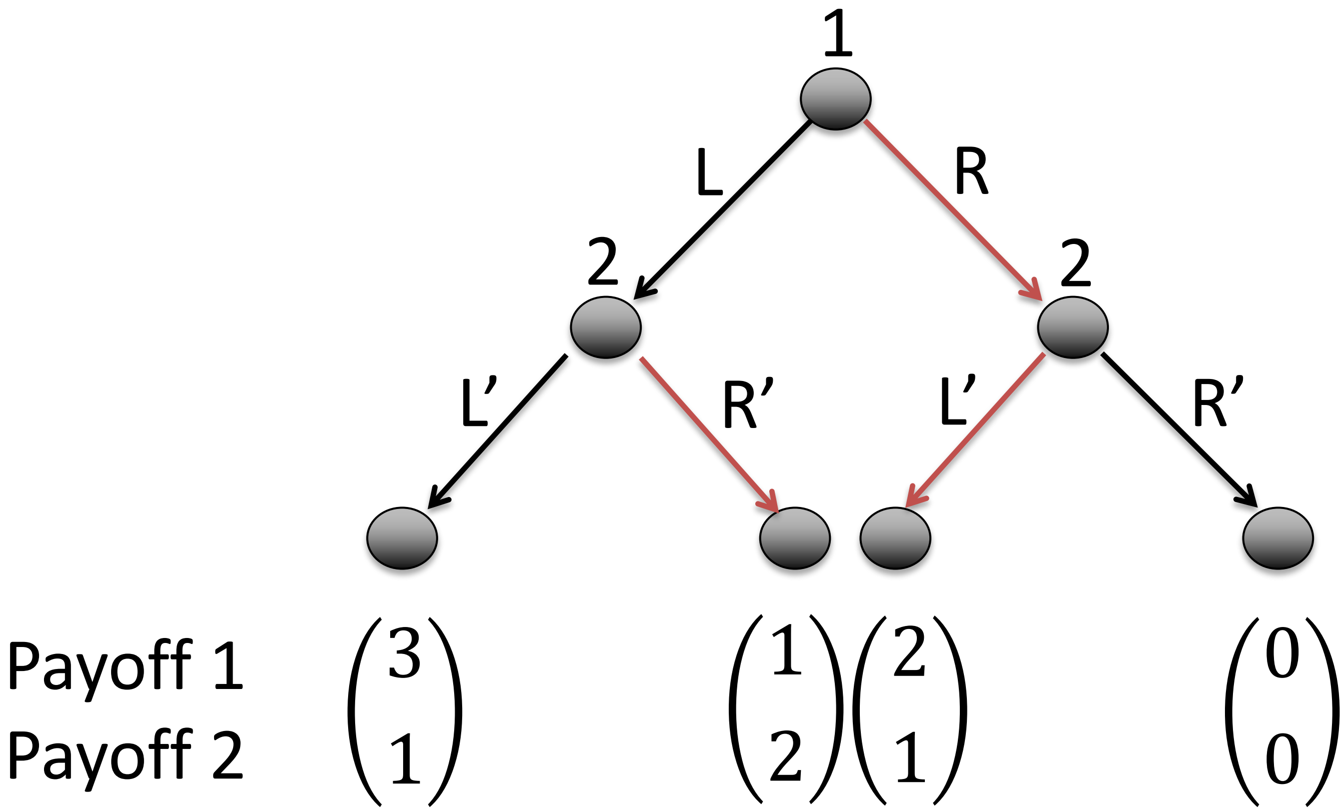


Payoff 1 $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
Payoff 2

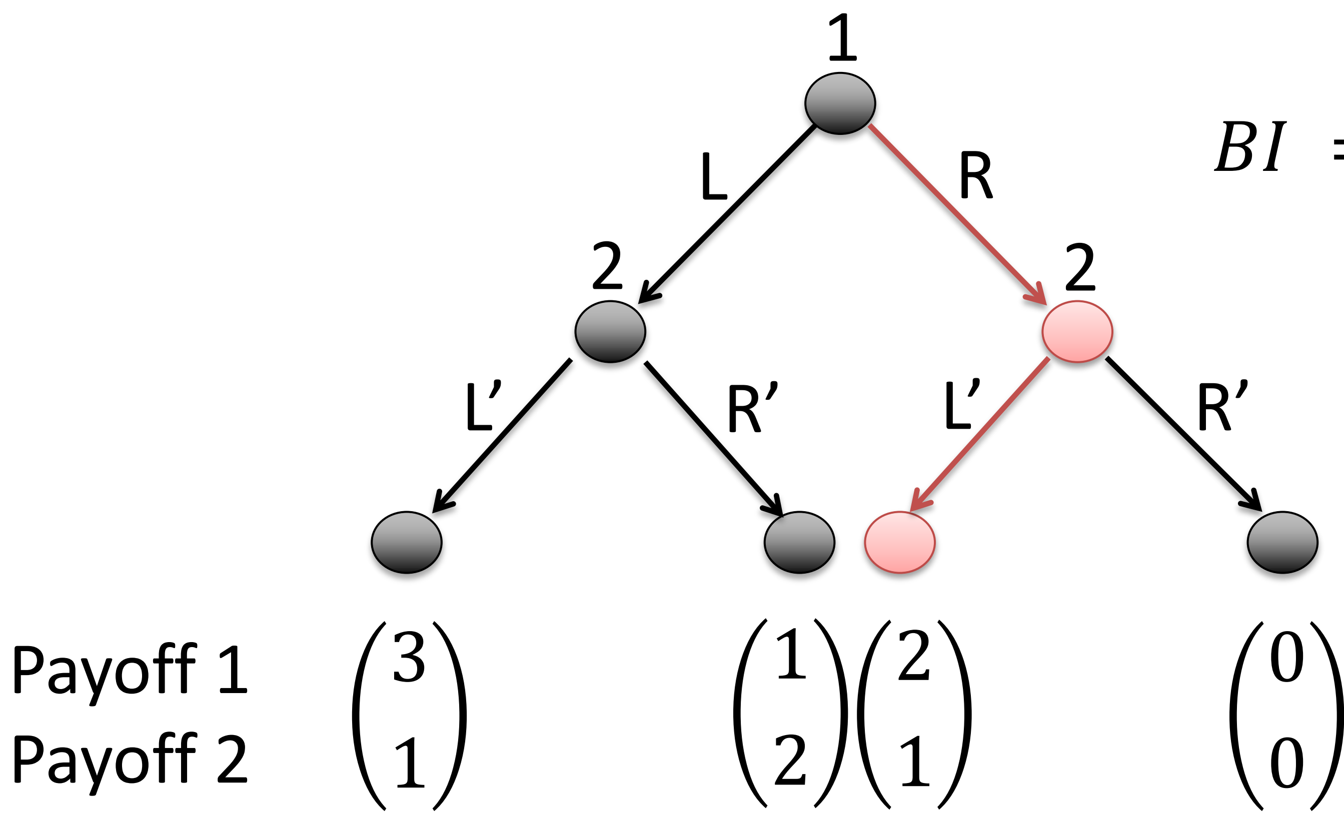
Induzione a ritroso: esempio



Induzione a ritroso: esempio



Induzione a ritroso: esempio



$$BI = (R, L')$$

Classificazione dei giochi

1. **Cooperativi**: i giocatori perseguono un obiettivo comune, e tendono ad accordarsi per migliorare il proprio profitto.

   Non cooperativi: i giocatori hanno obiettivi diversi, per cui non stipulano accordi vincolanti tra di loro.

2. **Ad informazione completa**: le funzioni di utilità dei giocatori sono conoscenza comune.

   Ad informazione incompleta: almeno un giocatore non conosce la funzione di utilità degli altri giocatori.

3. **Statici**: i giocatori scelgono le proprie mosse simultaneamente, senza conoscere in anticipo le mosse degli avversari.

   Dinamici: le mosse sono di tipo sequenziale, per cui la scelta di un giocatore ad un certo istante è condizionata da quelle dei giocatori agli istanti precedenti.

   > **Ad informazione perfetta**: ad ogni istante del gioco il giocatore a cui spetta la mossa conosce l'intera storia del gioco.

   > **Ad informazione imperfetta**: almeno un giocatore può non conoscere l'intera storia del gioco.

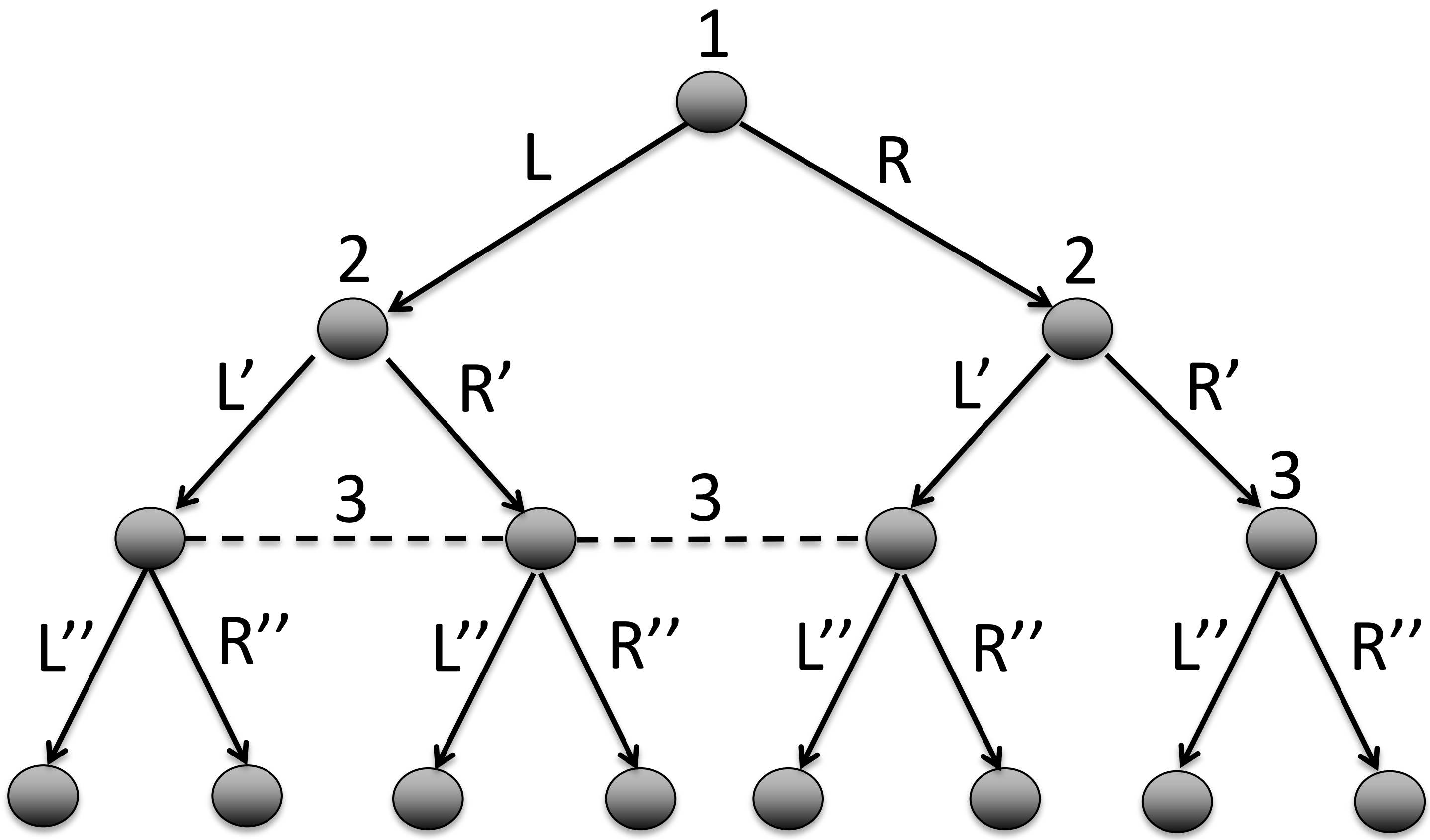
Definizioni

Una **strategia** è un piano completo d'azione: un piano che specifica un'azione ammissibile del giocatore per ciascuna circostanza in cui il giocatore può essere chiamato ad agire.

Un **insieme informativo** è un insieme di nodi decisionali che soddisfano le seguenti condizioni:

- in corrispondenza di ogni nodo dell'insieme informativo un giocatore ha diritto alla mossa;
- Il giocatore a cui spetta la mossa non sa quale nodo dell'insieme informativo è stato raggiunto.

Esempio di gioco ad informazione imperfetta



Definizioni

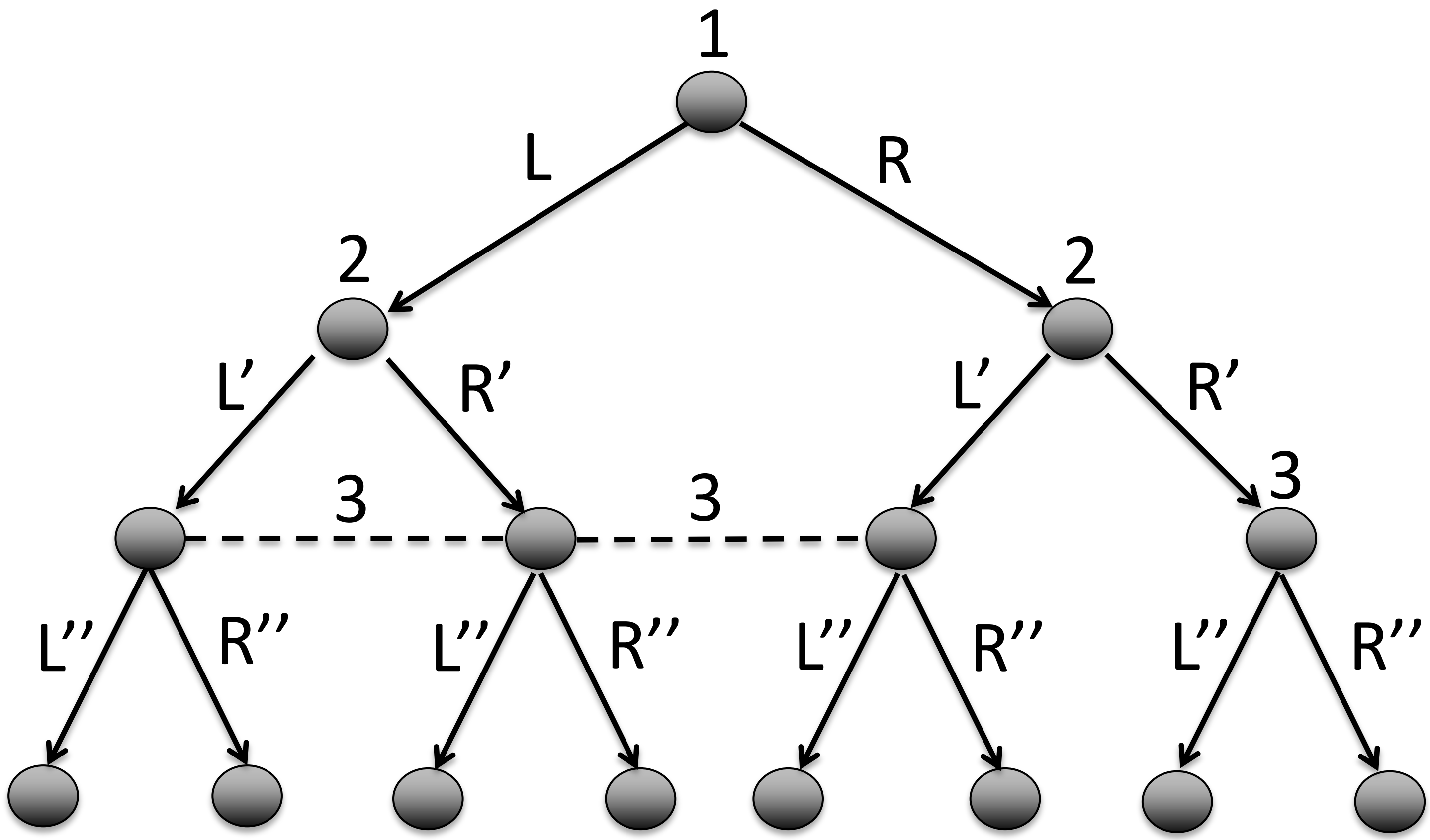
In un gioco ad informazione perfetta, ogni insieme informativo contiene un solo nodo; in un gioco ad informazione imperfetta, invece, esiste almeno un insieme informativo di un giocatore che contiene più di un nodo.

Definizioni

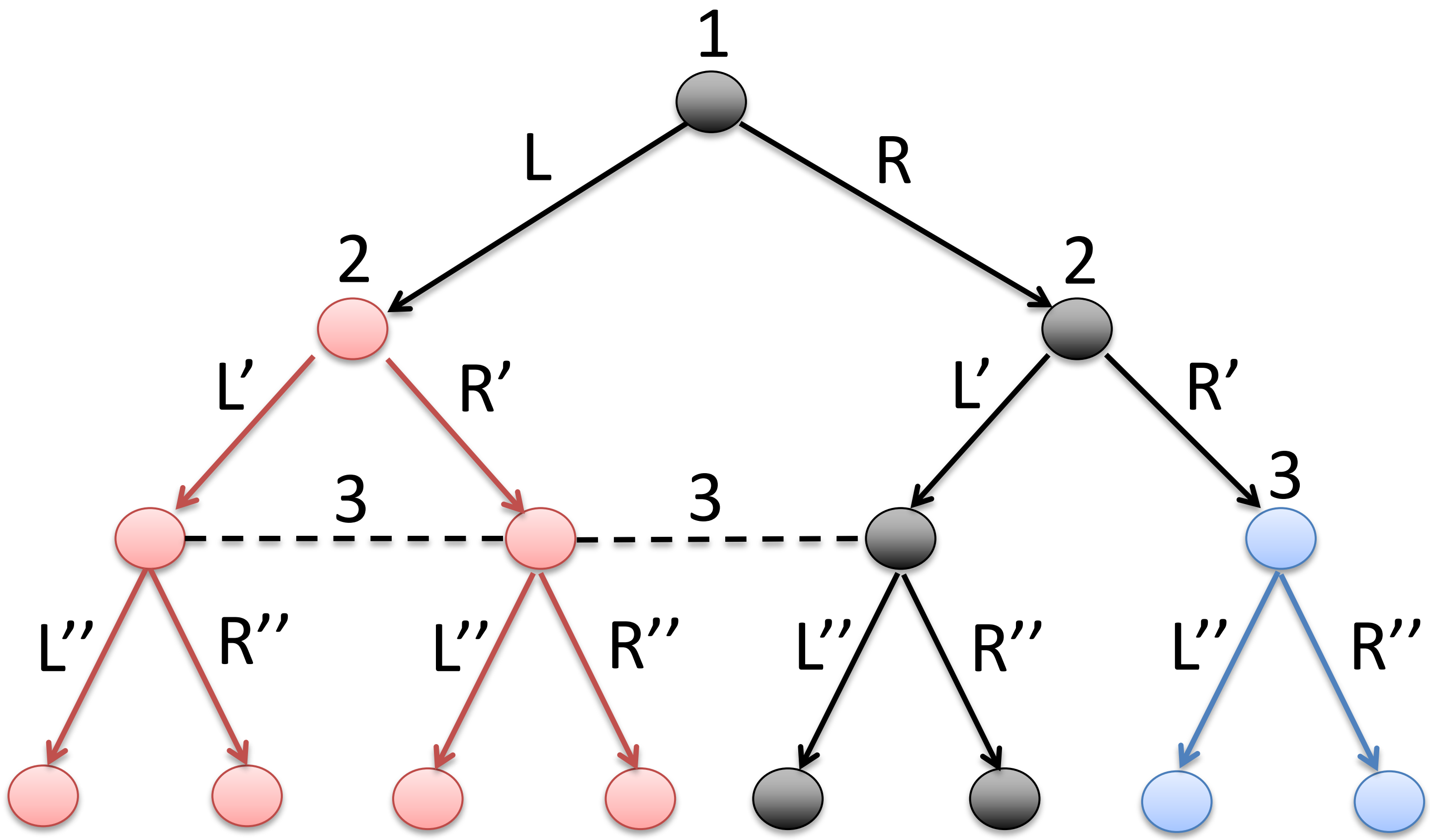
Un **sottogioco** di un gioco in forma estesa:

- ha un unico nodo iniziale, che rappresenta l'unico elemento dell'insieme informativo a cui appartiene.
- comprende tutti i nodi decisionali e terminali successivi al nodo iniziale nell'albero del gioco, ma nessun nodo precedente;
- non spezza alcun insieme informativo (se un nodo di un insieme informativo appartiene al sottogioco, allora tutti i nodi di quell'insieme informativo appartengono al sottogioco).

Esempio di sottogioco



Esempio di sottogioco



Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi

Un **equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi** è un equilibrio le cui strategie dei giocatori costituiscono un equilibrio di Nash in ogni sottogioco.

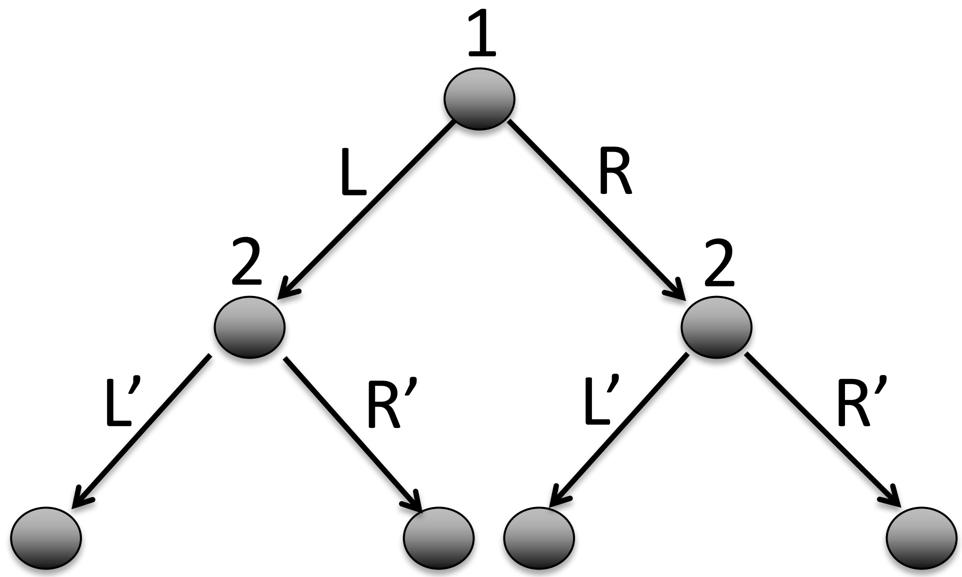
Ogni gioco dinamico finito ad informazione completa ha un equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi, eventualmente in strategie miste.

Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi

Procedimento:

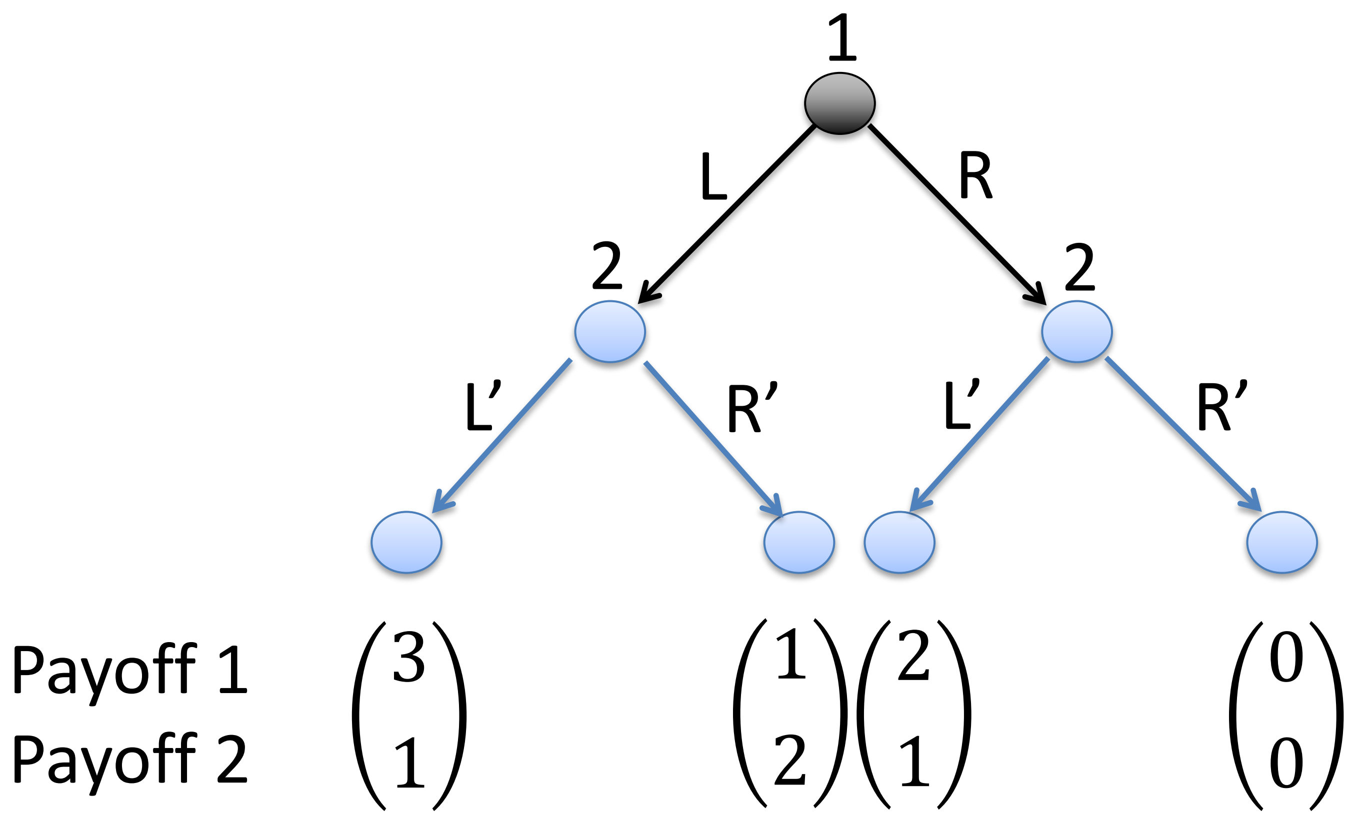
1. Considerare i più piccoli sottogiochi che contengono i nodi terminali, trovare gli equilibri di Nash di ogni sottogioco e sostituire ogni sottogioco con i payoff appena calcolati.
2. Considerare i nodi iniziali dei sottogiochi appena risolti come nodi terminali di un gioco «ridotto» e ritornare al punto 1. fino ad arrivare al nodo iniziale.

Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio

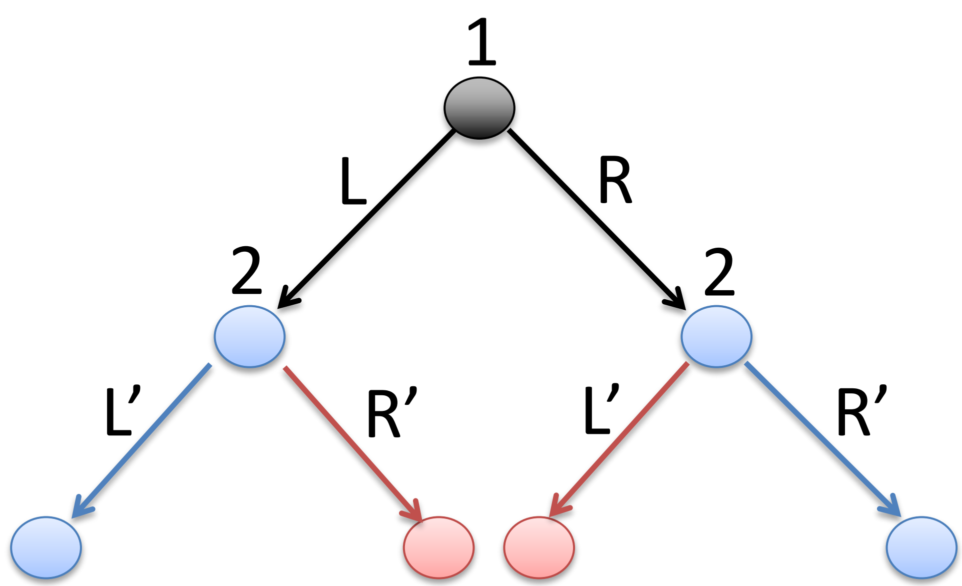


Payoff 1	3	1	2	0
Payoff 2	1	2	1	0

Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio

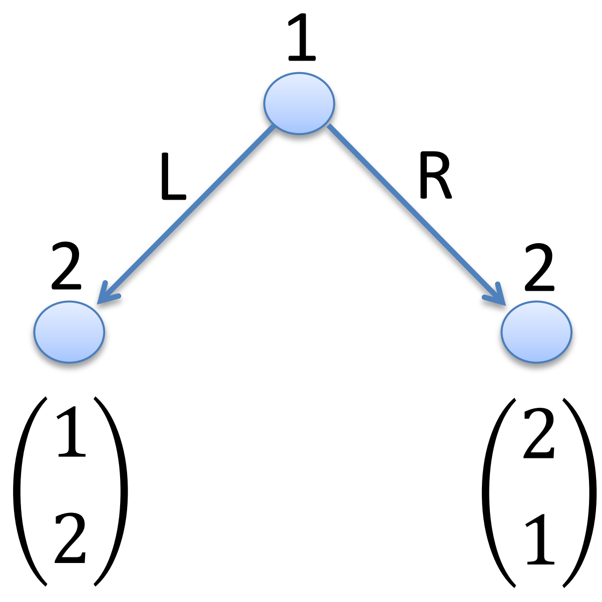


Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio

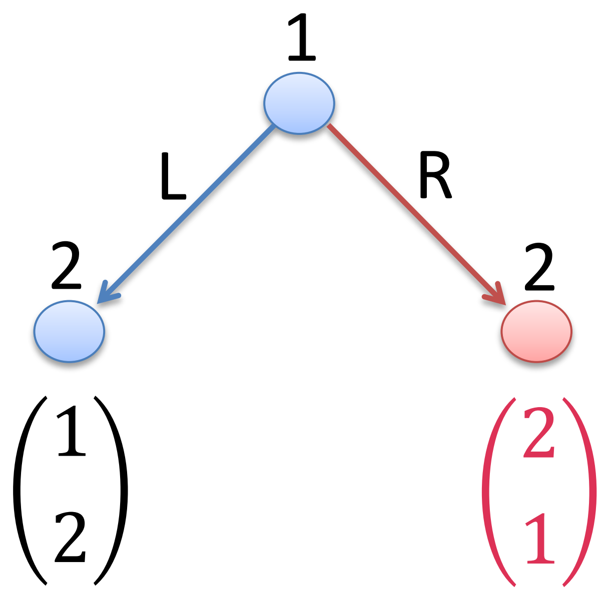


$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

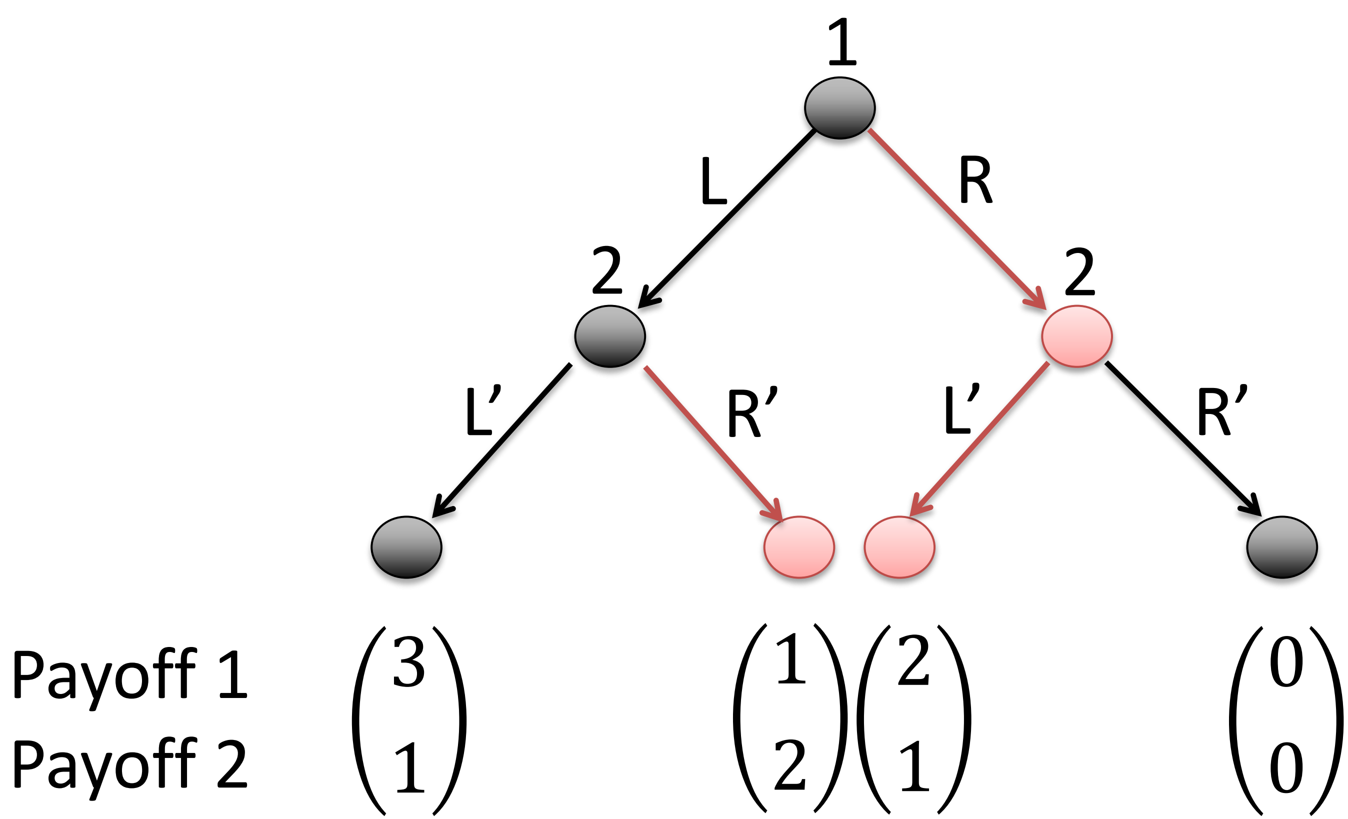
Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio



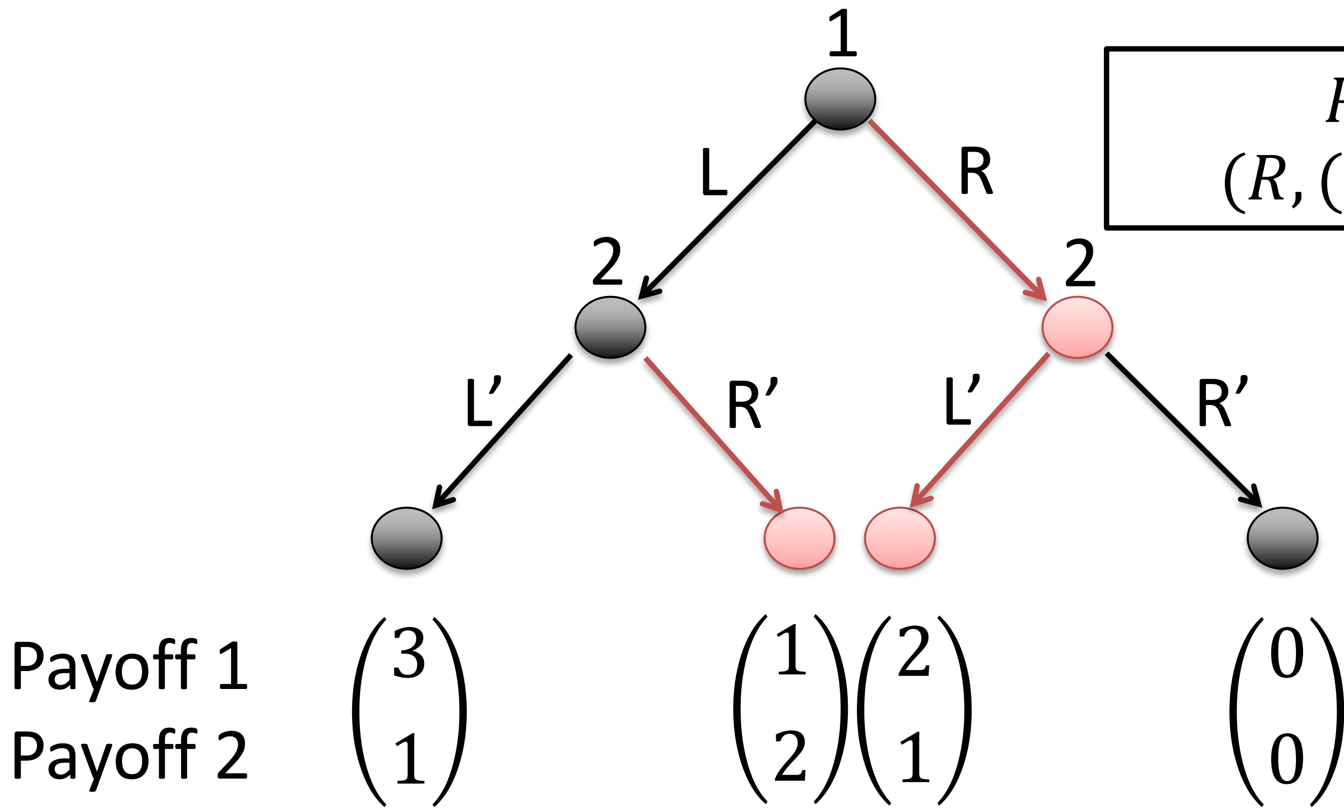
Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio



Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio



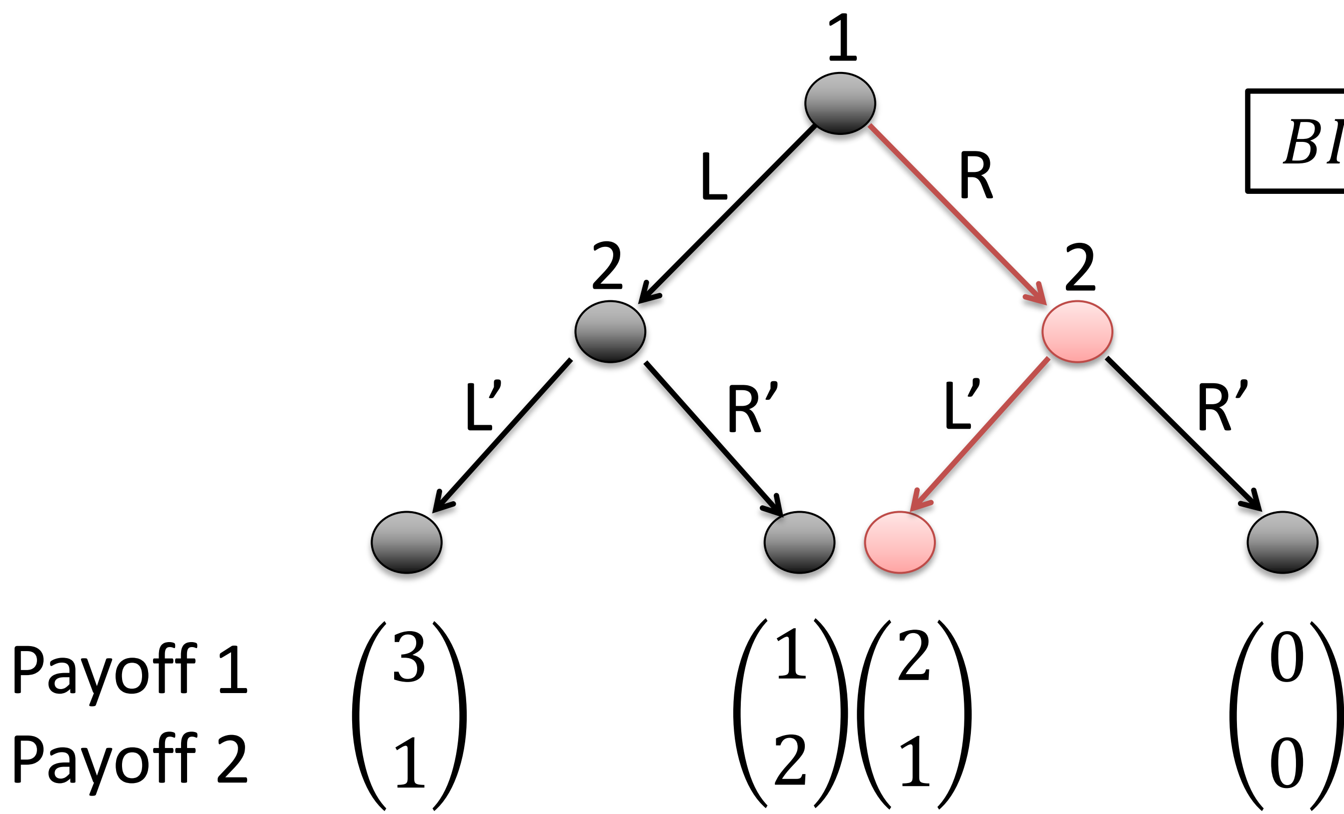
Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: esempio



$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{PRE = (R, (R'|L, L'|R))}$$

Induzione a ritroso: esempio



$$\boxed{BI = (R, L')}$$

Equilibrio di Nash vs induzione a ritroso

L'equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi è strettamente connesso con la soluzione trovata attraverso l'induzione a ritroso, ma c'è una differenza sostanziale:

l'equilibrio di Nash è costituito da un profilo di **strategie** (piani completi d'azione), mentre l'esito dell'induzione a ritroso riguarda solo le **azioni** intraprese dal nodo iniziale a quello finale, è legato cioè alle particolari contingenze che si verificano:

$$PRE = \left(a_1^*, R_2(a_1)\right);$$
$$BI = (a_1^*, R_2(a_1^*)).$$