Funzioni olomorfe

1 La funzione esponenziale nel campo complesso

Consideriamo la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

con $z = x + i\,y = \Re(z) + i\,\Im(z)$ numero complesso. Tale serie converge su tutto il campo complesso. È noto che essa ha per somma e^z quando z è un numero reale. Ció suggerisce la seguente posizione che estende la funzione esponenziale a tutto il campo complesso

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{1}$$

La (1) si giustifica, oltre che per la ragione appena esposta, anche per il fatto che tale funzione eredita tutte le proprietà formali della classica funzione esponenziale nel campo reale.
A titolo esemplificativo dimostriamo che, se z e w sono due numeri complessi allora

$$e^{z+w} = e^z e^w\,. \tag{2}$$

Ricordiamo che per prodotto secondo Cauchy di due serie di termini generali a_n e b_n si intende la serie il cui termine generale è

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Sussiste il seguente risultato.

Teorema 1.1 *Se le serie di termini generali a_n e b_n sono assolutamente convergenti tale è anche la serie prodotto secondo Cauchy; si ha inoltre*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)\,. \tag{3}$$

Ció premesso si ha

$$e^z\,e^w \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right)$$

(per la (3))

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}
\end{aligned}
$$

cioè la (2).

Poniamo $z = iy$ nella (1). Per l'assoluta convergenza di tale serie possiamo riordinarne i termini ottenendo la seguente relazione

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos y + i \sin y\,.
\end{aligned}
$$

Da tale formula e dalla (2) si ha

$$
e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)
$$

da cui

$$
\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.
$$

Tali formule, attribuite ad Eulero, suggeriscono come estendere al campo complesso le funzioni trigonometriche seno e coseno

$$
\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.
$$

Ovviamente risulta

$$
\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
$$

e

$$
\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.
$$

2 Derivabilità nel campo complesso

Fissati a e una successione $\{a_n\}$ consideriamo la serie di potenze di punto iniziale a

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\,. \tag{4}
$$

L'estremo superiore r dei valori h per cui la serie a termini reali non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, h^n$$

converge, è noto come raggio di convergenza della serie (4).
Si puó verificare una delle seguenti tre eventualità.

- $r = 0$: la serie (4) converge solo per $z = a$.
- $0 < r < +\infty$: la serie (4) converge assolutamente in tutti i punti appartenenti al cerchio aperto $C_r(a)$ del piano complesso di centro a e raggio r e non converge nei punti esterni a tale cerchio; la convergenza è uniforme in ogni cerchio di centro a e raggio strettamente minore di r.
- $r = +\infty$: la serie converge assolutamente per ogni valore di z; a convergenza è uniforme in tutti gli insiemi limitati del piano complesso.

Osservazione 2.1 *Richiamiamo la seguente definizione di massimo limite di una successione* $\{x_n\}$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} x_n \right) .$$

Per calcolare il raggio di convergenza della serie (4) *bisogna ricorrere alla seguente formula*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{5}$$

È ovvio che, se la successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ *è regolare, allora si ha*

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Definizione 2.1 *Si dice che una funzione f a valori complessi definita in un sottoinsieme aperto A del piano complesso è derivabile in un punto $z \in A$ se*

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)\,. \tag{6}$$

Il numero complesso $f'(z)$ è la derivata di f in z. Se la funzione f è derivabile in ogni punto dell'aperto A si dice che f è olomorfa in A.

Se $z = x + iy$ poniamo

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)\,. \tag{7}$$

Dalla (6) si ha

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik}\,.$$

Si ha pertanto

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8}$$

ovvero

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x\,. \tag{9}$$

Le (9) sono note come equazioni di Cauchy-Riemann.

Sussiste il seguente risultato.

Teorema 2.1 *Se f è olomorfa in A allora le funzioni u e v sono differenziabili in A; sussistono inoltre le condizioni di Cauchy-Riemann* (9) *e si ha*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'|^2\,. \tag{10}$$

La (10) è diretta conseguenza delle (9). Resta quindi da verificare la differenziabilità di u, v ovvero della seguente applicazione del piano in sé

$$F\,:\,(x,y) \longrightarrow (u(x,y), v(x,y))\,.$$

Ricordiamo che F è differenziabile se esiste esiste un funzionale lineare J di R^2 in sé tale che, se $(h,k) \in R^2$,

$$\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h,y+k) - F(x,y) - J(h,k)\|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{11}$$

dove $\|\cdot\|$ denota la classica norma euclidea. Ovviamente J è la matrice

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

il cui determinante, riportato in (10), è noto come jacobiano della trasformazione F.
Per le (9) si ha

$$\begin{aligned} J(h,k) &= \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (u_x h - v_x k, v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + iv_x)h + i(u_x + iv_x)k = (u_x + iv_x)(h + ik) = f'(z)\Delta z \end{aligned}$$

dove $\Delta z = h + ik$.
Il numeratore in (11) diventa allora

$$|f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z)\Delta z|\,;$$

dall'olomorfia di f si ha quindi la (11).

Il teorema 2.1 puó essere invertito.

Teorema 2.2 *Se le funzioni u, v sono differenziabili in un aperto A del piano complesso e se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann (9) allora la funzione (7) è olomorfa in A.*

Essendo

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

e

$$v(x+h, y+k) - v(x,y) = v_x(x,y)h + v_y(x,y)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

risulta, per le (9),

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (u_x + iv_x)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

dove $\Delta z = h + ik$; pertanto f è olomorfa.

Esempio 2.1 *Consideriamo la funzione potenza*

$$z \in C \longrightarrow z^n \in C\,, \quad n \in N\,.$$

Si ha

$$(z+\Delta z)^n - z^n = \Delta z[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}] \tag{12}$$

da cui

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}\,.$$

Quindi la derivata di z^n è nz^{n-1}.

Teorema 2.3 *Sia f la somma della serie di potenze (4) e sia r il suo raggio di convergenza. Allora per ogni $z \in C_r(a)$ la funzione f è derivabile in z e si ha*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-a)^{n-1}\,. \tag{13}$$

Per semplicità poniamo $a = 0$. È possibile dimostrare, usando la (5), che la serie (13) ha lo stesso raggio di convergenza della serie (4); si ha quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|h^{n-1} < +\infty \quad \forall h \in [0, r[\,. \tag{14}$$

Fissato $z \in C_r(0)$ consideriamo gli incrementi Δz tali che $|z+\Delta z| < r_0 < r$; risulta

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(z+\Delta z)^n - z^n]\,.$$

Ricordando (12) si ha allora

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}]\,. \tag{15}$$

Il valore assoluto del termine $n-$mo della serie a secondo membro di (15) si maggiora con

$$n|a_n|r_0^{n-1}\,,$$

che è il termine generale di una serie convergente in base alla (14). La serie a secondo membro in (15) converge allora totalmente; si puó quindi passare al limite sotto il segno di serie ottenendo in tal modo la (13).

Pertanto le funzioni che sono somma di una serie di potenze, le cosiddette funzioni analitiche, sono olomorfe. Vedremo nel prossimo paragrafo che, in un certo senso, analiticità è sinonimo di olomorfia.

Osservazione 2.2 *Ricordiamo che un numero complesso z si puó rappresentare anche ricorrendo alle classiche coordinate polari*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \theta = \arg z\,.$$

La funzione argomento arg *è una funzione a piú valori che associa ad ogni numero complesso non nullo tutte le determinazioni dell'angolo che il vettore, con estremi l'origine e il punto assegnato, forma con il semiasse positivo delle x.*
Se si interpreta la funzione (7) *come funzione di tali coordinate polari, ovvero si pone*

$$g(\rho, \theta) = f(\rho e^{i\theta})\,,$$

le condizioni di Cauchy-Riemann assumono la seguente forma

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = -\frac{i}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}\,. \tag{16}$$

Esempio 2.2 *Consideriamo la funzione*

$$z \in C \longrightarrow \bar{z} = x - iy\,.$$

Tale semplice funzione non è olomorfa in quanto non risultano soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann (9)*.*

Osservazione 2.3 *Le equazioni di Cauchy-Riemann comportano che una funzione definita in un aperto connesso del piano complesso e a valori reali è olomorfa solo se essa è costante.*

Esempio 2.3 *Essendo*

$$z = |z| e^{i \arg z} = e^{\log|z| + i \arg z}$$

i numeri complessi $w = \log z + i \arg z$ sono tali che $e^w = z$. Ha senso quindi definire in ambito complesso la classica funzione logaritmo nel modo seguente

$$z \neq 0 \longrightarrow \log z = \log|z| + i \arg z\,.$$

Si tratta di una funzione a piú valori. Fissiamone la determinazione corrispondente ai valori dell'argomento di z appartenenti all'intervallo $]-\pi, \pi[$. Usando le condizioni di Cauchy-Riemann (16) *si puó allora facilmente dimostrare che tale funzione è olomorfa.*

3 Il Teorema di Cauchy

L'obiettivo di tale paragrafo è invertire l'enunciato del teorema 2.3, far vedere cioè che se una funzione è olomorfa in un aperto A, allora, comunque si fissi un punto $a \in A$, essa è somma di una serie di potenze di punto iniziale a e raggio di convergenza non nullo.

Premettiamo alcune definizioni. Per curva regolare del piano complesso si intende una applicazione

$$\gamma \,:\, t \in [t_1, t_2] \longrightarrow \gamma(t) = x(t) + i\, y(t) \tag{17}$$

con $x(t), y(t)$ funzioni di classe C^1 le cui derivate non si annullano simultaneamente. Alla curva (17) è possibile associare due diversi orientamenti, l'uno l'opposto dell'altro. Nel seguito avremo cura di scegliere la rappresentazione parametrica (17) della curva γ in modo tale che l'orientamento fissato come positivo corrisponda a quello delle t crescenti. Con il simbolo $+\gamma$ si denota la curva in tal modo orientata.
La (17) definisce una curva generalmente se l'intervallo $[t_1, t_2]$ puó essere decomposto in un numero finito di sottointervalli tali che le restrizioni di (17) a ciascuno di essi è una curva regolare.
Ricordiamo che per dominio regolare si intende un insieme limitato e connesso la cui frontiera è costituita da una o piú curve chiuse generalmente regolari, una delle quali esterna e le altre, se presenti, interne. L'orientamento positivo della frontiera di un tale dominio si ottiene orientando in senso antiorario la curva esterna e in senso orario le eventuali curve interne.
Fissata la curva (17) orientata secondo quanto precedentemente indicato supponiamo che il suo sostegno sia contenuto nell'aperto A in cui è definita una funzione continua f. Per integrale di f esteso a $+\gamma$ si intende la quantità

$$\int_{+\gamma} f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,. \tag{18}$$

Definizione 3.1 *Una funzione olomorfa F tale che $F' = f$ in A dicesi primitiva di f.*

Sussiste il seguente risultato.

Teorema 3.1 *Sia F una primitiva di una funzione continua f; assegnata una curva γ, generalmente regolare, di estremi z_1 e z_2, orientata nel verso che va dal primo al secondo punto, si ha*

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Inoltre se γ è chiusa

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = 0\,.$$

Scriviamo in forma piú esplicita la (18)

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} f(z)\, dz &= \int_{t_1}^{t_2} \left[u(x(t), y(t)) + i\, v(x(t), y(t))\right]\left[x'(t) + i\, y'(t)\right]\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\right]\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad i\int_{t_1}^{t_2} \left[u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),y(t))x'(t)\right]\,dt \\
&= \quad \int_{+\gamma} u\,dx - v\,dy \;+\; i\int_{+\gamma} v\,dx + u\,dy\,.
\end{aligned}
$$

Quindi l'integrale di f esteso a $+\gamma$ viene ad esprimersi mediante integrali delle due forme differenziali

$$
u\,dx - v\,dy\,, \qquad v\,dx + u\,dy\,;
$$

tali forme differenziali, per le condizioni di Cauchy-Riemann (9), risultano chiuse se f è olomorfa. Supponiamo f' continua; allora anche le derivate parziali prime di u e v sono continue. Se D è un dominio a frontiera regolare contenuto in A, per le formule di Gauss-Green si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{+\partial D} f(z)\,dz \;&=\; \int_{+\partial D} u\,dx - v\,dy \;+\; i\int_{+\partial D} v\,dx + u\,dy \\
&=\; -\int_D (u_y+v_x)\,dxdy + i\int_D (-v_y+u_x)\,dxdy
\end{aligned}
$$

da cui, per le (9),

$$
\int_{+\partial D} f(z)\,dz = 0\,. \tag{19}
$$

La (19) puó essere ottenuta prescindendo da ogni ipotesi di regolarità su f. Sussiste infatti il seguente risultato.

Teorema 3.2 (Teorema di Cauchy) *Sia f una funzione olomorfa in un aperto A e sia D un dominio regolare contenuto in A. Sussiste allora la* (19).

La dimostrazione del Teorema di Cauchy consta di vari passi il primo dei quali consiste nel provare la (19) nel caso in cui il dominio sia un triangolo T.Indichiamo rispettivamente con d e p il diametro e il perimetro di T. Consideriamo i quattro triangoli T_1, T_2, T_3, T_4, tutti simili a T, ottenuti collegando i punti medi dei lati di T. Si ha ovviamente

$$
\int_{+\partial T} f\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{+\partial T_i} f\,dz
$$

da cui

$$
\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \le \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{+\partial T_i} f\,dz\right|\,.
$$

È possibile scegliere uno dei triangoli T_i, denotiamolo con il simbolo $T^{(1)}$, tale che

$$
\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \le 4\left|\int_{+\partial T^{(1)}} f\,dz\right|\,.
$$

Siano $d^{(1)}$ e $p^{(1)}$ rispettivamente il diametro e il perimetro di $T^{(1)}$; si ha ovviamente $d^{(1)} = 2^{-1}d$ e $p^{(1)} = 2^{-1}p$. Se ripetiamo tale costruzione a partire da $T^{(1)}$ si individua un secondo triangolo $T^{(2)}$, il cui diametro e il cui perimetro sono la quarta parte del diametro e del perimetro del triangolo T, per il quale si ha

$$\left|\int_{+\partial T^{(1)}} f\,dz\right| \leq 4\left|\int_{+\partial T^{(2)}} f\,dz\right|$$

e quindi

$$\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \leq 4^2\left|\int_{+\partial T^{(2)}} f\,dz\right| .$$

Si viene a determinare in tal modo una successione decrescente di triangoli $\{T^{(n)}\}$, con diametri $d^{(n)} = 2^{-n}d$ e perimetri $p^{(n)} = 2^{-n}p$, tali che

$$\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{+\partial T^{(n)}} f\,dz\right| . \tag{20}$$

L'intersezione di tali triangoli deve essere un chiuso non vuoto; il diametro di tali triangoli tende a zero quindi tale intersezione si riduce da un unico punto z_0.
Poiché f è olomorfa in z_0 si ha

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$$

con $\varepsilon(z)$ infinitesima per z che tende a z_0. Essendo la funzione

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

olomorfa con derivata continua per essa vale la (19); si ha cioè

$$\int_{+\partial T^{(n)}} \left[f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right] dz = 0\,.$$

Risulta allora

$$\int_{+\partial T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{+\partial T^{(n)}} \varepsilon(z)(z - z_0)\,dz\,. \tag{21}$$

Se $\sigma > 0$ si determini δ in modo tale che $|\varepsilon(z)| < \sigma$ non appena $|z - z_0| < \delta$. Fissato n in modo che il triangolo $T^{(n)}$ sia contenuto nel cerchio di centro z_0 e raggio δ si ha dalla (21)

$$\left|\int_{+\partial T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq \sigma\int_{\partial T^{(n)}} |z - z_0|\,ds \leq \sigma d^{(n)}p^{(n)} = \sigma 4^{-n}d\,p\,.$$

In definitiva, ricordando la (20), si ha

$$\left|\int_{+\partial T} f(z)\,dz\right| \leq \sigma d\,p\,;$$

dall'arbitrarietà di σ discende l'asserto.

Ovviamente la formula (19) puó essere banalmente estesa al caso di poligoni essendo questi unione di un numero finito di triangoli. Il passaggio a domini di struttura piú generale richiede che questi e le loro frontiere possano essere approssimati con poligoni. Su tale questione peró non ci soffermiamo dal momento che, per i nostri scopi, basta sapere che (19) vale per poligonali chiuse contenute in aperti semplicemente connessi.

Teorema 3.3 *Sia f olomorfa in un insieme semplicemente connesso; allora f è ivi dotata di primitiva.*

La primitiva si costruisce in modo standard scegliendo in modo opportuno una poligonale che colleghi un punto fissato con un generico punto dell'aperto. Dai teoremi 3.1 e 3.3 discende che l'integrale di f esteso ad una qualsiasi curva generalmente regolare e chiusa contenuta in un aperto A semplicemente connesso è nullo. Tale risultato peró non basta se si vuole pervenire al seguente fondamentale risultato.

Teorema 3.4 (Formula integrale di Cauchy) *Sia C un cerchio contenuto nell'aperto A in cui f è olomorfa. Per ogni z interno a C si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \,. \tag{22}$$

La funzione integranda è olomorfa in $C - \{z\}$ che non è semplicemente connesso. Per ovviare a tale inconveniente bisogna operare nel modo seguente. Scegliamo r in modo tale il cerchio C_r di centro z e raggio r sia interno a C. Creiamo un corridoio che colleghi la frontiera di C_r con quella di C costituito da un settore di centro z e apertura r. Si ottiene in tal modo un isieme la cui frontiera è costituita dalla frontiera di C, privata di un arco, dalla frontiera di C_r, privata di un ulteriore arco, e da due segmenti. Tale insieme, denotato con D_r, è semplicemente connesso; ovviamente si ha

$$\int_{+\partial D_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = 0 \,.$$

Facendo tendere r a zero, tenendo conto che i contributi dell'integrale curvilineo sui due segmenti tendono, per questioni di continuità, a compensarsi l'un l'altro, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{r \to 0} \int_{+\partial C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \,. \tag{23}$$

Essendo

$$\int_{+\partial C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \, d\theta \,., \tag{24}$$

per la continuità di f si ha

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \, d\theta = 2\pi f(z) \,. \tag{25}$$

Dalle (23), (24), (25) si ottiene la formula (22).

Osservazione 3.1 *Nella* (22) *il cerchio puó essere sostituito da un qualsiasi dominio D a frontiera regolare contenuto nell'aperto di olomorfia*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \,, \qquad z \in D \backslash \partial D \,.$$

Da tale formula si deduce che i valori assunti da una funzione olomorfa all'interno di un dominio regolare sono determinati in modo univoco dai valori che essa assume sul bordo.

Tale proprietà marca una ulteriore significativa differenza tra le funzioni derivabili nel campo reale e quelle derivabili nel campo complesso.
Si puó inoltre dimostrare, sempre utilizzando il teorema 3.2, che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = 0$$

per ogni z esterno a D.

Una importante conseguenza della Formula integrale di Cauchy è costituita dal seguente risultato che caratterizza le funzioni olomorfe come funzioni analitiche.

Teorema 3.5 *Sia f è olomorfa in un aperto A; allora per ogni $a \in A$ la funzione f è somma di una serie di potenze di punto iniziale a e raggio di convergenza non nullo.*

Sia C_r un cerchio con centro in a e raggio r contenuto in A e sia γ_r la sua frontiera; si ha per la (22)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\,, \quad \forall z \in C_r\,. \tag{26}$$

Fissato $\bar{r} < r$, se $z \in C_{\bar{r}}(a)$ e ξ varia su γ_r, si ha

$$\left|\frac{z-a}{\xi - a}\right| \le \frac{\bar{r}}{r} < 1$$

e quindi

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}} = \frac{1}{\xi - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n .$$

Risulta pertanto

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}f(\xi)\,. \tag{27}$$

Essendo f limitata in $c_{\bar{r}}(a)$, la serie a secondo membro in (27) si maggiora con una serie geometrica convergente; quindi tale serie è totalmente convergente.
Dalle (26) e (27), integrando termine a termine, si ha allora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}f(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,d\xi\,. \end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \tag{28}$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}d\xi\,. \tag{29}$$

La sviluppabilità in serie di Taylor comporta che f ha derivata di ogni ordine e che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,. \tag{30}$$

Osservazione 3.2 *Il teorema* 3.5 *implica che una funzione olomorfa ha derivate che sono anch'esse olomorfe (Teorema di Goursat). Inoltre è possibile dimostrare il teorema di Cauchy nella sua versione piú generale: infatti la regolarità di f in tal modo acquisita consente di procedere ricorrendo alle formule di Gauss-Green.*

Definizione 3.2 *Se i coefficienti a_k con $k = 0, \cdots, n-1$ sono nulli e $a_n \neq 0$ si dice che a è uno zero per f di ordine n. La* (28) *diventa*

$$f(z) = (z-a)^n f_n(z) \tag{31}$$

con $f_n(a) \neq 0$.

Poiché

$$a_0 = f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

si ha il seguente risultato.

Teorema 3.6 (Proprietà di media) *Se f è olomorfa in un aperto A e se il cerchio $C_r(a)$ di centro a e raggio r è contenuto in A si ha*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} f(z)\, ds\,. \tag{32}$$

Se u è armonica in A e si interpreta tale funzione come parte reale di una funzione olomorfa f dalla (32) si ottiene

$$u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} u(z)\, ds\,. \tag{33}$$

Le (32) e (33) assicurano che il valore di una funzione olomorfa o di una funzione armonica in un punto a è il valore medio della funzione su una qualsiasi circonferenza con centro in quel punto.
Dalle (29) e (30) si ottiene facilmente il seguente risultato.

Teorema 3.7 (Diseguaglianze di Cauchy) *Sia f olomorfa in un aperto A e sia γ una cerconferenza contenuto in A di centro z_0 e raggio R. Si ha allora*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_\gamma |f|\,. \tag{34}$$

Concludiamo tale paragrafo con il seguente risultato che inverte il teorema di Cauchy.

Teorema 3.8 (Teorema di Morera) *Sia f una funziona continua in un cerchio C; se per ogni triangolo T contenuto in C si ha*

$$\int_{+\partial T} f(z) dz = 0 \tag{35}$$

allora f è olomorfa in C.

L'ipotesi (35) assicura che f è dotata di primitiva F. Questa, in quanto olomorfa, ha derivate che sono esse stesse olomorfe: tale deve essere quindi anche f.

4 Sviluppi in serie di Laurent

Sia a un punto di un aperto A e sia f olomorfa in $A\backslash\{a\}$; si dice allora che a è un punto singolare per f. La formula integrale di Cauchy consente di scrivere la funzione f come somma di una serie di potenze ad esponenti interi relativi, nota come sviluppo in serie di Laurent di f,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}\,, \qquad \forall z \in C_r\backslash\{a\}\,, \tag{36}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi\,, \quad k \in Z \tag{37}$$

e C_r è un cerchio con centro in a e raggio r contenuto in A.
Lo sviluppo (36) consente di classificare i punti di singolarità isolati delle funzioni olomorfe secondo il seguente schema.

- a è una singolarità eliminabile se i coefficienti (37) sono nulli per ogni $k < 0$; in tal caso f puó essere prolungata per continuità in a e la funzione cosí ottenuta è olomorfa in tutto l'aperto A.

- a è un polo di ordine n se $a_{-n} \neq 0$ e $a_k = 0$ per ogni $k < -n$; ció vuol dire che nello sviluppo (36) di f sono presenti solo un numero finito di termini ad esponente negativo.

- a è una singolarità essenziale se esistono infiniti indici negativi k in corrispondenza dei quali i coefficienti (37) sono diversi da zero.

Esempio 4.1 *Consideriamo una funzione razionale*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{38}$$

con P, Q polinomi. Se gli m numeri complessi z_j sono gli zeri del polinomio Q, ciascuno con molteplicità k_j, si ha

$$Q(z) = q_0 \prod_{j=1}^{m} (z-z_j)^{k_j}\,.$$

Supponiamo che i numeri z_j non siano zeri per il polinomio P. Si puó facilmente dimostrare che (38) è olomorfa in tutto il piano complesso privato dei punti z_j; ogni z_j è un polo di ordine k_j per la funzione (38).

Esempio 4.2 *Consideriamo la funzione*

$$z \neq 0 \longrightarrow e^{\frac{1}{z}}\,. \tag{39}$$

Per la (1) si ha

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}\,;$$

lo zero quindi è una singolarità essenziale per la funzione (39).

Lo sviluppo in serie di Laurent si presta bene anche per studiare il comportamento all'infinito di una funzione olomorfa.
Se f olomorfa in un aperto A che sia il complementare di un compatto, la funzione

$$g \,:\, \zeta \neq 0 \longrightarrow g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

è ovviamente olomorfa in un intorno dell'origine privato dell'origine stessa. Sviluppata g in serie di Laurent

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n$$

allora per f si ottiene il seguente sviluppo in un intorno del punto all'infinito

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{-n} z^n \,. \tag{40}$$

Tale sviluppo consente di classificare il tipo di singolarità del punto all'infinito attribuendo a tale punto lo stesso tipo di singolarità che assume in zero la funzione g. A tale proposito è utile sottolineare che il punto all'infinito è regolare per f se nello sviluppo (40) compaiono solo termini con potenze ad esponente non positivo.

5 Il Teorema dei residui

Tra tutti i coefficienti (37) un ruolo importante è assunto da

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} f(\xi)\, d\xi = \text{Res } (f; a) \tag{41}$$

noto come residuo di f in a.
È possibile definire il residuo all'infinito nel modo seguente

$$\text{Res } (f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_r} f(z)\, dz \,; \tag{42}$$

ovviamente nella (42) γ_r è una circonferenza di centro l'origine e raggio r e si assume che f sia olomorfa in ogni punto ad essa esterno.
In analogia con quanto fatto per le singolarità al finito, è possibile mettere in relazione tale residuo con un opportuno coefficiente dello sviluppo (40).
Poiché è possibile integrare termine a termine la serie (40), essendo

$$\int_{-\gamma_r} z^k\, dz = 0 \,, \quad k \neq -1$$

nonché

$$\int_{-\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz = -2\pi i \,,$$

si ha

$$\text{Res } (f; \infty) = -a_1 \,. \tag{43}$$

Osservazione 5.1 *Contrariamente al caso dei punti al finito per il punto all'infinito il residuo puó essere non nullo pur essendo f regolare all'infinito.*

Dimostriamo ora il seguente risultato.

Teorema 5.1 (Teorema dei Residui) *Sia f olomorfa in $A \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ e sia D un dominio regolare e limitato contenuto in A e contenente al proprio interno i punti z_k. Si ha allora*

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k)\,. \tag{44}$$

Per ogni z_k si indichi con C_k un cerchio con centro in z_k contenuto in D. Per il teorema 3.2 si ha

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\partial C_k} f(z)\, dz = 0\,;$$

si ottiene allora la (44) se si tiene conto della formula (41) che fornisce il valore del residuo in ogni z_k.

Sussiste inoltre il seguente risultato.

Teorema 5.2 *Sia f una funzione olomorfa in $C \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k) + \mathrm{Res}(f; \infty) = 0\,. \tag{45}$$

Consideriamo una circonferenza γ_r, con centro in zero e raggio r, che contenga al proprio interno i punti singolari di f. Si ha allora per il teorema 3.2

$$\int_{+\gamma_r} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\partial C_k} f(z)\, dz = 0$$

da cui (45) ricordando le espressioni (41) e (42) dei residui nei punti al finito e all'infinito.

Concludiamo tale breve rassegna ricordando il seguente risultato che si presenta utile quando si vuole calcolare il residuo in un polo.

Teorema 5.3 *Sia a un polo di ordine n per f; allora*

$$\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}[(z-a)^n f(z)]\,.$$

In particolare, se a è un polo del primo ordine, si ha

$$\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)\,. \tag{46}$$

Limitiamoci a dimostrare la (46). Essendo a un polo del primo ordine si ha

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\,.$$

Si ha allora

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=a_{-1}$$

da cui l'asserto.

Sia a uno zero di ordine n per f; dalla (31) si ha

$$f'(z)=(z-a)^{n-1}[nf_n(z)+(z-a)f_n{}'(z)]=(z-a)^{n-1}g(z)$$

con $g(a)\neq 0$; quindi a è uno zero di ordine $n-1$ per f'.
Ció comporta che la funzione f'/f presenta in a un polo del primo ordine. Per la (46) si ha

$$\text{Res }(f'/f;a)=\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{f_n(z)}=n\,. \tag{47}$$

Dal Teorema dei Residui e dalla (47) si ottiene facilmente il seguente risultato.

Teorema 5.4 (Formula dell'indicatore logaritmo) *Siano $z_1,\cdots,z_k$ gli zeri di f interni di un dominio regolare D e siano $n_1,\cdots,n_k$ i rispettivi ordini. Se $f\neq 0$ su ∂D si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{i=1}^{k}n_i\,. \tag{48}$$

Siamo ora in grado di dimostrare i seguenti risultati.

Teorema 5.5 (Teorema di Rouché) *Siano f,g due funzioni olomorfe in un aperto contenente un cerchio C; se*

$$|f(z)|>|g(z)| \qquad \forall z\in\partial C \tag{49}$$

allora f e $f+g$ presentano lo stesso numero di zeri all'interno di C.

Definiamo la famiglia di funzioni olomorfe

$$f_t(z)=f(z)+tg(z)\,, \qquad t\in[0,1]\,.$$

Per la (49) f_t non si annulla su ∂C; infatti

$$|f_t(z)|\geq|f(z)|-t|g(z)|>(1-t)|f(z)|\,.$$

Per la (48) il numero n_t di zeri di f_t interni a C è dato dalla formula

$$n_t=\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial C}\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz\,;$$

n_t dipende con continuità da t e assume solo valori interi, pertanto deve necessariamente risultare $n_t=$ costante. Si ha quindi

$$n_0=\text{numero di zeri di } f=n_1=\text{numero di zeri di } f+g\,.$$

Teorema 5.6 (Teorema dell'applicazione aperta) *Se f è olomorfa e non costante allora f trasforma aperti in aperti.*

Facciamo vedere che, se $w_0 = f(z_0)$, allora il codominio di f contiene un intorno di w_0. Non è restrittivo assumere $z_0 = w_0 = 0$. Scegliamo δ in modo tale che sul cerchio C con centro l'origine e raggio δ risulti $f(z) \neq 0$: ció è possibile perché gli zeri di f non possono addensarsi nell'origine. Se $\varepsilon > 0$ è il minimo di $|f|$ su ∂C e $|w| < \varepsilon$ si ha $|f(z)| > |w|$ su ∂C. Per il Teorema di Rouché $f - w$ ha in C lo stesso numero di zeri di f: esiste quindi un punto interno a C che ha per immagine w.

Teorema 5.7 (Principio del massimo modulo) *Se f è una funzione olomorfa in un aperto A e ivi non costante allora la funzione $|f|$ non puó avere massimo in A. Se inoltre A è limitato si ha*

$$\sup_A |f(z)| = \sup_{\partial A} |f(z)| \, .$$

Se per assurdo $|f|$ raggiunge il suo valore massimo in un punto $z_0 \in A$ allora, per il Teorema dell'applicazione aperta, $f(z_0)$ deve essere contenuto in un cerchio contenuto in $f(A)$. In tal caso al codominio di f apparterrebbero valori complessi con modulo strettamente maggiore di $|f(z_0)|$, contro le ipotesi.

6 Applicazioni del Teorema dei residui

Riportiamo senza dimostrazione i seguenti risultati.

Lemma 6.1 *Sia ϕ una funzione continua nel settore*

$$S = \{z \in C \, : \, |z| \geq \bar{r} \, , \quad \alpha \leq arg \; z \leq \beta \, , \quad \alpha, \beta \in [0, 2\pi]\} \, .$$

Se

$$\lim_{z \to \infty} z\phi(z) = \lambda$$

allora

$$\lim_{r \to \infty} \int_{+\gamma_r} \phi(z) \, dz = i\lambda(\beta - \alpha) \tag{50}$$

dove γ_r è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio r orientata nel verso antiorario.

Lemma 6.2 *Sia ϕ una funzione continua in*

$$S = \{z \in C \, : \, 0 < |z - a| \leq \bar{r} \, , \quad \alpha \leq arg \; (z - a) \leq \beta \, , \quad \alpha, \beta \in [0, 2\pi]\} \, .$$

Se

$$\lim_{z \to a} (z - a)\phi(z) = \lambda$$

allora

$$\lim_{r \to 0} \int_{+\gamma_r} \phi(z) \, dz = i\lambda(\beta - \alpha) \tag{51}$$

dove γ_r è l'arco di circonferenza, di centro a, raggio r, contenuto in S, orientato in senso antiorario.

Lemma 6.3 *Sia ϕ una funzione continua in*

$$S = \{z \in C \, : \, |z| \geq \bar{r} \, , \quad \alpha \leq arg \; z \leq \beta \, , \quad \alpha, \beta \in [0, \pi]\} \, .$$

Se

$$\lim_{z \to \infty} \phi(z) = 0$$

allora, per $\mu > 0$, si ha

$$\lim_{r \to \infty} \int_{+\gamma_r} e^{i\mu z} \phi(z) \, dz = 0 \, . \tag{52}$$

Esempio 6.1 *Consideriamo la funzione olomorfa*

$$z \neq 0 \longrightarrow \frac{e^{iz}}{z} \, . \tag{53}$$

Se $0 < \varepsilon < \rho$ poniamo

$$T_{\varepsilon,\rho} = \{z \, : \, \varepsilon \leq |z| \leq \rho \, , \quad 0 \leq arg \; z \leq \pi\} \, .$$

Poiché $T_{\varepsilon,\rho}$ è contenuto nel campo di olomorfia della funzione (53), per il teorema 3.2 si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{+\partial T_{\varepsilon,\rho}} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \\ &= \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{ix}}{x} \, dx + \int_{+\gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} \, dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} \, dx + \int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \\ &= \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} \, dx + \int_{+\gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} \, dz + \int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \, . \end{aligned}$$

Per la (51) si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} \, dz = -i\pi \, ;$$

inoltre per la (52) risulta

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{+\gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} \, dz = 0 \, .$$

Si ottiene allora

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} \, dx = 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = i\pi$$

da cui

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \, .$$

Esempio 6.2 *Consideriamo la funzione*

$$f \,:\, z \in C\backslash\{-i, i\} \longrightarrow \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,, \quad a > 0\,.$$

Indichiamo con T_r *il semicerchio di centro l'origine e raggio* $r > 1$*, contenuto nel semipiano delle* y *non negative. Poiché la funzione considerata ha un polo del primo ordine nel punto* i*, per il teorema* 5.1 *si ha*

$$\int_{+\partial T_r} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx + \int_{+\gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\, Res\,(f;i)$$

dove γ_r *è la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio* r *contenuta nel semipiano delle* y *positive. Osservato che, per la* (46)*, si ha*

$$Res\,(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iaz}}{z^2+1} = -i\,\frac{e^{-a}}{2}\,,$$

e che, per la (52)*,*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{+\gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz = 0\,,$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}\,.$$

Esempio 6.3 *Consideriamo la funzione olomorfa*

$$z \in C \longrightarrow e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

Se $\omega > 0$ *sia*

$$T_r = \{z = x+iy \,:\, |x| \le r\,, \quad 0 \le y \le \omega\}\,.$$

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \int_{+\partial T_r} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \int_{-r}^{r} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \int_{-r}^{r} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx \\ &\quad +i\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy - i\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(-r+iy)^2}\,dy\,. \end{aligned}$$

Essendo

$$\left|\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy\right| \le e^{-\frac{r^2}{2}} \int_0^{\omega} e^{\frac{y^2}{2}}\,dy$$

risulta

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy = 0\,;$$

in modo analogo si dimostra che

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(-r+iy)^2}\,dy = 0\,.$$

Abbiamo quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\,.$$