# Analisi Matematica III

a.a. 2015/16

# Indice

# Capitolo 1

# Funzioni olomorfe

## 1.1 Derivabilità nel campo complesso

Sia

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.1}$$

una funzione definita in un aperto $A$ del piano complesso. Si dice che essa è derivabile in $z \in A$ se esiste un elemento $\lambda$ in campo complesso tale che

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lambda\,.$$

Tale limite prende il nome di derivata di $f$ in $z$ e si denota con $f'(z)$.

**Definizione 1.1.1** - *Se $f$ è derivabile in ogni punto di $A$ si dice che $f$ è olomorfa in $A$.*

**Esempio 1.1.1** - *Si ha*

$$(z + \Delta z)^n - z^n = \Delta z[(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}] \tag{1.2}$$

*da cui*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}\,.$$

*Quindi la derivata di $z^n$ è $nz^{n-1}$.*

Esattamente come in campo reale, la derivabilità implica la continuità. Tuttavia la differenziabilità di $f$, in quanto funzione delle due variabili reali $x, y$, non equivale alla sua differenziabilità in quanto funzione della variabile complessa $z$, ovvero alla sua derivabilità rispetto a $z$. Sussistono infatti i seguenti risultati:

**Teorema 1.1.1** - *Se $f$ è olomorfa in $A$ allora le funzioni $u$ e $v$ sono differenziabili. Valgono inoltre le seguenti identità note come equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

**Dim.:** Se $z = x + iy$ dalla definizione di derivata si ha

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{ik}$$

da cui

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

ovvero le (1.3).
Resta da verificare la differenziabilità di $u, v$ ovvero della seguente applicazione del piano in sé

$$F\,:\,(x,y) \longrightarrow (u(x,y), v(x,y))\,. \tag{1.4}$$

Ricordiamo che $F$ è differenziabile se esiste un funzionale lineare $J$ di $R^2$ in sé tale che

$$\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h,y+k) - F(x,y) - J(h,k)\|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{1.5}$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea in $R^2$. Come è noto $J$ si puó rappresentare mediante la matrice

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ & \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Per le (1.3) si ha

$$\begin{aligned} J(h,k) &= \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ & \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \\ k \end{pmatrix} = (u_x h - v_x k, v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + iv_x)(h+ik) = f'(z)\Delta z \end{aligned}$$

dove $\Delta z = h + ik$.
Il numeratore in (1.5) diventa allora

$$|f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z)\Delta z|\,.$$

Dall'olomorfia di $f$ si ha quindi la (1.5). □

**Osservazione 1.1.1** - *Come diretta conseguenza delle* (1.3) *si ha*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'|^2\,. \tag{1.6}$$

*Il determinante a primo membro è lo jacobiano della trasformazione* (1.4).

**Osservazione 1.1.2** - *Dalla dimostrazione del Teorema 1.1.1 si deduce la seguente forma delle* (1.3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Il risultato del teorema 1.1.1 puó essere invertito.

**Teorema 1.1.2** - *Se le funzioni $u, v$ sono differenziabili in $A$ e se valgono le* (1.3) *allora $f$ è olomorfa in $A$.*

**Dim.:** Poiché

$$\begin{aligned} u(x+h,y+k) - u(x,y) &= u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \\ v(x+h,y+k) - v(x,y) &= v_x(x,y)h + v_y(x,y)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \end{aligned}$$

per le (1.3), se $\Delta z = h + ik$, risulta

$$f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|)\,.$$

Pertanto $f$ è olomorfa. $\square$

Un numero complesso $z$ si puó rappresentare anche ricorrendo alle coordinate polari

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \theta = \arg z\,.$$

La funzione arg è una funzione a piú valori che associa ad ogni $z \neq 0$ le determinazioni dell'angolo che il vettore, con estremi l'origine e $z$, forma con il semiasse reale positivo.

**Osservazione 1.1.3** - *Se si interpreta la funzione* (1.1) *come funzione di tali coordinate polari, ovvero se*

$$g(\rho,\theta) = f(\rho e^{i\theta})\,,$$

*le condizioni di Cauchy-Riemann assumono la seguente forma*

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = -\frac{i}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}\,. \tag{1.7}$$

*Si ha inoltre*

$$f'(z) = \frac{\partial g}{\partial \rho} e^{-i\theta}\,. \tag{1.8}$$

**Osservazione 1.1.4** - *Le equazioni di Cauchy-Riemann comportano che una funzione definita in un aperto connesso del piano complesso e a valori reali è olomorfa solo se essa è costante.*

**Esempio 1.1.2** - *Le funzioni*

$$\mathrm{Re}(z)\,, \mathrm{Im}(z)\,, \bar{z}\,, |z|$$

*non sono funzioni olomorfe. Infatti sono funzioni a valori reali e non sono costanti, dunque nessuna di tali funzioni può soddisfare le condizioni* (1.3)*. di Cauchy-Riemann. Infine la funzione*

$$\exp(z^3)$$

*è una funzione olomorfa in* $\mathbb{C}$*.*

## 1.2 Serie di potenze nel campo complesso

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\,. \tag{1.9}$$

L'estremo superiore $r$ dei valori $h$ per cui la serie a termini reali non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, h^n$$

converge è il raggio di convergenza della serie (1.9).

Si puó verificare uno dei seguenti tre casi.

- $r = 0$

  La serie (1.9) converge solo per $z = a$.

- $r \in R^+$

  La serie (1.9) converge assolutamente in tutti i punti appartenenti al cerchio aperto del piano complesso di centro $a$ e raggio $r$ e non converge nei punti esterni a tale cerchio. La convergenza è uniforme in ogni cerchio di centro $a$ e raggio strettamente minore di $r$.

- $r = +\infty$

  La serie (1.9) converge assolutamente per ogni valore di $z$. La convergenza è uniforme in tutti gli insiemi limitati.

Per il calcolo del raggio di convergenza della serie (1.9) si puó ricorrere alla seguente formula

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{1.10}$$

Se la successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ è regolare allora si ha

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Tale uguaglianza è nota come *criterio di Hadamar* e, nei casi limite, va intesa nel senso che $1/0 = +\infty$ e $1/(+\infty) = 0$.
La serie derivata e la serie primitiva di (1.9) hanno lo stesso raggio di convergenza della serie stessa. Inoltre vale il seguente risultato.

**Teorema 1.2.1** - *La somma $f$ della somma della serie di potenze* (1.9) *è olomorfa e si ha*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-a)^{n-1}\,. \tag{1.11}$$

**Dim.:** Per semplicità poniamo $a = 0$. Come detto precedentemente, è possibile dimostrare, usando la (1.10), che la serie (1.11) ha lo stesso raggio di convergenza $r$ della serie (1.9). Si ha quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\, h^{n-1} < +\infty$$

per ogni $h \in [0, r[$.
Fissato $z$ con $|z| < r$, consideriamo un incremento $\Delta z$ tale che $|z + \Delta z| < r_0$ con $r_0 < r$. Si ha

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(z+\Delta z)^n - z^n]$$

da cui, per la (1.2),

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}]\,. \tag{1.12}$$

Essendo

$$|a_n[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}]| \leq n|a_n| r_0^{n-1}$$

la serie a secondo membro di (1.12) si maggiora con una serie numerica convergente in quanto $r_0 < r$. Essa allora converge totalmente e, quindi, uniformemente. Si puó allora passare al limite sotto il segno di serie ottenendo in tal modo la (1.11). □

In definitiva una funzione $f$ che è somma di una serie di potenze è olomorfa. Essa dicesi anche analitica. Vedremo piú avanti che analiticità è sinonimo di olomorfia.

Inoltre è possibile verificare che, se $f$ è la somma delle serie (1.9), esiste un legame tra i coefficienti della serie di potenze e la sua somma espresso dalle seguenti eguaglianze

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \forall n \in N\,.$$

In altri termini una serie di potenze coincide con la serie di Taylor della sua somma

**Esempio 1.2.1** *La serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

*é una serie di potenze, che, per il criterio di Hadamar, ha raggio di convergenza 1 e, dunque, cerchio di convergenza il cerchio di centro* $z = 0$ *e raggio 1. Si può dimostrare che la sua somma è in tale cerchio la funzione* $\frac{1}{1-z}$*, ovvero*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \qquad |z| < 1\,.$$

## 1.3 Le funzioni elementari nel campo complesso

Consideriamo la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.13}$$

con $z = x + i\,y = \Re(z) + i\,\Im(z)$ numero complesso. Tale serie converge su tutto il campo complesso ed ha per somma $e^x = \exp x$ se $z = x = \Re(z)$.
Ció suggerisce la seguente posizione che estende la funzione esponenziale a tutto il campo complesso

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{1.14}$$

La (1.14) si giustifica, oltre che per la ragione appena esposta, anche per il fatto che tale funzione eredita tutte le proprietà formali della funzione esponenziale nel campo reale.
A titolo esemplificativo dimostriamo che

$$e^{z+w} = e^z e^w\,. \tag{1.15}$$

Per dimostrare la (1.15) è necessario richiamare alcuni risultati.

**Proposizione 1.3.1** - *Se* $\{a_n\}$ *è una successione regolare allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\,.$$

**Proposizione 1.3.2** - *Se le successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *convergono, rispettivamente, ad* $a$ *e* $b$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n}{n} = a\,b\,. \tag{1.16}$$

**Dim.:** Si ha

$$\frac{a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\, b + \frac{a_1(b_n - y) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n}\,. \tag{1.17}$$

Per la proposizione 1.3.1 il primo termine a secondo membro nella (1.17) ha per limite $ab$. Inoltre, posto $A = \sup_n |a_n|$, risulta

$$\left| \frac{a_n(b_1 - b) + \cdots + a_1(b_n - b)}{n} \right| \leq A \, \frac{|b_1 - b| + \cdots + |b_n - b|}{n} \, .$$

Quindi, sempre per la proposizione 1.3.1, l'ultimo termine in (1.17) è infinitesimo. Si è ottenuto in tal modo la (1.16). □

Ricordiamo ora che per prodotto secondo Cauchy di due serie di termini generali $a_n$ e $b_n$ si intende la serie il cui termine generale è

$$c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \, . \tag{1.18}$$

Per tale serie sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 1.3.3** - *Se le serie di termini generali $a_n$ e $b_n$ sono assolutamente convergenti tale è anche la serie prodotto secondo Cauchy e si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \, . \tag{1.19}$$

**Dim.:** L'assoluta convergenza della serie prodotto secondo Cauchy discende dalla disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k| \right) \left( \sum_{k=1}^{n} |b_k| \right) \, .$$

Siano $A_n$, $B_n$, $C_n$ le somme parziali delle serie di termini generali $a_k$, $b_k$, $c_k$. Si ha

$$C_n = a_1 B_n + \cdots + a_n B_1$$

e quindi

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_n B_1 + \cdots + A_1 B_n}{n} \, .$$

Pertanto per la proposizione 1.3.1 e per la (1.16) si ha

$$\lim_{n \to \infty} C_n = \lim_{n \to \infty} \frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \lim_{n \to \infty} A_n \lim_{n \to \infty} B_n$$

ovvero la (1.19). □

Procediamo ora alla verifica della (1.15).
Utilizzando la (1.19) si ha

$$\begin{aligned} e^z \, e^w &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w} \, . \end{aligned}$$

Poniamo $z = iy$ nella (1.14). Per l'assoluta convergenza di tale serie è possibile riordinarne i termini senza che la sua somma cambi. Si ottiene allora la seguente relazione

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y\,. \end{aligned}$$

Da tale formula e dalla (1.15) si ha

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

da cui le formule di Eulero

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\,.$$

Si verifica facilmente che la funzione esponenziale in campo complesso è una funzione periodica di periodo $2\pi i$, ovvero

$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Inoltre, derivando termine a termine la serie (7.25), si ricava che la funzione esponenziale è una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ e

$$\frac{de^z}{dz} = e^z\,.$$

Le formule di Eulero suggeriscono le seguenti estensioni al campo complesso delle funzioni trigonometriche seno e coseno

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.20}$$

che in modo ovvio si traducono nei seguenti sviluppi notevoli

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,. \end{aligned}$$

Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono funzioni periodiche di periodo reale $2\pi$ e non sono limitate lungo le rette parallele all'asse immaginario. Infatti come è facile verificare

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

Tale uguaglianza implica anche che la funzione $\sin z$ in campo complesso si annulla solo pe i valori reali $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

## 1.4 Il teorema di Cauchy

Consideriamo la curva generalmente regolare del piano complesso

$$\gamma\,:\, t \in [t_1, t_2] \longrightarrow \gamma(t) = x(t) + i\,y(t) \tag{1.21}$$

orientata in modo che l'orientamento fissato come positivo corrisponda a quello delle $t$ crescenti. Se il suo sostegno è contenuto nell'aperto $A$ in cui è definita una funzione continua $f$, per integrale di $f$ esteso a $+\gamma$ si intende

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\,. \tag{1.22}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} f(z)\,dz &= \int_{t_1}^{t_2} [u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))]\,[x'(t) + i\,y'(t)]\;dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\;dt \\
&+ \; i\int_{t_1}^{t_2} [u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)]\;dt \\
&= \int_{+\gamma} u\,dx - v\,dy \,+\, i\int_{+\gamma} v\,dx + u\,dy\,.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale curvilineo (1.22) viene ad esprimersi mediante integrali delle due forme differenziali

$$u\,dx - v\,dy \qquad v\,dx + u\,dy\,. \tag{1.23}$$

Se $f$ è olomorfa le (1.23) sono chiuse per le (1.3).
Valgono alcune proprietà dell'integrale.

**Definizione 1.4.1** - *Si dice che una funzione olomorfa $F$ è una primitiva di $f$ se $F' = f$.*

**Osservazione 1.4.1** - *Se $F, G$ sono due primitive di $f$ in un aperto connesso allora $F$ e $G$ differiscono per una costante. Si osservi inoltre che funzioni $f$ continue non sono dotate di primitive.*

Se $f$ ammette una primitiva $F$ in un aperto connesso, usando la definizione di primitiva e la regola di derivazione di funzioni composte, si dimostra la seguente formula

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{1.24}$$

dove $\gamma$ è una curva generalmente regolare, di estremi $z_1$ e $z_2$, orientata nel verso che va dal primo al secondo punto. Se $\gamma$ è chiusa allora il primo membre di (1.24) è nullo.
Più in generale vale il Teorema di Chauchy, al quale premettiamo alcuni richiami sulla nozione di omotopia e su quella di connessione semplice.

Siano $\gamma_0$ e $\gamma_1$ due curve regolari di estremi $z_0$ e $z_1$ contenute in un aperto $A$. Possiamo assumere che per esse siano fissate due rappresentazioni con parametri che variano in $[0,1]$.
Tali due curve si dicono omotope in $A$ se esiste un'applicazione sufficientemente regolare

$$(t,\tau) \in [0,1]\times[0,1] \longrightarrow H(t,\tau) \in A \tag{1.25}$$

tale che, per ogni $t \in [0,1]$,

$$\begin{cases} H(t,0) &= \gamma_0(t) \\ H(t,1) &= \gamma_1(t) \end{cases} \tag{1.26}$$

e, per ogni $\tau \in [0,1]$,

$$H(0,\tau) = z_0 \quad H(1,\tau) = z_1 \,. \tag{1.27}$$

Posto

$$\gamma_\tau \,:\, t \in [0,1] \longrightarrow H(t,\tau)$$

la (1.25), al variare del parametro $\tau$, descrive il moto della curva $\gamma_\tau$, di estremi $z_0$ e $z_1$ per la (1.27), che, per le (1.26), all'istante iniziale $t=0$ coincide con $\gamma_0$ e all'istante finale $t=1$ con $\gamma_1$. In definitiva la curva $\gamma_0$ subisce una deformazione che con continuità la trasforma in $\gamma_1$ senza che, durante tale processo, si esca dall'insieme a $A$.

**Definizione 1.4.2** - *Si dice che $A$ è semplicemente connesso se comunque si prendano due curve in $A$ con gli stessi estremi esse sono omotope.*

Vale il seguente teorema

**Teorema 1.4.1 (Teorema di Cauchy)** - *Sia $f$ una funzione olomorfa in un aperto $A$ semplicemente connesso e sia $\gamma$ una curva generalmente regolare chiusa contenuta in $A$. Sussiste allora la seguente eguaglianza*

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz = 0\,. \tag{1.28}$$

Assumiamo per il momento che $f'$ sia continua ovvero che siano continue le derivate parziali prime di $u$ e $v$. Allora, $\gamma$ è una curva chiusa contenuta in $A$ e se tale curva è la frontiera di un dominio contenuto in $A$ allora, utilizzando le formule di Gauss-Green, si puó concludere che

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D} f(z)\,dz &= \int_{+\partial D} u\,dx - v\,dy \,+\, i\int_{+\partial D} v\,dx + u\,dy \\ &= -\int_D (u_y + v_x)\,dxdy + i\int_D (-v_y + u_x)\,dxdy\end{aligned}$$

da cui, per le (1.3), segue la (1.28).
La dimostrazione del Teorema di Cauchy prescinde da ogni ipotesi di regolarità su $f'$. A tal scopo facciamo alcune premesse.
La dimostrazione del Teorema di Cauchy prevede vari passi.

**Lemma 1.4.1** - *Se $f$ è olomorfa in un cerchio $C$ allora*

$$\int_{+T} f(z)\,dz = 0 \tag{1.29}$$

*dove $T$ è un triangolo contenuto in $C$ orientato in senso antiorario.*

**Dim.:** Indichiamo rispettivamente con $d$ e $p$ il diametro e il perimetro di $T$. Consideriamo i quattro triangoli $T_1, T_2, T_3, T_4$, tutti simili a $T$, ottenuti collegando i punti medi dei lati di $T$. Si ha ovviamente

$$\int_{+T} f\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{+T_i} f\,dz$$

e quindi

$$\left|\int_{+T} f\,dz\right| \le \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{+T_i} f\,dz\right| \,.$$

È possibile scegliere uno dei triangoli $T_i$, che denotiamo con $T^{(1)}$, tale che

$$\left|\int_{+T} f\,dz\right| \le 4\left|\int_{+T^{(1)}} f\,dz\right| .$$

Se $d^{(1)}$ e $p^{(1)}$ sono rispettivamente il diametro e il perimetro di $T^{(1)}$ si ha $d^{(1)} = 2^{-1}d$ e $p^{(1)} = 2^{-1}p$. Ripetiamo tale procedura a partire da $T^{(1)}$. Si individua un secondo triangolo $T^{(2)}$, il cui diametro e il cui perimetro sono la quarta parte del diametro e del perimetro di $T$, per il quale si ha

$$\left|\int_{+T^{(1)}} f\,dz\right| \le 4\left|\int_{+T^{(2)}} f\,dz\right|$$

e quindi

$$\left|\int_{+T} f\,dz\right| \le 4^2\left|\int_{+T^{(2)}} f\,dz\right| .$$

Si viene a determinare in tal modo una successione decrescente di triangoli $\{T^{(n)}\}$, con diametri $d^{(n)} = 2^{-n}d$ e perimetri $p^{(n)} = 2^{-n}p$, tali che

$$\left|\int_{+T} f\,dz\right| \le 4^n\left|\int_{+T^{(n)}} f\,dz\right| . \tag{1.30}$$

L'intersezione di tali triangoli è un insieme chiuso non vuoto. Poiché la successione dei diametri di tali triangoli tende a zero tale intersezione si riduce da un unico punto $z_0 \in A$.
Essendo $f$ derivabile in $z_0$ si ha

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$$

con $\varepsilon(z)$ infinitesima per $z$ che tende a $z_0$.
La funzione

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

è olomorfa e ha derivata continua. Pertanto si ha

$$\int_{+T^{(n)}} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)]\,dz = 0\,.$$

Risulta allora

$$\int_{+T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{+T^{(n)}} \varepsilon(z)(z - z_0)\,dz\,. \tag{1.31}$$

Fissato $\sigma$ si determini $\delta$ in modo tale che $|\varepsilon(z)| < \sigma$ se $|z - z_0| < \delta$.
Si scelga $n$ in modo che il triangolo $T^{(n)}$ sia contenuto nel cerchio di centro $z_0$ e raggio $\delta$. Dalla (1.31) si ha

$$\left|\int_{+T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \le \sigma \int_{T^{(n)}} |z - z_0|\,ds \le \sigma d^{(n)}p^{(n)} = \sigma 4^{-n} d\,p\,.$$

In definitiva, ricordando la (1.30), abbiamo

$$\left|\int_{+T} f(z)\,dz\right| \le \sigma d\,p$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\sigma$, la (1.29). □

Ovviamente la formula (1.28) puó essere estesa al caso in cui la curva $\gamma$ sia un poligono. In tal caso infatti l'integrale curvilineo si puó scrivere come somma di integrali estesi a triangoli. Ció comporta

che l'integrale di $f$ esteso ad una qualsiasi poligonale contenuta in $C$ dipende esclusivamente dagli estremi di tale poligonale e dal verso di percorrenza. Tale considerazione è decisiva per a quanto riguarda la possibilità di costruire una primitiva in $C$ di $f$.
La primitiva si costruisce in modo standard definendo dapprima la funzione $F(z)$ come il valore che assume l'integrale di $f$ esteso ad una qualsiasi poligonale che colleghi un punto fissato, per esempio il centro di $C$, con $z$ e poi verificando che la sua derivata è $f$.
Se $\gamma$ è chiusa, dalla (1.24) si ottiene la (1.28). In tal modo risulta provato il teorema 1.4.1 nel caso in cui l'aperto $A$ sia un cerchio.

**Lemma 1.4.2** - *Se $\gamma_0$ e $\gamma_1$ sono due curve regolari omotope in $A$ si ha*

$$\int_{+\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{+\gamma_1} f(z)\,dz\,. \tag{1.32}$$

**Dim.:** L'applicazione (1.25), in quanto continua, trasforma il quadrato $[0,1]^2$ in un compatto la cui distanza dalla frontiera di $A$ è positiva.
Fissato $\varepsilon$ è allora possibile determinare $\delta$ in modo tale che

$$|H(t,\tau') - H(t,\tau'')| = |\gamma_{\tau'}(t) - \gamma_{\tau''}(t)| < \varepsilon$$

per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $\tau', \tau''$ con $|\tau' - \tau''| < \delta$.
Ricopriamo il compatto immagine tramite $H$ dell'insieme $[0,1] \times [\tau', \tau'']$ con un numero finito di cerchi $C_1, C_2, \cdots, C_n$, per esempio di raggio $2\varepsilon$, il primo contenente $\alpha$, l'ultimo $\beta$, tali che l'intersezione di $C_i$ e $C_{i+1}$ sia non vuota. È possibile sempre scegliere $\varepsilon$ in modo che ciascun cerchio sia contenuto in $A$. Sia $F_1$ la primitiva di $f$ in $C_1$ e $F_2$ quella in $C_2$. Ovviamente, a patto di aggiungere a $F_2$ una costante, possiamo sempre fare in modo che $F_1$ coincida con $F_2$ nell'intersezione di $C_1$ e $C_2$. Procedendo in tal modo definiamo una primitiva di $f$ nell'unione dei cerchi $C_i$. Allora per la (1.24)

$$\int_{+\gamma_{\tau'}} f(z)\,dz = \int_{+\gamma_{\tau''}} f(z)\,dz\,. \tag{1.33}$$

Decomponiamo l'intervallo $[0,1]$ mediante i punti $\tau_i$ scelti in modo tale che sia

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{k-1} < \tau_k = 1$$

e che ogni intervallo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ abbia un'ampiezza minore di $\delta$. Per la (1.33) si ha

$$\int_{+\gamma_{\tau_i}} f(z)\,dz = \int_{+\gamma_{\tau_{i+1}}} f(z)\,dz$$

per ogni $i$. Ció implica la (1.32). □

Come conseguenza del lemma 1.4.2 si ha il seguente risultato.

**Teorema 1.4.2** - *Sia $f$ olomorfa in un insieme semplicemente connesso. Allora $f$ è ivi dotata di primitiva.*

Dal teorema 1.4.2 discende in modo ovvio il teorema di Cauchy 1.4.1.

## 1.5 La funzione logaritmo

Essendo

$$z = |z|e^{i \arg z} = e^{\log|z| + i \arg z}$$

i numeri complessi $w = \log z + i \arg z$ sono le uniche soluzioni dell'equazione $e^w = z$. In analogia con la terminologia usata nel campo reale si definisce il logaritmo in ambito complesso come la funzione a piú valori

$$\log z = \log |z| + i \arg z\,. \tag{1.34}$$

Fissiamone la determinazione corrispondente ai valori dell'argomento di $z$ appartenenti all'intervallo $]-\pi, \pi[$. Usando le condizioni di Cauchy-Riemann (1.7) si puó verificare che tale funzione è olomorfa. Inoltre, per la (1.8) abbiamo

$$(\log z)' = \frac{1}{z}\,.$$

Ovviamente è sempre possibile scegliere differenti intervalli di variabilità dell'argomento di $z$. Si ottiene ancora una funzione olomorfa. La funzione logaritmo rappresenta un primo esempio di funzione olomorfa a piú valori o, anche, polidroma. Con la procedura sopra descritta siamo quindi in grado di costruire una determinazione del logaritmo, cioè una funzione che sia univoca ed olomorfa. Ciascuna di tali determinazioni prende il nome di ramo della funzione logaritmo. Il logaritmo presenta infiniti rami; si passa da uno all'altro facendo variare con continuità i valori della funzione per esempio lungo una circonferenza con centro nell'origine. Tale punto prende il nome di punto di diramazione ed è un punto singolare per la funzione logaritmo.

La procedura puó essere affinata e precisata. Sussiste infatti il seguente risultato.

**Proposizione 1.5.1** - *Sia $A$ è un insieme semplicemente connesso del piano complesso tale che $0 \notin A$. Se per esempio $1 \in A$ è possibile definire in $A$ un ramo della funzione* (1.34) *che si annulla in* 1*.*

**Dim.:** Per il teorema 1.4.2 la funzione $f(z) = 1/z$ ha una primitiva $F$ che si annulla in 1. Questa si costruisce attribuendo a $z \in A$ il valore dell'integrale di $f$ esteso ad una qualsiasi curva di estremi 1 e $z$. Per verificare che si tratta di un ramo della funzione logaritmo basta osservare che

$$(z \exp(-F(z)))' = 0$$

da cui $\exp(F(z)) = z$. □

Per completezza riportiamo la seguente generalizzazione della precedente proposizione.

**Proposizione 1.5.2** - *Sia $f$ una funzione olomorfa e priva di zeri in un aperto semplicemente connesso $A$. Allora esiste una funzione $g$ olomorfa in $A$ tale che $f = \exp g$.*

**Dim.:** Fissato un punto $z_0 \in A$, se $z \in A$ consideriamo una curva $\gamma$, contenuta in $A$, che unisce $z_0$ e $z$ e orientata nel verso che va da $z_0$ a $z$. Poiché $A$ è semplicemente connesso e $f$ è diversa da zero ha senso definire la funzione

$$g(z) = \int_{+\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw + c_0$$

con $c_0$ costante che determineremo successivamente.
Essendo

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

si ha

$$(f(z)\exp(-g(z)))' = 0\,.$$

Esiste quindi una costante $c$ tale che

$$f(z) = c\,\exp(g(z))\,.$$

Essendo $g(z_0) = 0$ si ha

$$f(z_0) = c \exp c_0 \, .$$

Ora scegliamo $c_0$ in modo tale che sia $\exp c_0 = f(z_0)$. Si ha $c = 1$ e quindi $f = \exp g$. Ovviamente $g$ è da intendersi come un ramo della funzione polidroma $\log f$. □

## 1.6 Le funzioni elementari nel campo complesso

Attraverso la funzione logaritmo è possibile definire nel campo complesso la funzione potenza. Fissato un numero reale $\alpha$ si ha

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = |z|^\alpha e^{i(\alpha \arg z)} = |z|^\alpha e^{i(\alpha \operatorname{Arg} z)} e^{i(2\alpha\pi)} \, . \tag{1.35}$$

Se $\alpha$ è irrazionale la funzione presenta una infinità numerabile di rami. Se invece $\alpha = m/n$ è razionale, ma non intero allora la funzione (1.35) ha esattamente $n$ rami.
Per fissare una determinazione si puó operare un taglio nel piano complesso escludendo i punti appartenenti ad una semiretta uscente dall'origine quale per esempio la semiretta dei reali negativi. Se si conviene di scegliere in (1.35) come argomento di $z$ i valori angolari compresi nell'intervallo $]-\pi, \pi[$ allora resta fissato il ramo la cui restrizione al semiasse reale positivo restituisce la funzione potenza ad esponente $\alpha$ del campo reale.
Sia $\alpha = 1/2$. La funzione radice ha due rami. Se poniamo $\rho = |z|$ e $\theta \in ]-\pi, \pi[$ indica l'argomento principale di $z$ si ha

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \, .$$

La restrizione al semiasse reale positivo dà la funzione radice quadrata nel campo reale.

Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche dalla prima delle (1.20) si ottiene la seguente espressione per la funzione seno

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \, \cos x \sinh y \, .$$

Da tale formula si deduce che la funzione seno si annulla solo per $z = k\pi$ con $k$ relativo, che essa è periodica di periodo $2\pi$ e che, contrariamente a quanto si verifica in campo reale, essa non è limitata.
Analoghe considerazioni possono essere fatte per la funzione coseno.

Soffermiamoci ora sulla estensione al campo complesso della funzione inversa arcoseno.
A tal fine consideriamo l'equazione nell'incognita $w$

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \, .$$

Si ha

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} = f(z) \, .$$

La funzione $f$ è una funzione polidroma a due rami con $-1$ e $1$ punti di diramazione. Per fissare un ramo di tale funzione polidroma bisogna effettuare quindi dei tagli in modo da escludere la possibilità che una curva chiusa possa avvolgersi attorno ad uno di questi punti. Ció si realizza per esempio escludendo i punti dell'asse reale appartenenti a $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$. Si ottiene in tal modo un insieme semplicemente connesso. Se si tiene conto che $f$ non si annulla è possibile applicare la proposizione 1.5.2. Esiste quindi una funzione $g$ tale che $\exp g = f$. Se si sceglie $g$ in modo tale che $g(0) = 0$ si ha

$$w = \frac{1}{i}\, g(z) = \arcsin z = \frac{1}{i} \log \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \, .$$

Si verifica facilmente che
$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,.$$
Seguiamo la stessa procedura per introdurre la funzione arcotangente a partire dalla funzione tangente.
Consideriamo l'equazione in $w$
$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}\,.$$
Si ha allora
$$e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z}\,. \tag{1.36}$$
Se eliminiamo dal piano complesso le semirette dell'asse immaginario $\Im(z) \geq 1$ e $\Im(z) \leq -1$ otteniamo un insieme semplicemente connesso in cui la funzione a secondo membro in (1.36) non si annulla. Per la proposizione 1.5.2 è possibile allora definire la funzione
$$\arctan z = \frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}\,.$$
Ovviamente anche in questo caso abbiamo costruito una funzione polidroma. È possibile selezionare un ramo la cui restrizione all'asse delle $x$ restituisce l'ordinaria funzione arcotangente nel campo reale.
Anche in questo caso si puó dimostrare che
$$(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}\,.$$
Da osservare che alla stessa funzione si perviene determinando nell'insieme semplicemente connesso sopra descritto una primitiva della funzione $(1+z^2)^{-1}$.

## 1.7 Analiticità

L'obiettivo di tale paragrafo è invertire il risultato del teorema 1.2.1, far vedere cioè che se una funzione è olomorfa in un aperto $A$, allora, comunque si fissi un punto $z_0$ in $A$, essa è somma di una serie di potenze di punto iniziale $z_0$.
A tal fine lo strumento essenziale è costituito dal seguente risultato.

**Teorema 1.7.1 (Formula integrale di Cauchy)** - *Sia $f$ una funzione olomorfa in $A$, aperto semplicemente connesso, e sia $\gamma$ una circonferenza contenuta in $A$ orientata in senso antiorario. Per ogni $z$ interno a $\gamma$ si ha*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\,. \tag{1.37}$$

**Dim.:** La funzione sotto il segno di integrale in (1.37) risulta olomorfa in un insieme che non è semplicemente connesso. Scegliamo $\varepsilon$ in modo tale la circonferenza $\gamma_\varepsilon$ di centro $z$ e raggio $\varepsilon$ sia interna a $\gamma$. Consideriamo inoltre un settore angolare con vertice in $z$ e apertura $\sigma$ e la curva chiusa $C_{\varepsilon,\sigma}$, opportunamente orientata, costituita dalle circonferenze $\gamma$ e $\gamma_\varepsilon$ private degli archi intercettati dal settore e da due segmenti appartenenti alle rette che delimitano il settore stesso. Tale curva è la frontiera di un dominio semplicemente connesso. Per il teorema di Cauchy si ha
$$\int_{+C_{\varepsilon,\sigma}}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 0\,.$$

Facendo tendere $\sigma$ a zero, tenendo conto che i contributi dell'integrale curvilineo sui due segmenti tendono, per questioni di continuità, a compensarsi l'un l'altro, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \int_{+\gamma_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\,. \tag{1.38}$$

Poiché

$$\int_{+\gamma_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = i\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\,, \tag{1.39}$$

per la continuità di $f$, abbiamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi f(z)\,. \tag{1.40}$$

Dalle (1.38), (1.39), (1.40) si ottiene la formula (1.37). □

Nella (1.37) la circonferenza $\gamma$ puó essere sostituita dalla frontiera di dominio $D$ contenuto in $A$. Si ha allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} f(z) & \text{se } z\in D\backslash\partial D \\ 0 & \text{se } z\in A\backslash D\,. \end{cases}$$

Da tale formula si deduce che i valori assunti da una funzione olomorfa all'interno di un dominio regolare sono determinati in modo univoco dai valori che essa assume sul bordo. Tale proprietà marca una ulteriore significativa differenza tra le funzioni derivabili nel campo reale e quelle derivabili nel campo complesso.

Una importante conseguenza della formula integrale di Cauchy è costituita dal seguente risultato che caratterizza le funzioni olomorfe come funzioni analitiche.

**Teorema 1.7.2** - *Sia $f$ olomorfa in un aperto $A$. Allora per ogni $a\in A$ la funzione $f$ è somma di una serie di potenze di punto iniziale $a$ il cui raggio di convergenza è non inferiore alla distanza di $a$ da $\partial A$.*

**Dim.:** Sia $\gamma_r$ la circonferenza di centro $a$ e raggio $r$ piú piccolo della distanza di $a$ da $\partial A$. Per la (1.37) si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \tag{1.41}$$

per ogni $z$ interno a $\gamma_r$.
Fissato $\bar r < r$, se $|z-a| < \bar r$ e $\xi$ varia su $\gamma_r$ si ha

$$\left|\frac{z-a}{\xi - a}\right| \le \frac{\bar r}{r} < 1\,. \tag{1.42}$$

Essendo

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$$

risulta

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}f(\xi)\,. \tag{1.43}$$

Essendo $f$ limitata nell'intorno sferico di centro $a$ e raggio $r$ la serie a secondo membro in (1.43), per la (1.42), si maggiora con una serie geometrica convergente. Quindi tale serie è totalmente convergente.
Dalle (1.41) e (1.43), integrando termine a termine, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{+\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

ovvero

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{1.44}$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \, . \tag{1.45}$$

□

Una conseguenza immediata del teorema 1.7.2 è costituita dal seguente risultato.

**Teorema 1.7.3 (Teorema di Goursat)** - *La derivata di una funzione olomorfa è a sua volta olomorfa.*

Avendo riconosciuto che le funzioni olomorfe hanno derivate continue è possibile riprendere le stesse argomentazioni poste a premessa dell'enunciato del teorema di Cauchy e affermare quanto segue.

**Teorema 1.7.4** - *Sia $f$ olomorfa in un aperto $A$ e sia $D$ un dominio a frontiera regolare contenuto in $A$. Allora*

$$\int_{+\partial D} f(z) \, dz = 0 \, .$$

Il seguente risultato inverte il teorema di Cauchy.

**Teorema 1.7.5 (Teorema di Morera)** - *Sia $f$ una funziona continua in un un cerchio aperto $C$. Se per ogni triangolo $T$ contenuto in $C$ si ha*

$$\int_{+T} f(z) dz = 0 \tag{1.46}$$

*allora $f$ è olomorfa in $C$.*

**Dim.:** L'ipotesi (1.46) assicura che $f$ è dotata di una primitiva. La funzione $f$ in quanto derivata di una funzione olomorfa è essa stessa olomorfa per il teorema 1.7.3. □

Ovviamente il teorema 1.7.2 comporta che una funzione olomorfa ha derivate di qualsiasi ordine. Pertanto sia la sua parte reale $u$ che il coefficiente $v$ dell'immaginario sono di classe $C^\infty$.
Derivando la prima delle equazioni di Cauchy-Riemann (1.3) rispetto alla variabile $x$ e la seconda rispetto a $y$ si ottiene

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \, .$$

In modo analogo si prova che

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \, .$$

Quindi le funzioni $u, v$ sono armoniche.
È possibile dimostrare che una qualsiasi funzione armonica, sotto opportune condizioni sul suo insieme di definizione, è la parte reale di una funzione olomorfa.

**Proposizione 1.7.1** - *Se $u$ è armonica in un aperto semplicemente connesso $A$ allora è possibile definire una ulteriore funzione armonica $v$ tale che*

$$f(x+i\,y) = u(x,y) + v(x,y) \tag{1.47}$$

*è olomorfa in $A$.*

**Dim.:** La forma differenziale

$$\omega = -u_y\,dx + u_x\,dy$$

è chiusa e, quindi, per l'ipotesi di semplice connessione di $A$, esatta. Sia $v$ la primitiva di $\omega$. Allora la funzione (1.47) è olomorfa in quanto $u$, $v$ verificano le condizioni di Cauchy-Riemann. □

**Teorema 1.7.6 (Proprietà di media)** - *Se $f$ è olomorfa in un aperto $A$ e se il cerchio di centro $a$ e raggio $r$, la cui frontiera è la circonferenza $\gamma_r$, è contenuto in $A$ si ha*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\gamma_r} f(z)\,ds\,. \tag{1.48}$$

**Dim.:** Dalla (1.45) si ha

$$a_0 = f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

da cui la (1.48) □

Se $u$ è la parte reale di $f$ dalla (1.48) si ha

$$u(a) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\gamma_r} u(z)\,ds\,. \tag{1.49}$$

Le (1.48) e (1.49) assicurano che il valore di una funzione olomorfa o di una funzione armonica in un punto $a$ è il valore medio della funzione su una qualsiasi circonferenza con centro in quel punto.

**Teorema 1.7.7** - *Sia $f$ una funzione olomorfe in un aperto connesso $A$. Se in un punto $a \in A$ la funzione si annulla con tutte le sue derivate allora $f$ è identicamente nulla.*

**Dim.:** Indichiamo con $B$ l'insieme dei punti di $A$ in cui $f$ si annulla con tutte le sue derivate. Per il teorema 1.7.2 la funzione è identicamente nulla in tutto un intorno di $a$. Quindi $B$ è aperto. Se un punto non appartiene a $B$ almeno una delle derivate di $f$ è diversa da zero in tale punto e quindi, per questioni di continuità in un intorno del punto. Allora anche il complementare di $B$ è un aperto. Essendo $A$ connesso ció implica che $B$ deve coincidere con $A$. □

La sviluppabilità in serie di Taylor di $f$ comporta che per il coefficiente (1.45) si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,, \tag{1.50}$$

ovvero

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \tag{1.51}$$

Dalle (1.45) e (1.50) si ottiene allora il seguente risultato.

**Teorema 1.7.8 (Diseguaglianze di Cauchy)** - *Sia $f$ olomorfa in un aperto $A$ e sia $\gamma_r$ la circonferenza, contenuta in $A$ di centro $a$ e raggio $r$. Si ha allora*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{r^n}\sup_{\gamma_r}|f|\,. \tag{1.52}$$

## 1.8 Sviluppi in serie di Laurent

Sia $a$ un punto di un aperto $A$ e sia $f$ olomorfa in $A\backslash\{a\}$. La formula integrale di Cauchy consente di scrivere la funzione $f$ come somma di una serie di potenze di $(z-a)$ ad esponenti interi relativi.

**Teorema 1.8.1** - *Sia $C$ un cerchio di centro $a$ contenuto in $A$. Allora per ogni $z \in C\backslash\{a\}$ sussiste la seguente formula*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \,. \tag{1.53}$$

*nota come come sviluppo in serie di Laurent di $f$ di punto iniziale $a$. I coefficienti di tale sviluppo hanno la seguente espressione*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\,, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.54}$$

*con $\gamma$ circonferenza con centro in $a$ contenuta in $C$.*
*La convergenza della serie* (1.54) *è uniforme in ogni compatto contenuto in $C\backslash\{a\}$.*

*Dim.* Consideriamo la corona circolare $C_{r,R}$ delimitata dalle due circonferenze $\gamma_r, \gamma_R$ di centro $a$ e raggi $r, R$ con $r < R$. Per la (**??**) si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{1.55}$$

per ogni $z$ interno a $C_{r,R}$.
Il primo integrale a secondo membro si tratta come nella dimostrazione del teorema 1.7.2; esso si esprime come una serie di potenze di punto iniziale $a$.
Consideriamo il secondo integrale. Se $\zeta \in \gamma_r$ si ha

$$\left|\frac{\zeta - a}{z-a}\right| = \frac{r}{|z-a|} < 1\,. \tag{1.56}$$

Vale quindi la seguente identità

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a}\ \frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n\,;$$

inoltre, per la (1.56), la convergenza è uniforme al variare di $\zeta$ su $\gamma_r$. Risulta pertanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^n} \int_{\gamma_r} (\zeta-a)^{n-1} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Abbiamo ottenuto quindi la (1.53).
Per quel che riguarda infine le espressioni dei coefficienti $a_n$ basta osservare che gli integrali che compaiono nelle (1.54) sono indipendenti dalla particolare circonferenza $\gamma$ scelta.
Nello sviluppo (1.53) la serie di potenze ad esponenti non negativi prende il nome di parte regolare mentre la serie i cui addendi sono potenze ad esponenti negativi si chiama parte singolare.

Si possono verificare i seguenti casi.

- Lo sviluppo (1.53) si riduce alla sola parte regolare. È allora possibile prolungare per continuità $f$ in $a$ in modo da ottenere una funzione olomorfa anche in $a$. Si parla in tal caso di singolarità eliminabile.

- Nella parte singolare di (1.53) sono presenti solo un numero finito di termini; esiste cioè un intero $m \in \mathbb{N}$ tale che $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ se $n > m$. Si dice allora che $f$ presenta in $a$ un polo di ordine $m$.
- Se esistono infiniti indici negativi $n$ in corrispondenza dei quali i coefficienti (1.54) sono diversi da zero $a$ è una singolarità essenziale.

Per ognuno dei casi sopra descritti si parla di singolarità isolata per la funzione olomorfa $f$.

**Definizione 1.8.1** - *Se nella* (1.44) *i coefficienti $a_n$ sono nulli per $n < m$ e $a_m \neq 0$ si dice che $a$ è uno zero per $f$ di ordine $m$. Si ha allora*

$$f(z) = (z-a)^m f_m(z) \tag{1.57}$$

*con $f_m(a) \neq 0$.*

**Teorema 1.8.2** - *Se $a$ è uno zero di ordine $m$ per $f$ allora esiste un intorno di $a$ in cui $f$ non ha altri zeri.*
*Se in un punto $a$ la funzione $f$ si annulla con tutte le sue derivate, cioè se $a$ è uno zero di ordine infinito, allora $f$ è identicamente nulla.*

*Dim.* La funzione $f_m$, in quanto diversa da zero in $a$, non si annulla in un intorno di $a$; per la (1.57) in tale intorno $f$ si annulla solo in $a$.
Se $f$ e tutte le sue derivate si annullano in un punto $a$ lo sviluppo di Taylor di $f$ di punto iniziale $a$ ha tutti i coefficienti nulli; quindi $f$ è nulla in un intorno di $a$. Pertanto l'insieme dei punti in cui $f$ e tutte le derivate si annullano è un aperto. Tale è ovviamente anche il complementare; questo deve essere vuoto in quanto l'insieme di olomorfia è connesso.

**Osservazione 1.8.1** - *Il teorema* 1.8.2 *implica che gli zeri di una funzione sono punti isolati; essi cioè non possono "addensarsi", ovvero, per meglio dire, essi possono avere punti di accumulazione ma tali punti o devono trovarsi sulla frontiera del dominio di olomorfia o deve essere il punto all'infinito. Una importante conseguenza di ció è che se due funzioni olomorfe coincidono su insiemi chenon sono costutuiti di soli punti isolati esse devono coincidere in tutto l'aperto in cui esse sono definite.*

**Proposizione 1.8.1** - *Se $f$ è limitata in un intorno di $a$ allora $f$ presenta in $a$ una singolarità eliminabile.*

*Dim.* Vale la (1.55). Un semplice calcolo mostra che il secondo integrale è infinitesimo al tendere di $r$ a zero causa la limitatezza di $f$. Si ha quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

per $z \neq a$. La funzione a secondo membro è olomorfa in tutti i punti interni a $\gamma_R$: basta osservare che è possibile derivare sotto il segno di integrale. Quindi essa rappresenta il richiesto prolungamento di $f$ in $a$.

**Proposizione 1.8.2** - *Se $a$ è uno zero di ordine $m$ per $f$ allora $1/f$ ha in $a$ un polo di ordine $m$. Viceversa se $a$ è un polo di ordine $m$ per $f$ la funzione $1/f$ ha in $a$ uno zero di ordine $m$.*

*Dim.* Basta applicare la formula (1.57).

**Proposizione 1.8.3** - *Il punto $a$ è un polo per $f$ se e solo se*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty\,. \tag{1.58}$$

*Dim.* Se $a$ è un polo di ordine $m$ per $f$ si ha

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = a_{-m} \neq 0$$

da cui si ottiene facilmente la (1.58).
Viceversa, se vale la (1.58), la funzione $1/f$ è limitata in un intorno di $a$ ed è anche infinitesima. Per la proposizione 1.8.1 essa deve avere uno zero in $a$; tale punto quindi è un polo per $f$ per la proposizione 1.8.2.

**Esempio 1.8.1** - *Siano $P, Q$ polinomi irriducibili e siano $z_j$ gli zeri di $Q$ ciascuno con molteplicità $m_j$. Allora la funzione razionale $P/Q$ è olomorfa in tutto il piano complesso privato degli zeri di $Q$; in $z_j$ essa presenta un polo di ordine $m_j$ per la proposizione* 1.8.2.

**Teorema 1.8.3** (**Teorema di Casorati-Weierstrass**) - *Se $a$ è una singolarità essenziale per $f$ allora il codominio di $f$ è denso in $\mathbb{C}$.*

*Dim.* Procediamo per assurdo. Esiste allora almeno un punto $w \in \mathbb{C}$ ed un $r > 0$ tale che

$$|f(z) - w| > r$$

per ogni $z$ appartenente al campo di olomorfia di $f$.
La funzione $g(z) = (f(z) - w)^{-1}$ è allora limitata. Per la proposizione 1.8.1 essa è regolare in $a$. Se $g(a) \neq 0$ la funzione $f$ è regolare in $a$; se invece $g(a) = 0$, per la proposizione 1.8.2 la funzione $f - w$ e quindi $f$, presenta in $a$ un polo. In ogni caso si perviene ad un assurdo.

**Esempio 1.8.2** - *Sussiste il seguente sviluppo di Laurent*

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\,.$$

*Lo zero quindi è una singolarità essenziale per la funzione considerata. Si verifica facilmente che il condominio della funzione è $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

**Esempio 1.8.3** - *Ricordando la somma della serie geometrica, sussistono i seguenti sviluppi di Laurent*

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{z}\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n z^{n+1}\,, 0 < |z| < 1\,.$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-2}\,, |z| > 1\,.$$

Lo sviluppo in serie di Laurent puó essere utilizzato per classificare il comportamento all'infinito di una funzione olomorfa.
Sia $f$ olomorfa nel complementare di un cerchio. La funzione

$$g\,:\,\zeta \neq 0 \longrightarrow g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

è allora olomorfa in un intorno circolare dell'origine privato dell'origine stessa. Sviluppiamo $g$ in serie di Laurent

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n\,.$$

Allora per $f$ si ottiene il seguente sviluppo in un intorno del punto all'infinito

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{-n} z^n \,. \tag{1.59}$$

Tale sviluppo consente di classificare il tipo di singolarità del punto all'infinito attribuendo ad esso lo stesso tipo di singolarità che $g$ ha in zero. A tale proposito è utile sottolineare che il punto all'infinito è regolare per $f$ se nello sviluppo (1.59) compaiono solo termini con potenze ad esponente non positivo. Pertanto il punto all'infinito è regolare per la funzione dell'esempio 1.8.3.

## 1.9 Il teorema dei residui

Tra tutti i coefficienti (1.54) un ruolo importante è assunto da

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} f(\xi)\, d\xi = \mathrm{Res}\ (f; a) \tag{1.60}$$

noto come residuo di $f$ in $a$.
È possibile definire il residuo all'infinito nel modo seguente

$$\mathrm{Res}\ (f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_r} f(z)\, dz \,. \tag{1.61}$$

Ovviamente nella (1.61) $\gamma_r$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio $r$ e si assume che $f$ sia olomorfa in ogni punto ad essa esterno.
In analogia con quanto fatto per le singolarità al finito, è possibile mettere in relazione tale residuo con un opportuno coefficiente dello sviluppo (1.59).
Poiché è possibile integrare termine a termine la serie (1.59), essendo

$$\int_{-\gamma_r} z^k\, dz = 0 \,, \quad k \neq -1$$

nonché

$$\int_{-\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz = -2\pi i \,,$$

si ha

$$\mathrm{Res}\ (f; \infty) = -a_1 \,. \tag{1.62}$$

Contrariamente al caso dei punti al finito per il punto all'infinito il residuo puó essere non nullo pur essendo $f$ regolare all'infinito.

Dimostriamo ora il seguente risultato.

**Teorema 1.9.1 (Teorema dei Residui)** - *Sia $f$ olomorfa in $A \backslash \{z_1, \cdots, z_n\}$ e sia $D$ un dominio regolare e limitato contenuto in $A$ e contenente al proprio interno i punti $z_k$. Si ha allora*

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k) \,. \tag{1.63}$$

**Dim.:** Per ogni $z_k$ si indichi con $\gamma_k$ un cerchio con centro in $z_k$ contenuto in $D$. Per il teorema 1.7.4 si ha

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\gamma_k} f(z)\, dz = 0 \,.$$

Si ottiene allora la (1.63) se si tiene conto della formula (1.60).

Sussiste inoltre il seguente risultato.

**Teorema 1.9.2** - *Sia $f$ una funzione olomorfa nel piano complesso privato dei punti $z_1, \cdots, z_n$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k) + \mathrm{Res}(f; \infty) = 0\,. \tag{1.64}$$

**Dim.:** Consideriamo la circonferenza $\gamma_r$, con centro in zero e raggio $r$, che contenga al proprio interno i punti singolari di $f$. Si ha allora per il teorema 1.7.4

$$\int_{+\gamma_r} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\partial\gamma_k} f(z)\, dz = 0$$

dove $\gamma_k$ sono circonferenze di centro $z_k$ interne a $\gamma_r$. Si ottiene allora la (1.64) ricordando le espressioni (1.60) e (1.61) dei residui nei punti al finito e all'infinito. □

Concludiamo tale breve rassegna ricordando il seguente risultato che si presenta utile quando si vuole calcolare il residuo in un polo.

**Teorema 1.9.3** - *Sia $a$ un polo di ordine $n$ per $f$. Allora*

$$\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}\,.$$

*In particolare, se $a$ è un polo del primo ordine, si ha*

$$\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)\,. \tag{1.65}$$

**Dim.:** Limitiamoci a dimostrare la (1.65). Essendo $a$ un polo del primo ordine si ha

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\,.$$

Si ha allora

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = a_{-1}$$

da cui l'asserto. □

Sia $a$ uno zero di ordine $n$ per $f$. Dalla (1.57) si ha

$$f'(z) = (z-a)^{n-1}[n f_n(z) + (z-a) {f_n}'(z)] = (z-a)^{n-1} g(z)$$

con $g(a) \neq 0$. Quindi $a$ è uno zero di ordine $n-1$ per $f'$.
Ció comporta che la funzione $f'/f$ presenta in $a$ un polo del primo ordine. Per la (1.65) si ha

$$\mathrm{Res}\ (f'/f; a) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{f_n(z)} = n\,. \tag{1.66}$$

Dal teorema dei Residui e dalla (1.66) si ottiene facilmente il seguente risultato.

**Teorema 1.9.4 (Formula dell'indicatore logaritmo)** - *Siano $z_1, \cdots, z_k$ gli zeri di $f$ interni di un dominio regolare $D$ e siano $n_1, \cdots, n_k$ i rispettivi ordini. Se $f \neq 0$ su $\partial D$ si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{k} n_i\,. \tag{1.67}$$

Siamo ora in grado di dimostrare i seguenti risultati.

**Teorema 1.9.5 (Teorema di Rouché)** - *Siano $f, g$ due funzioni olomorfe in un aperto contenente un cerchio $C$; se sulla frontiera di $C$ si ha*

$$|f(z)| > |g(z)| \tag{1.68}$$

*allora $f$ e $f+g$ hanno lo stesso numero di zeri all'interno di $C$.*

**Dim.:** Definiamo la famiglia di funzioni olomorfe

$$f_t(z) = f(z) + tg(z)\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Per la (1.68) $f_0 = f$ non si annulla su $\partial C$. Sempre per la (1.68) non si annullano su $\partial C$ tutte le altre funzioni $f_t$ in quanto

$$|f_t(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| > (1-t)|f(z)|\,.$$

Per la (1.67) il numero $n_t$ di zeri di $f_t$ interni a $C$ è dato dalla formula

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial C} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz\,.$$

Tale numero dipende con continuità da $t$ e assume solo valori interi, pertanto deve necessariamente risultare $n_t =$ costante. Si ha quindi $n_0 = n_1$ e quindi l'asserto. □

**Teorema 1.9.6 (Teorema dell'applicazione aperta)** - *Se $f$ è olomorfa e non costante allora $f$ trasforma aperti in aperti.*

Dobbiamo dimostrare che, posto $w_0 = f(z_0)$, allora il codominio di $f$ contiene un intorno di $w_0$. Non è restrittivo ovviamente assumere assumere che $z_0 = w_0 = 0$. Sia inoltre $n$ la molpteplicità di $z_0 = 0$.
Scegliamo $\delta$ in modo tale che sul cerchio $C$ con centro l'origine e raggio $\delta$ risulti $f(z) \neq 0$ : ció è possibile perché gli zeri di $f$ non possono addensarsi nell'origine per il teorema 1.8.2. Se $\varepsilon > 0$ è il minimo di $|f|$ su $\partial C$ e $|w| < \varepsilon$ si ha $|f(z)| > |w|$ su $\partial C$. Per il teorema di Rouché $f - w$ ha in $C$ lo stesso numero di zeri di $f$. Esistono allora $n$ punti all'interno di $C$ che hanno per immagine $w$. □

**Teorema 1.9.7 (Principio del massimo modulo)** - *Se $f$ è una funzione olomorfa in un aperto $A$ e ivi non costante allora la funzione $|f|$ non puó avere massimo in $A$. Se inoltre $A$ è limitato si ha*

$$\sup_A |f(z)| = \sup_{\partial A} |f(z)|\,.$$

**Dim.:** Supponiamo che $|f|$ raggiunga il suo valore massimo in un punto $z_0 \in A$. Allora, per il teorema 1.9.6, $f(z_0)$ deve essere contenuto in un cerchio contenuto in $f(A)$. In tal caso al codominio di $f$ appartengono numeri complessi con modulo strettamente maggiore di $|f(z_0)|$, contro le ipotesi. □

## 1.10 Applicazioni del teorema dei residui

Premettiamo alcuni risultati.

**Proposizione 1.10.1** - *Sia $f$ una funzione continua nel settore*

$$S = \{z \,:\, |z - z_0| \geq r_0\,, \quad \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}$$

*con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$. Se*

$$\lim_{z\to\infty} (z - z_0) f(z) = \lambda \tag{1.69}$$

*allora*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{+\gamma_r} f(z)\,dz = i\lambda(\beta-\alpha) \tag{1.70}$$

*dove $\gamma_r$ è l'arco di circonferenza, di centro $z_0$ e raggio $r$, contenuto in $S$ e orientato in senso antiorario.*

**Dim.:** Fissato $\varepsilon$ scegliamo $r_\varepsilon > r_0$ in modo tale che risulti

$$|(z-z_0)f(z)-\lambda| < \varepsilon \tag{1.71}$$

se $|z| > r_\varepsilon$.
Osservato che

$$\int_{+\gamma_r}\frac{dz}{z-z_0} = i(\beta-\alpha)\,,$$

per la (1.71), se $r > r_\varepsilon$, si ha

$$\left|\int_{+\gamma_r} f(z)\,dz - i\lambda(\beta-\alpha)\right| \le \int_{+\gamma_r}\frac{|(z-z_0)f(z)-\lambda|}{|z-z_0|}\,ds \le \varepsilon(\beta-\alpha) \tag{1.72}$$

da cui la (1.70). □

**Proposizione 1.10.2** - *Sia $f$ una funzione continua in*

$$S = \{z\,:\,0<|z-z_0|\le r_0\,,\quad \alpha\le\arg(z-z_0)\le\beta\}$$

*con $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$. Se*

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lambda$$

*allora*

$$\lim_{r\to 0}\int_{+\gamma_r} f(z)\,dz = i\lambda(\beta-\alpha) \tag{1.73}$$

*dove $\gamma_r$ è l'arco di circonferenza, di centro $z_0$ e raggio $r$, contenuto in $S$ e orientato in senso antiorario.*

**Dim.:** Si procede come nella proposizione 1.10.1.
La (1.71) in questo caso sussiste per ogni $z$ tale che $|z-z_0| < r_\varepsilon$ per un opportuno $r_\varepsilon < r_0$.
Se $r < r_\varepsilon$ si ha ancora la (1.72) e quindi la (1.73). □

**Proposizione 1.10.3** - *Sia $f$ una funzione continua in*

$$S = \{z\,:\,|z|\ge r_0\,,\quad \alpha\le\arg z\le\beta\}$$

*con $\alpha,\beta\in[0,\pi]$. Se*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \tag{1.74}$$

*allora, per ogni $\mu>0$, si ha*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{+\gamma_r} e^{i\mu z} f(z)\,dz = 0 \tag{1.75}$$

*dove $\gamma_r$ è l'arco di circonferenza, con centro nell'origine e raggio $r$, contenuto in $S$ e orientato in senso antiorario.*

**Dim.:** Si ha

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{+\gamma_r} e^{i\mu z} f(z)\,dz\right| &\le r \max_{\gamma_r} |f| \int_\alpha^\beta e^{-\mu r \sin\theta}\,d\theta \\
&\le r \max_{\gamma_r} |f| \int_0^\pi e^{-\mu r \sin\theta}\,d\theta \\
&= 2r \max_{\gamma_r} |f| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu r \sin\theta}\,d\theta \\
&\quad \left(\text{poiché } \tfrac{\sin\theta}{\theta} \ge \tfrac{2}{\pi}\right) \\
&\le 2r \max_{\gamma_r} |f| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\mu}{\pi} r\theta}\,d\theta \\
&\le \max_{\gamma_r} |f| \int_0^\infty e^{-\frac{\mu}{\pi} s}\,ds = \frac{\pi}{\mu} \max_{\gamma_r} |f|\,.
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi la (1.75) in quanto, per la (1.74), si ha

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\gamma_r} |f| = 0\,.$$

□

Riportiamo ora alcuni esempi che illustrano come il teorema dei residui, combinato con i risultati sopra riportati, consenta di ottenere i valori numerici di alcuni integrali notevoli.

**Es. 1.** - Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}\,.$$

Se $0 < r < R$ poniamo

$$C_{r,R} = \{z \,:\, r \le |z| \le R\,, \quad 0 \le \arg z \le \pi\}\,.$$

Siano $\gamma_r$ e $\gamma_R$ le semicirconferenze, rispettivamente di raggio $r$ e $R$, che fanno parte della frontiera di $C_{r,R}$.

Per il teorema di Cauchy si ha

$$0 = \int_{+\partial C_{r,R}} f(z)\,dz = 2\int_r^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_{-\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{+\gamma_R} f(z)\,dz\,.$$

Essendo $|1 - e^{iz}| \le 1 + e^{-\Im(z)} \le 2$ la funzione $f$ soddisfa la condizione (1.69) con $\lambda = 0$. Si ha quindi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,.$$

Inoltre, poiché

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = -i\,,$$

per la proposizione 1.10.2 si ha

$$\lim_{r\to 0} \int_{-\gamma_r} f(z)\,dz = -\pi\,.$$

Si ha allora

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

**Es. 2.** - Scelti $C_{r,R}$, $\gamma_r$ e $\gamma_R$ come nell'es. 1, per il teorema di Cauchy si ha

$$0 = \int_{+\partial C_{r,R}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\,.$$

Per la proposizione 1.10.2 si ha

$$\lim_{r\to 0} \int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -i\pi\,.$$

Inoltre poiché $z^{-1}$ è infinitesima al tendere di $z$ a infinito per la (1.75) si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0\,.$$

Si ottiene pertanto

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

**Es. 3.** - Per dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx = \pi \frac{\log a}{2a}$$

si integri la funzione

$$\frac{\log z}{z^2+a^2} \tag{1.76}$$

lungo la frontiera del dominio $C_{r,R}$ dell'es.1 con $r < a < R$. Si applichi il teorema dei residui e si tenga conto del punto singolare della funzione (1.76) interno a $C_{r,R}$.

**Es. 4.** - Sia $a > 1$. Per dimostrare che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{2\pi\, a}{(a^2-1)^{3/2}}$$

basta osservare che l'integrale a primo mmbro è

$$\frac{4}{i} \int_{+C} \frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\, dz$$

dove $C$ è la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.
Si applichi il teorema dei residui e si tenga conto del fatto che all'interno di $C$ la funzione da integrare presenta in

$$-a + \sqrt{a^2-1}$$

un polo del secondo ordine.

**Es. 5.** - Si consideri la funzione

$$\frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,,$$

con $a$ positivo. Tale funzione presenta due poli nei punti $\pm i$.
Indichiamo con $C_r$ il semicerchio di centro l'origine e raggio $r > 1$, contenuto nel semipiano $\Im(z) \geq 0$. Si ha

$$\int_{+\partial C_r} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\, dz = \int_{-r}^r \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx + \int_{+\gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f;i)$$

dove $\gamma_r$ è la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio $r$ parte della frontiera di $C_r$. Per la (1.65) si ha

$$\text{Res }(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iaz}}{z^2+1} = -i\,\frac{e^{-a}}{2}$$

e per la (1.75)

$$\lim_{r\to\infty}\int_{+\gamma_r}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz = 0\,.$$

Si ottiene allora

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}\,.$$

**Es. 6.** - Consideriamo la funzione $e^{-\frac{z^2}{2}}$. Se $\omega > 0$ sia

$$T_{r,\omega} = \{z = x+iy\,:\,|x|\le r\,,\quad 0\le y\le\omega\}\,. \tag{1.77}$$

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\begin{aligned} 0 = \int_{+\partial T_{r,\omega}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \quad &= \quad \int_{-r}^{r} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \int_{-r}^{r} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx \\ &+ \quad i\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy - i\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(-r+iy)^2}\,dy\,. \end{aligned}$$

Essendo

$$\left|\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy\right| \le e^{-\frac{r^2}{2}}\int_0^{\omega} e^{\frac{y^2}{2}}\,dy$$

risulta

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy = 0\,.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(-r+iy)^2}\,dy = 0\,.$$

Poiché come è noto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

si ha anche

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,.$$

**Es. 7.** - Sia $a\in]0,1[$. Integriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

sulla frontiera del rettangolo (1.77) con $\omega = 2\pi$. La funzione $f$ presenta nel punto $i\pi$ un polo del primo ordine il cui residuo è

$$\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)f(z) = e^{ia\pi}\lim_{z\to i\pi}\frac{z-i\pi}{i+e^z} = -e^{ia\pi}\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_{+\partial T_{r,2\pi}} f(z)\,dz &= \left(1-e^{2\pi a i}\right)\int_{-r}^{r}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx \\ &+ \int_0^{2\pi}\frac{e^{a(r+iy)}}{1+e^{r+iy}}\,dy - \int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-r+iy)}}{1+e^{-r+iy}}\,dy \\ &= -2\pi i e^{ia\pi}\,.\end{aligned}$$

Si ha

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(r+iy)}}{1+e^{r+iy}}\,dy\right| \le 2\pi\frac{e^{ar}}{e^r-1}\,dy$$

e

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-r+iy)}}{1+e^{-r+iy}}\,dy\right| \le 2\pi\frac{e^{-ar}}{1-e^{-r}}\,.$$

Poiché $a\in]0,1[$ i due integrali estesi ai lati verticali del rettangolo $T_{r,2\pi}$ sono infinitesimi al tendere di $r$ ad infinito. Si ha pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i\frac{e^{ia\pi}}{1-e^{2\pi a i}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\,.$$

**Es. 8.(Integrali di Fresnel)** - Integriamo la funzione $\exp(-z^2)$ lungo la frontiera del settore circolare

$$S_R = \left\{0\le\rho\le R\,,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}\,.$$

Si ha

$$\int_{+\partial S_R} e^{-z^2}\,dz = \int_0^R e^{-t^2}\,dt + \int_{+\gamma_R} e^{-z^2}\,dz - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}\,dt = 0$$

dove $\gamma_R$ denota l'arco della circonferenza con centro nell'origine e raggio $R$ che è parte della frontiera di $S_R$.

Risulta

$$\left|\int_{+\gamma_R} e^{-z^2}\,dz\right| \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}\,d\theta\,.$$

Posto

$$2\theta = \frac{\pi}{2}-\varphi$$

abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi}\,d\varphi$$

da cui, procedendo come nella dimostrazione della proposizione 1.10.3 si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}\,d\theta \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi}\varphi}\,d\varphi \le \frac{\pi}{4R^2}\,.$$

Si ha allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\gamma_R} e^{-z^2}\,dz = 0\,.$$

Poiché

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R[\cos t^2+\sin t^2]dt - \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^R[\cos t^2-\sin t^2]dt\,,$$

passando al limite per $R$ che tende ad infinito si ha

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

# Capitolo 2

# Il teorema di Riemann

## 2.1 Rappresentazioni conformi

Sia data una funzione $f$ olomorfa in un aperto $U$ e siano assegnate due curve regolari

$$t \to z_i(t) \qquad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

tali che $z_i(0) = z_0$, poniamo

$$t \to w_i(t) = f(z_i(t))\,. \tag{2.2}$$

Si dice che $f$ è una rappresentazione conforme se conserva gli angoli, ovvero se l'angolo formato da due generiche curve regolari uscenti da $z_0$ coincide con l'angolo formato dalle curve corrispondenti uscenti da $w_0 = f(z_0)$.
Vale il seguente risultato

**Proposizione 2.1.1** *Una funzione olomorfa $f$ con $f' \neq 0$ in un aperto $U$, è una trasformazione conforme in $U$*

**Dim.:** Siano (2.1) due curve passanti per $z_0$ e (2.2) le loro immagini. Si ha

$$w_i'(t) = f'(z_i(t))z_i'(t)$$

da cui

$$\arg w_i'(0) = \arg f'(z_0) + \arg z_i'(0)\,.$$

Abbiamo pertanto

$$\arg w_2'(0) - \arg w_1'(0) = \arg z_2'(0) - \arg z_1'(0)\,. \tag{2.3}$$

da cui l'asserto in quanto i due membri nella (2.3) sono, rispettivamente, l'angolo formato dai vettori tangenti alle due curve (2.2) in $w_0 = f(z_0)$ e quello formato dai vettori tangenti alle due curve (2.1) in $z_0$. □

La (1.6) implica che una funzione olomorfa con $f'(z) \neq 0$ è localmente conforme e localmente invertibile.
Il seguente risultato mostra che una funzione olomorfa e invertibile ha la derivata necessariamente diversa da zero.

**Teorema 2.1.1** - *Se $f$ è una funzione olomorfa e invertibile in $U$ allora $f' \neq 0$.*

**Dim.:** Si procede per assurdo. Sia $z_0$ un punto in cui $f'$ si annulli. Mediante opportune traslazioni possiamo fare in modo che sia $z_0 = f(z_0) = 0$. L'origine è quindi uno zero per $f$ di ordine $k > 1$. Si ha cioè

$$f(z) = a_k z^k + G(z)$$

con $a_k \neq 0$ e $G(z) = o(z^k)$. Quest'ultima condizione comporta che è possibile determinare un intorno sferico dell'origine tale che si abbia

$$|G(z)| < |a_k z^k|$$

su ogni circonferenza $\gamma$ con centro nell'origine in esso contenuta. Si puó inoltre fare in modo $f' \neq 0$ all'interno di $\gamma$ dal momento che gli zeri di una funzione olomorfa sono punti isolati per il teorema 1.8.2.

Per questioni di continuità è possibile scegliere un numero complesso $w$ con modulo sufficientemente piccolo in modo tale che risulti

$$|G(z)| < |a_k z^k - w|$$

per ogni $z \in \gamma$. Si puó inoltre fare in modo che la funzione $(a_k z^k - w)$ abbia $k$ zeri, tutti semplici, sempre all'interno di $\gamma$.

Per il teorema 1.9.5 la funzione

$$G(z) + a_k z^k - w = f(z) - w$$

ha anch'essa $k$ zeri all'interno di $\gamma$. Tali zeri sono semplici poiché $f'$ in quei punti non è nulla. Ció è in contrasto con l'ipotesi di iniettività di $f$. □

Osserviamo che il codominio $V$ di $f$ è un aperto per il teorema 1.9.6.

Sia $f$ olomorfa in $U$ e invertibile e sia $g = f^{-1}$ l'inversa di $f$. Se $w \in V$ è facile far vedere che $g$ è derivabile e che si ha

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}\,.$$

La funzione $g$ è quindi una rappresentazione conforme.

Gli aperti $U, V$ si dicono conformemente equivalenti.

Il precedente risultato si puó in qualche modo invertire.

**Proposizione 2.1.2** - *Sia*

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y) \tag{2.4}$$

*una traformazione di classe $C^1$ a jacobiano non nullo. Se $f$ conserva gli angoli allora essa è olomorfa.*

**Dim.:** Sia $z = z(t)$ una curva del piano complesso tale che $z(0) = z_0$ e sia $w = w(t) = f(z(t))$ la curva immagine. Scriviamo la condizione (2.3) nella seguente forma equivalente

$$\arg\frac{w'}{z'} = \arg w' - \arg z' = \text{Cost.} \tag{2.5}$$

dove per semplicità di notazione, come del resto faremo nel corso della dimostrazione, abbiamo tralasciato di indicare i punti in cui le varie funzioni sono calcolate. Poniamo

$$x' = \frac{1}{2}[z' + \bar{z}'] \qquad y' = -\frac{i}{2}[z' - \bar{z}']$$

e quindi

$$w' = (u_x x' + u_y y') + i\,(v_x x' + v_y y') = z'\,\frac{f_x - i f_y}{2} + \bar{z}'\,\frac{f_x + i f_y}{2}\,.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{w'}{z'} = \frac{f_x - if_y}{2} + \frac{\bar{z}'}{z'}\frac{f_x + if_y}{2} = \alpha + \frac{\bar{z}'}{z'}\beta \,. \tag{2.6}$$

Al variare della curva passante per $z_0$ il numero complesso $\bar{z}'/z'$ descrive tutta la circonferenza con centro nell'origine e raggio uno. Dovendo sussistere la (2.5) deve risultare $f_x + if_y = 0$.
Per la condizione di Cauchy-Riemann (1.3) si ha allora l'asserto. □

A titolo di esempio proponiamo il seguente risultato che esibisce una trasformazione conforme tra due particolari sottoinsiemi del piano complesso.

**Proposizione 2.1.3** - *Il semipiano*

$$\mathrm{H} = \{z \,:\, \Im(z) > 0\}$$

*è conformemente equivalente al disco unitario*

$$\mathrm{D} = \{z \,:\, |z| < 1\}\,.$$

*Le funzioni olomorfe che trasformano $H$ in $D$ e $D$ in $H$ sono, rispettivamente,*

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z}\,, \qquad G(w) = i\,\frac{1 - w}{1 + w}\,.$$

**Dim.:** La funzione $F$ è ovviamente olomorfa in $H$ dal momento che essa presenta l'unica singolarità in $-i$.
Inoltre si ha $|F(z)| < 1$ in quanto $|i - z| < |i + z|$ se $z$ appartiene ad $H$. Quindi il codominio di $F$ è contenuto in $D$.
Sia $w$ un elemento di $D$. Allora $z = G(w)$ è l'unica soluzione dell'equazione $F(z) = w$. D'altra parte si ha

$$\Im(G(w)) = \frac{1 - |w|^2}{(1 + \Re(w))^2 + \Im(w)^2} > 0$$

e quindi $G(w) \in H$. Ció comporta che $F(H) = D$. □

Altri esempi di trasformazioni conformi sono le traslazioni, ovvero per $h \in \mathbb{C}$ fissato,

$$f(z) = z + h, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

le funzioni

$$f(z) = cz, \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

dove $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.
Si puó inoltre verificare che la trasormazione

$$f(z) = z^2, \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

è conforme dal settore $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ nel semipiano aperto superiore. Si osservi che la stessa trasformazione non è conforme in $z_0 ==$.

**Osservazione 2.1.1** - *Per completezza ricordiamo che la trasformazione* (2.4) *si dice quasi conforme se esiste una costante $K \geq 1$ tale che*

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 \leq 2K\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,. \tag{2.7}$$

*Va rilevato che tale definizione per $K = 1$ comporta che la trasformazione è conforme. Infatti la* (2.7) *diventa*

$$(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2 \leq 0$$

*da cui si deduce l'olomorfia di $f$ in quanto sussitono le condizioni di Cauchy-Riemann.*

## 2.2 Automorfismi del disco unitario

**Definizione 2.2.1** - *Un'applicazione conforme di un aperto $A$ su se stesso dicesi automorfismo di $A$.*

**Esempio 2.2.1** - *L'automorfismo del piano complesso*

$$r_\theta \,:\, z \longrightarrow e^{i\theta} z$$

*prende il nome di rotazione di angolo $\theta$. L'automorfismo inverso è la rotazione $r_{-\theta}$.*

**Proposizione 2.2.1** - *Le funzioni*

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}\,, \tag{2.8}$$

*con $|\alpha| < 1$, sono automorfismi del disco unitario.*

**Dim.:** Le funzioni (2.8) sono ovviamente olomorfe in $D$.
Essendo

$$\psi_\alpha(e^{i\theta}) = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{\bar{\alpha} - e^{-i\theta}}$$

si ha $|\psi_\alpha(z)| = 1$ se $z$ appartiene alla frontiera di $D$. Per il teorema 1.9.7 risulta $|\psi_\alpha(z)| < 1$ in $D$.
Quindi $\psi_\alpha(D) \subset D$.
Osservato che

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\alpha)(z) = z \tag{2.9}$$

si ha che $\psi_\alpha$ è biunivoca e coincide con la sua inversa. Pertanto $\psi_\alpha$ è un automorfismo di $D$.
Si ha inoltre

$$\psi_\alpha(0) = \alpha \qquad \psi_\alpha(\alpha) = 0\,. \tag{2.10}$$

Quindi la (2.8) scambia i valori 0 e $\alpha$. $\square$

Vogliamo ora caratterizzare gli automorfismi del disco unitario $D$. A tal fine premettiamo il seguente risultato.

**Lemma 2.2.1 (Lemma di Schwarz)** - *Una trasformazione $f$ olomorfa del disco unitario $D$ in sé tale che $f(0) = 0$ gode delle seguenti proprietà*

(a) $|f(z)| \leq |z|$;

(b) *se $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \neq 0$ allora $f$ è una rotazione;*

(c) $|f'(0)| \leq 1$ *e l'uguaglianza sussiste solo se $f$ è una rotazione.*

**Dim.:** La funzione $f(z)/z$ è olomorfa in $D$ in quanto l'origine è una singolarità eliminabile essendo $f$ nulla in zero.
Fissato $r < 1$, se $|z| = r$, si ha

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r} \tag{2.11}$$

essendo $|f(z)| \leq 1$. Per il teorema 1.9.7 la (2.11) sussiste anche per $|z| < r$. Facendo tendere $r$ ad 1 si ottiene la (a).

Sia $z_0 \neq 0$ tale che $|f(z_0)| = |z_0|$. Allora per la (a) la funzione $|f(z)/z|$ raggiunge il suo valore massimo in $z_0$. Per il teorema 1.9.7 la funzione $f(z)/z$ assume un valore costante il cui modulo è 1. Esiste quindi un valore $\theta$ tale che $f(z) = e^{i\theta} z$ da cui (b).
Dalla (a) discende che

$$|f'(0)| = \left| \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 .$$

Se fosse $|f'(0)| = 1$ il modulo della funzione $f(z)/z$, opportunamente prolungata in 0, raggiungerebbe il suo valore massimo nell'origine. Ancora per il teorema 1.9.7 deve essere $|f(z)/z| = 1$ in $D$. Si ragiona come nella dimostrazione della proprietà (b). Si ottiene in tal modo la (c). □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato.

**Proposizione 2.2.2** - *Se $f$ è un automorfismo di $D$ allora esistono due numeri $\theta \in R$ e $\alpha \in D$ tali che*

$$f(z) = e^{i\theta} \psi_\alpha(z) . \tag{2.12}$$

**Dim.:** Sia $\alpha$ l'unico elemento di $D$ tale che $f(\alpha) = 0$.
La funzione $g = f \circ \psi_\alpha$ è un automorfismo di $D$ ed inoltre $g(0) = 0$. Per la (a) del lemma 2.2.1 si ha allora

$$|g(z)| \leq |z| .$$

Ovviamente il lemma si puó applicare anche a $g^{-1}$. Si ha quindi

$$|z| \leq |g(z)|$$

ovvero, in definitiva, $|g(z)| = |z|$ in $D$.
Per la (b) del lemma 2.2.1 abbiamo $g(z) = e^{i\theta} z$.
Poiché per la (2.9) l'inversa di $\psi_\alpha$ è $\psi_\alpha$ abbiamo

$$f(z) = (f \circ \psi_\alpha \circ \psi_\alpha)(z) = (g \circ \psi_\alpha)(z) = e^{i\theta} \psi_\alpha(z)$$

cioè l'asserto. □

**Proposizione 2.2.3** - *Se l'automorfismo $f$ fissa l'origine allora esso è una rotazione.*

**Dim.:** Poiché $f(0) = 0$ bisogna porre $\alpha = 0$ in (2.12). Si ottiene in tal modo l'asserto. □

## 2.3 Famiglie di funzioni olomorfe

**Proposizione 2.3.1** - *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in un aperto $A$. Se la successione converge uniformemente convergente ad una funzione $f$ in ogni sottoinsieme compatto di $A$. Allora $f$ è olomorfa in $A$.*

**Dim.:** Sia $C$ un cerchio contenuto in $A$ e sia $T$ un triangolo contenuto in $C$. Per il teorema 1.4.1 e per l'ipotesi di convergenza uniforme si ha

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_{+\partial T} f_n(z) dz = \int_{+\partial T} f(z) dz .$$

Basta allora applicare il teorema 1.7.5. □

**Proposizione 2.3.2** - *Nelle stesse ipotesi della proposizione* 2.3.1 *la successione $\{f'_n\}$ converge uniformemente a $f'$ sui compatti di $A$.*

**Dim.:** Sia $K$ un sottoinsieme compatto di $A$. Consideriamo il seguente ulteriore compatto

$$K_\delta = \{z \in A \,:\, \mathrm{dist}(z, K) \le \delta\}$$

con

$$0 < \delta < \frac{\mathrm{dist}(K, \partial A)}{2}\,.$$

Dimostriamo che

$$\sup_K |g'| \le \frac{1}{\delta} \sup_{K_\delta} |g| \tag{2.13}$$

per ogni funzione $g$ olomorfa in $A$.
Se $z \in K$ denotiamo con $C_\delta(z)$ il cerchio di centro $z$ e raggio $\delta$. Derivando sotto il segno di integrale il secondo membro della formula integrale di Cauchy (1.37) si ha

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C_\delta(z)} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

da cui

$$|g'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial C_\delta(z)} \frac{|g(\xi)|}{|\xi - z|^2} ds_\xi \le \frac{1}{\delta} \sup_{K_\delta} |g|$$

e quindi la (2.13).
Se ora si scrive la (2.13) con $(f_n - f)$ al posto di $g$ si ottiene l'asserto poiché la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ su ogni compatto di $A$. □

Dalle proposizioni 2.3.1 e 2.3.2 si ottiene facilmente il seguente risultato.

**Proposizione 2.3.3** - *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie di funzioni olomorfe in un aperto* $A$*, uniformemente convergente in ogni sottoinsieme compatto di* $A$*. Allora, posto*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,,$$

*la funzione* $f$ *è olomorfa. Si ha inoltre*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)\,.$$

Come ulteriore applicazione proponiamo il seguente risultato.

**Proposizione 2.3.4** - *Sia*

$$f \,:\, (z, t) \in A \times [a, b] \longrightarrow f(z, t)$$

*una funzione olomorfa in* $A$ *per ogni* $t \in [a, b]$ *e continua in* $[a, b]$ *per ogni* $z \in A$*. Allora la funzione*

$$g(z) = \int_a^b f(z, t)\, dt$$

*è olomorfa in* $A$ *e si ha*

$$g'(z) = \int_a^b f_z(z, t)\, dt\,.$$

**Dim.:** Possiamo ovviamente ridurci al caso in cui l'intervallo $[a,b]$ sia $[0,1]$. Consideriamo le somme di Riemann

$$g_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z, k/n)\,.$$

Tali funzioni sono ovviamente olomorfe in $A$. Inoltre, se $z$ appartiene ad un compatto di $A$, per il teorema di Cantor, fissato $\varepsilon$, per $n$ abbastanza grande risulta

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g(z)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} [f(z,k/n) - f(z,t)]\,dt\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(z,k/n) - f(z,t)|\,dt \le \varepsilon\,. \end{aligned}$$

La successione $\{g_n\}$ converge uniformemente a $g$ che è olomorfa alla luce della proposizione 2.3.1. Si ha

$$g_n'(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_z(z, k/n)\,. \tag{2.14}$$

Per la proposizione 2.3.2 la successione $\{g_n'\}$ converge a $g'$ mentre la successione a secondo membro nella (2.14) tende a

$$\int_0^1 f_z(z,t)\,dt\,.$$

Abbiamo quindi l'asserto. $\square$

**Definizione 2.3.1** - *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni definite in un aperto $A$.*

- *Le funzioni di $\mathcal{F}$ si dicono equilimitate sui compatti di $A$ se, in corrispondenza di ogni compatto $K \subset A$, è possibile determinare una costante $B_K$ tale che*

$$|f(z)| \le B_K$$

  *per ogni $z \in K$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.*

- *Le funzioni di $\mathcal{F}$ si dicono equicontinue su un compatto $K \subset A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_K > 0$ tale che, se $z, w \in K$ e $|z - w| < \delta_K$ si ha e*

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

  *per ogni $f \in \mathcal{F}$.*

È noto che, in base al teorema di Ascoli-Arzelà, una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni equicontinue ed equilimitate in un compatto $K$ è compatta in $C^0(K)$. Qui il termine compattezza sta a significare che ogni successione contenuta in $\mathcal{F}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente. Per famiglie di funzioni olomorfe la prima condizione assicura in qualche modo anche la seconda. Sussiste infatti il seguente risultato.

**Teorema 2.3.1** - *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe in un aperto $A$. Se tali funzioni sono equilimitate sui compatti di $A$ allora ogni successione di funzioni di $\mathcal{F}$ ha una sottosuccessione che converge uniformemente su un qualsiasi sottoinsieme compatto di $A$.*

**Dim.:** Sia $K$ un compatto di $A$ e fissiamo $r$ in modo che $3r < \mathrm{dist}(K, \partial A)$.
Siano $z, w$ due punti di $K$ tali che $|z - w| < r$. Allora $w \in C_{2r}(w)$ e per la formula integrale di Cauchy (1.37) si ha

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C_{2r}(w)} f(\xi) \left[ \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - w} \right] d\xi \,. \tag{2.15}$$

Poiché $\xi \in \partial C_{2r}(w)$ si ha $|\xi - w| = 2r$ e $|\xi - z| > r$ e quindi

$$\left| \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - w} \right| = \frac{|z - w|}{|\xi - z||\xi - w|} \leq \frac{|z - w|}{2r^2} \,. \tag{2.16}$$

Sia $K_{2r}$ il compatto costituito dai punti che distano da $K$ al piú $2r$. Se si indica con $B$ una costante tale che

$$|f(z)| \leq B$$

dalle (2.15) e (2.16) si ha

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{B}{r} |z - w|$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $z \in K_{2r}$. Da tale stima si ottiene l'equicontinuità su $K$ delle funzioni di $\mathcal{F}$ e quindi la compattezza di $\mathcal{F}$in $C^0(K)$.
Per concludere è necessario far ricorso ad un argomento di diagonalizzazione.
Sia $\{K_n\}$ una successione crescente di compatti di $A$ tale che $\cup_n K_n = A$.
Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni di $\mathcal{F}$ sia $\{f_{n,1}\}$ una sua sottosuccessione convergente uniformemente in $K_1$. Estraiamo quindi da $\{f_{n,1}\}$ una ulteriore successione $\{f_{n,2}\}$ uniformemente convergente in $K_2$ e cosí via. Si viene a costruire un sorta di matrice, con un numero infinito di righe e di colonne, i cui termini sono le funzioni $\{f_{n,k}\}$. La $n$-ma riga è per costruzione una sottosuccessione di tutte le successioni poste nelle righe che la precedono. Essa converge uniformemente nel compatto $K_n$. Consideriamo la successione diagonale il cui termine $n-$mo è $g_n = f_{n,n}$. Essa è estratta dalla successione $\{f_n\}$ e, a patto di non tener conto dei primi $n-1$ termini, dalla successione $\{f_{n,k}\}$. Essa quindi converge uniformemente su ogni $K_n$ e, anche, su ogni compatto di $A$. □

**Teorema 2.3.2** - *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, olomorfe in un aperto connesso $A$, convergente uniformemente sui compatti di $A$ ad una funzione $f$. Se le funzioni $f_n$ sono iniettive allora anche $f$ è iniettiva a meno che non sia costante.*

**Dim.:** Per la proposizione 2.3.1 intanto $f$ è olomorfa. Supponiamo che $f$ non sia né costante né iniettiva. Siano allora $z_1 \neq z_2$ due punti tali che $f(z_1) = f(z_2)$.
Le funzioni $g_n = f_n - f_n(z_1)$ si annullano solo in $z_1$ essendo $f_n$ iniettiva. Inoltre esse convergono uniformemente sui compatti di $A$ a $g = f - f(z_1)$. Poiché $f$ non è costante il punto $z_2$ è uno zero isolato per $g$. Per la formula dell'indicatore logaritmico (1.67) si ha allora

$$\int_{+\partial C} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \neq 0 \,,$$

dove $C$ è un cerchio, di centro $z_2$, che non contenga alcun altro zero di $g$ oltre a $z_2$.
Poiché $g$ non si annulla su $\partial C$ la successione $\{1/g_n\}$ converge uniformemente su $\partial C$ a $1/g$. Per la proposizione 2.3.2 anche $g'_n$ converge uniformemente su $\partial C$ a $g'$. Si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{+\partial C} \frac{g'_n(z)}{g_n(z)} dz = \int_{+\partial C} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \neq 0 \,.$$

Ma ció è assurdo in quanto

$$\int_{+\partial C} \frac{g'_n(z)}{g_n(z)} dz = 0 \,.$$

Infatti le funzioni $g_n$ non si annullano all'interno di $C$ dal momento che esse si annullano solo in $z_1$. □

## 2.4 Dimostrazione del teorema di Riemann

Siamo ora finalmente in grado di dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 2.4.1 (Riemann Mapping Theorem)** - *Sia $A$ un sottoinsieme del campo complesso proprio, aperto e semplicemente connesso. Se $z_0 \in A$ esiste un'unica applicazione conforme $F$ di $A$ sul disco unitario $D$ tale che*

$$F(z_0) = 0 \tag{2.17}$$

*e*

$$F'(z_0) > 0\,. \tag{2.18}$$

**Dim.:** Osserviamo innanzitutto che l'ipotesi che $A$ sia proprio è essenziale altrimenti $F$, in quanto limitata, risulterebbe costante per il teorema di Liouville. Anche l'ipotesi di semplice connessione è indispensabile perché tale è il disco $D$.
Verifichiamo che la trasformazione é unica.
Siano infatti $F, G$ due trasformazioni verificanti le condizioni (2.17) e (2.18). Allora $H = F \circ G^{-1}$ è un automorfismo del disco $D$ che fissa l'origine e quindi deve ridursi ad una rotazione per la proposizione 2.2.3. Risulta cioè $H(z) = e^{i\theta} z$.
Poiché

$$H'(z) = \frac{F'(G^{-1}(z))}{G'(G^{-1}(z))}\,,$$

per le (2.17) e (2.18) si ha

$$H'(0) = \frac{F'(G^{-1}(0))}{G'(G^{-1}(0))} = \frac{F'(z_0)}{G'(z_0)} > 0\,.$$

Essendo $H'(z) = e^{i\theta}$ deve risultare $\theta = 0$. Abbiamo quindi $F = G$.
La dimostrazione dell'esistenza è piú articolata.
Verifichiamo innanzitutto che $A$ è conformemente equivalente ad un sottoinsieme aperto di $D$ contenente l'origine.
Poiché $A$ è proprio esiste un complesso $\alpha$ esterno ad $A$. Essendo $A$ semplicemente connesso, per la proposizione 1.5.1 è possibile fissare in $A$ una determinazione olomorfa della funzione polidroma $\log(z - \alpha)$. Indichiamo con $L$ tale funzione.
Scelto $w \in A$ deve pertanto risultare

$$L(z) \neq L(w) + 2\pi i$$

per ogni $z \in A$.
Dimostriamo che esiste un intorno circolare di $L(w) + 2\pi i$ esterno a $L(A)$. Se cosí non fosse esisterebbe una successione $\{z_n\}$ di punti di $A$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} L(z_n) = L(w) + 2\pi i\,. \tag{2.19}$$

Si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \exp(L(z_n)) = w\,.$$

Mo ció comporta che $\{L(z_n)\}$ converge a $L(w)$ in contrasto con la (2.19).
Abbiamo quindi che la funzione

$$F(z) = \frac{1}{L(z) - (L(w) + 2\pi i)}$$

iniettiva perché tale è $L$, è un'applicazione conforme di $A$ su $F(A)$ e quest'ultimo insieme risulta limitato.

Pertanto, facendo eventualmente ricorso ad una traslazione e ad un riscalamento è possibile ottenere un'applicazione conforme di $A$ su un sottoinsieme di $D$ che contenga l'origine.
Basta allora dimostrare che un sottoinsieme aperto $A$ di $D$ contenente l'origine è conformemente equivalente a $D$.
Introduciamo la famiglia $\mathcal{F}$ di trasformazioni $f$ di $A$ in $D$ olomorfe, iniettive e tali che $f(0) = 0$.
Tale famiglia è non vuota in quanto ad essa appartiene l'applicazione identitica. Inoltre le funzioni di $\mathcal{F}$ sono equilimitate dal momento che, per ogni $f \in \mathcal{F}$,

$$|f(z)| < 1 \tag{2.20}$$

se $z \in D$. Poniamo

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| .$$

Dalla diseguaglianza di Cauchy (1.52), se $C_R$ è un cerchio, con centro nell'origine e raggio $R$ contenuto in $A$, si ha, ricordando la (2.20),

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{R} \sup_{\partial C_R} |f| \leq \frac{1}{R} .$$

Quindi $s$ è finito. Inoltre $s \geq 1$ dal momento che l'applicazione identica appartiene a $\mathcal{F}$.
Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $\mathcal{F}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} |f_n'(0)| = s .$$

Per il teorema 2.3.1 da tale successione si puó estrarre una sottosuccessione che converge sui compatti di $A$ ad una funzione olomorfa $g$. Inoltre per la proposizione 2.3.2 si ha $|g'(0)| = s \geq 1$. Pertanto $g$ non è costante; per il teorema 2.3.2 essa risulta iniettiva. Per il teorema 1.9.7 inoltre deve essere $|g(z)| < 1$ se $z \in A$. Essendo ovviamente $g(0) = 0$ concludiamo che $g \in \mathcal{F}$.
Come passo finale dimostriamo che $g$ è un'applicazione conforme tra $A$ e $D$. Basta dimostrare che essa è suriettiva. Procediamo per assurdo; sia $\alpha$ un elemento di $D$ che non appartenga al codominio di $g$. Consideriamo l'automorfismo (2.8) di $D$ che scambia $\alpha$ e 0. L'insieme $(\psi_\alpha \circ g)(A)$ è semplicemente connesso e non contiene l'origine; pertanto è possibile definire in esso una determinazione $h(z)$ della funzione polidroma, a due valori, $\sqrt{z}$. Consideriamo la funzione

$$F = \psi_{h(\alpha)} \circ h \circ \psi_\alpha \circ g.$$

Chiaramente $F \in \mathcal{F}$ in quanto $F$ è olomorfa in $A$, muta $A$ in $D$ e 0 in 0; inoltre $F$ è iniettiva poiché composta da funzioni iniettive.
Introduciamo ora la funzione quadrato $q(w) = w^2$; si ha

$$g = \psi_\alpha^{-1} \circ q \circ \psi_{h(\alpha)}^{-1} \circ F = \Psi \circ F .$$

La funzione $\Psi$ muta $D$ in $D$ e 0 in 0; inoltre essa, come la funzione $q$, non è iniettiva. Per la proposizione ($c$) del lemma 2.2.1 deve essere $|\Psi'(0)| < 1$. Siccome

$$g'(0) = \Psi'(0)F'(0)$$

si ha in definitiva

$$|g'(0)| < |F'(0)|$$

che contraddice la condizione di massimalità di $g$.
Infine, moltiplicando $g$ per un numero complesso di modulo unitario, si puó sempre per fare in modo che risulti $g'(0) > 0$. $\square$

# Capitolo 3

# L'equazione di Laplace

## 3.1 Funzioni armoniche nel piano

Una funzione $u$ di classe $C^2(A)$ con $A$ aperto del piano si dice armonica in $A$ se essa risolve in $A$ l'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Dimostriamo innanzitutto la seguente proprietà.

**Teorema 3.1.1 (Principio di massimo)** - *Sia $u$ armonica in un aperto connesso $A$. Allora $u$ non ha punti di estremo locale a meno che essa non sia costante. Inoltre, se $A$ è limitato e $u$ puó essere prolungata per continuità sulla chiusura di $A$ si ha*

$$\min_{\partial A} u = \inf_A u \leq \sup_A u = \max_{\partial A} u\,. \tag{3.1}$$

**Dim.:** Sia $u$ non costante e sia $z_0 = (x_0, y_0)$ un punto di $A$ che sia, per esempio, di massimo relativo per $u$.
Indichiamo con $f$ una funzione olomorfa in $A$ che abbia come parte reale $u$. Allora $u$ non puó assumere un valore costante in un intorno di $z_0$ altrimenti $f$ e, quindi, $u$ sarebbe costante in tutto $A$.
Esiste quindi un cerchio $C_r \subset A$ di centro $z_0$ e raggio $r$ tale che $u(z) \leq u(z_0)$ su $\partial C_r$ e $u(z) \neq u(z_0)$ su un arco di lunghezza positiva. Risulta pertanto

$$\int_{\partial C_r} u\,ds < 2\pi r\, u(z_0)$$

in contrasto con la proprietà di media (1.49).
L'assenza di estremi locali interni ad $A$ implica ovviamente la (3.1). □

Un aperto limitato è un dominio regolare se la sua frontiera è costituita da una o piú curve chiuse generalmente regolari.
Consideriamo il seguente problema di Dirichlet in un dominio regolare $\Omega$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

con $\varphi$ funzione continua su $\partial\Omega$.
Dimostriamo innanzitutto il seguente risultato di unicità.

**Teorema 3.1.2** - *Il problema* (3.2) *ha al piú una soluzione.*

**Dim.:** Siano $u, v$ due soluzioni di (3.2). Allora $w = u - v$ è armonica in $\Omega$ e nulla su $\partial\Omega$. Per la (3.1) si ha allora $u = 0$ e, quindi, $u = v$. $\square$

Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione di (3.2), se $\Omega$ è semplicemente connesso si puó far ricorso al teorema di Riemann.
Sia infatti $F$ la rappresentazione conforme tra $\Omega$ e il disco unitario $D$ di cui al teorema 2.4.1. Alla funzione $\varphi$ definita su $\partial\Omega$ associamo la funzione $\psi = \varphi \circ F^{-1}$ definita sulla frontiera di $D$.
Supponiamo che il problema

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{in } D \\ \\ U = \psi & \text{su } \partial D \end{cases} \tag{3.3}$$

abbia una soluzione $U$. Se $V$ è una funzione armonica coniugata di $U$ allora $f = U + iV$ è olomorfa in $D$ e

$$f(F(z)) = U(F(z)) + i\,V(F(z))$$

è olomorfa in $\Omega$. Pertanto la funzione $u(z) = U(F(z))$ è armonica in $\Omega$. Si ha inoltre $u = \varphi$ sul bordo di $\Omega$. Quindi $u$ risolve il problema (3.2).

La risoluzione del problema di Dirichlet in un aperto regolare, limitato e semplicemente connesso è quindi ricondotta a quella del problema di Dirichlet per il disco unitario. Per risolvere quest'ultimo problema procediamo per gradi.

Come primo passo dimostriamo una formula di rappresentazione che di fatto è una riscrittura della formula integrale di Cauchy.

**Proposizione 3.1.1** - *Sia $u$ una funzione armonica in $D$ e continua nella chiusura di $D$. Se $\alpha \in D$ si ha*

$$u(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |\alpha|^2}{|e^{it} - \alpha|^2} u(e^{it}) dt\,. \tag{3.4}$$

**Dim.:** Consideriamo l'automorfismo (2.8) e la funzione armonica in $D$

$$u_\alpha(z) = u(\psi_\alpha(z))\,. \tag{3.5}$$

Sia ha

$$\begin{aligned} u(\alpha) = &\ u_\alpha(0) && \text{(per la (2.10))} \\ = &\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_\alpha(e^{it})\,dt && \text{(per la (1.49))} \\ = &\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\frac{\alpha - e^{it}}{1 - \overline{\alpha}e^{it}}\right) dt && \text{(per la (3.5))}\,. \end{aligned}$$

Effettuiamo nell'ultimo integrale il cambio di variabile

$$\frac{\alpha - e^{it}}{1 - \overline{\alpha}e^{it}} = e^{i\tau}\,.$$

Essendo anche

$$e^{it} = \frac{\alpha - e^{i\tau}}{1 - \overline{\alpha}e^{i\tau}}$$

si ha

$$dt = \frac{1 - |\alpha|^2}{|\alpha - e^{i\tau}|^2} d\tau$$

da cui la (3.4). □

Se $\alpha = re^{i\phi}$, ricordando il teorema di Carnot abbiamo

$$\frac{1-|\alpha|^2}{|e^{it}-\alpha|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\phi)} = P_r(t-\phi)\,.$$

La (3.4) diventa

$$u(r\,e^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\phi)u(e^{it})\,dt\,. \tag{3.6}$$

La (3.6) è nota come formula integrale di Poisson.

Se si pone $u \equiv 1$ nella (3.4) si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt = 1 \tag{3.7}$$

per ogni $z \in D$. Posto

$$K(z,w) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} \tag{3.8}$$

dalla (3.7) discende che

$$\int_{\partial D} K(z,w)\,ds_w = 1 \tag{3.9}$$

per ogni $z \in D$.

Siamo ora in grado di dimostrare un risultato di esistenza per il problema di Dirichlet nel disco $D$.

**Teorema 3.1.3** - *Sia $\varphi$ continua su $\partial D$. Allora la funzione*

$$u(z) = \int_{\partial D} K(z,w)\varphi(w)\,ds_w = \frac{1-|z|^2}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{\varphi(w)}{|w-z|^2}ds_w \tag{3.10}$$

*risolve il problema di Dirichlet* (3.2) *in $D$.*

**Dim.:** Una semplice verifica mostra che la (3.10) è armonica in $D$: basta derivare due volte sotto il segno di integrale.
Dobbiamo quindi dimostrare solo che

$$\lim_{z\to z_0} u(z) = \varphi(z_0)$$

se $z_0 \in \partial D$.
Per la (3.9) si ha intanto

$$u(z) - \varphi(z_0) = \int_{\partial D} K(z,w)\,[\varphi(w)-\varphi(z_0)]\;ds_w\,. \tag{3.11}$$

Per la continuità di $\varphi$, fissato $\varepsilon$, esiste un $\delta$ positivo tale che

$$|\varphi(w)-\varphi(z_0)| < \varepsilon \tag{3.12}$$

se $|w-z_0| < 2\delta$.

Dalla (3.11) si ha

$$
\begin{aligned}
|u(z)-\varphi(z_0)| &\leq \int_{\partial D} K(z,w)\,|\varphi(w)-\varphi(z_0)|\,ds_w \\
&= \int_{|w-z_0|<2\delta} K(z,w)|\varphi(w)-\varphi(z_0)|\,ds_w \\
&+ \int_{|w-z_0|\geq 2\delta} K(z,w)|\varphi(w)-\varphi(z_0)|\,ds_w \\
&= I_1+I_2\,.
\end{aligned}
$$

Facendo ricorso alle (3.12) e (3.9) abbiamo

$$I_1 \leq \varepsilon\,. \tag{3.13}$$

Sia $|z-z_0|<\delta$. Se $w\in\partial D$ e $|w-z_0|\geq 2\delta$ si ha

$$|w-z|\geq |w-z_0|-|z-z_0|\geq 2\delta-\delta=\delta\,.$$

Posto

$$M=\max_{\partial D}|\varphi|\,,$$

tenendo conto la dell'espressione (3.8) del nucleo $K$, si ha

$$I_2\leq \frac{2M(1-|z|^2)}{\delta^2}\,.$$

È possibile allora determinare un valore $\delta'\leq\delta$ in modo tale che, se $|z-z_0|<\delta'$, si abbia $I_2<\varepsilon$. Ricordando la (3.13) si ottiene

$$|u(z)-\varphi(z_0)|\leq 2\varepsilon$$

per ogni $z\in D\cap C_{\delta'}(z_0)$. Abbiamo quindi l'asserto. □

Possiamo in definitiva enunciare il seguente risultato.

**Teorema 3.1.4** - *Sia $A$ un dominio regolare semplicemente connesso del piano. Allora, in ipotesi di continuità per $\varphi$, il problema di Dirichlet* (3.2) *ammette un'unica soluzione.*

**Osservazione 3.1.1** - *Se si assume che il dato $\varphi$ è solo limitato allora la condizione al bordo è verificata solo nei punti in cui $\varphi$ è continua.*

Ovviamente è possibile esibire una formula di rappresentazione per la soluzione del problema (3.2) sempre che si conosca l'espressione analitica della trasformazione conforme che lega $A$ e $D$, cosa questa non sempre possibile.
Una tale esplicita rappresentazione puó peró essere data per la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v=0 & \text{in } H \\ v=\varphi & \text{su } \partial H \end{cases} \tag{3.14}$$

nel semipiano $H$. La soluzione si scrive infatti nel modo seguente

$$v(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi\,. \tag{3.15}$$

È possibile ovviamente procedere con una verifica diretta. Preferiamo qui ottenere la (3.15) utilizzando l'espressione della rappresentazione conforme $F$ tra $H$ e $D$ richiamata nella proposizione 2.1.3.
Se $z = x + iy$ si ha $v(z) = u(F(z))$ dove $u$ è la soluzione di (3.3) con dato al bordo $\psi = \varphi \circ F^{-1}$.
Se $\xi \in R$ indichiamo con $\tau$ il valore dell'intervallo $]-\pi, \pi[$ tale che

$$\xi = \tan\frac{\tau}{2}\,.$$

Risulta per la (3.10)

$$F(\xi) = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} + \frac{2\xi}{1+\xi^2} i = e^{i\tau}\,.$$

Si ha allora

$$v(x,y) = u(F(z)) = \frac{1-|F(z)|^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\tau})}{|e^{i\tau} - F(z)|^2} d\tau$$

da cui la (3.15).

## 3.2 La funzione Γ di Eulero

Se $s$ è un numero reale positivo sia

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \sigma^{s-1} e^{-\sigma}\, d\sigma\,. \tag{3.16}$$

La funzione $\Gamma$ è nota come Gamma di Eulero. Essa puó considerarsi una sorta di estensione del fattoriale.
Infatti, integrando per parti, si ha

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\,. \tag{3.17}$$

Essendo $\Gamma(1) = 1$ per induzione abbiamo

$$\Gamma(n+1) = n!\,. \tag{3.18}$$

Si ha inoltre

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \sigma^{-1/2} e^{-\sigma}\, d\sigma = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{\pi}\,. \tag{3.19}$$

Per induzione dalle (3.17) e (3.19) si ha

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{3.20}$$

per ogni intero $n$.

Posto $\sigma = \tau^2/2$ nell'espressione (3.16) di $\Gamma$ si ha

$$\Gamma(s) = 2^{1-s}\int_0^\infty \tau^{2s-1} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau \tag{3.21}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(t) &= 2^{2-s-t}\left(\int_0^\infty x^{2s-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2t-1}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right)\\
&= 2^{2-s-t}\int_{R^+\times R^+} x^{2s-1}y^{2t-1}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy\\
&\quad \text{(passando a coordinate polari)}\\
&= 2^{2-s-t}\left(\int_0^\infty \rho^{2(s+t)-1}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2s-1}\theta\sin^{2\sigma-1}\theta\,d\theta\right)\\
&\quad \text{(per la (3.21)}\\
&= 2\Gamma(s+t)\int_0^{\pi/2}\cos^{2s-1}\theta\sin^{2t-1}\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2s-1}\theta\sin^{2t-1}\theta\,d\theta\,.$$

Con la sostituzione $z=\cos^2\theta$ lintegrale a secondo membro nella precedente identià diventa

$$\frac{1}{2}\int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz\,.$$

In definitiva si ha

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(s+\sigma)} = \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz\,. \tag{3.22}$$

Sia

$$S_N=\{x\in R^N\ :\ \|x\|\le 1\}$$

la sfera di $R^N$ con centro nell'origine e raggio uno. Se indichiamo con $\omega_N$ la sua misura, per una nota formula di riduzione si ha

$$\omega_N = 2\omega_{N-1}\int_0^1 (1-x_N^2)^{\frac{N-1}{2}}\,dx_N\,.$$

Ponendo $x_N=\sqrt{z}$ nell'integrale e ricordando la (3.22) abbiamo la seguente formula di ricorrenza

$$\omega_N=\omega_{N-1}\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{\frac{N-1}{2}}\,dz=\omega_{N-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$$

da cui si ottiene la seguente espressione per la misura di $S_N$

$$\omega_N=\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\,. \tag{3.23}$$

Per le (3.18) e (3.20) abbiamo quindi

$$\omega_N = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{se } N = 2k \\[2ex] \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} & \text{se } N = 2k+1\,. \end{cases}$$

Infine, se $\sigma_N$ è la misura della superficie sferica $\partial S_N$ si ha

$$\sigma_N = N\omega_N\,.$$

## 3.3 La soluzione fondamentale

Nel seguito indicheremo con $\Omega$ un aperto limitato di $R^N$ la cui frontiera è una varietà regolare. Una funzione di classe $C^2$ dicesi armonica se il laplaciano di $u$, cioè l'operatore differenziale

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,,$$

è nullo.

**Proposizione 3.3.1 (Identità di Green)** - *Siano $u, v$ due funzioni di classe $C^2$ in un aperto $A$ contenente la chiusura di $\Omega$. Si ha*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left( u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} \right) d\sigma \tag{3.24}$$

*dove $\nu = (\nu_i)$ è il versore normale a $\partial\Omega$ orientato verso l'esterno di $\Omega$.*

**Dim.:** Per le formule di Gauss-Green si ha

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left( u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u\frac{\partial v}{\partial x_i} - v\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( u\frac{\partial v}{\partial x_i} - v\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \nu_i\, d\sigma\,. \end{aligned}$$

Sommando su $i$ si ottiene la (3.24). □

Introduciamo le seguenti funzioni note come soluzioni fondamentali

$$\Phi(\|x\|) = \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log\|x\| & \text{se } N = 2 \\[2ex] \dfrac{1}{(2-N)\sigma_N} \|x\|^{2-N} & \text{se } N > 2\,. \end{cases} \tag{3.25}$$

Si ha

$$\Phi_{x_i}(x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{x_i}{\|x\|^N} \tag{3.26}$$

e anche

$$\Phi'(r) = \frac{1}{\sigma_N} r^{1-N}\,. \tag{3.27}$$

Essendo

$$\Phi_{x_i x_j}(x) = \frac{1}{\sigma_N}\left(\frac{\delta_{ij}}{\|x\|^N} - \frac{N\, x_i x_j}{|x|^{N+2}}\right) \tag{3.28}$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

si ha che $\Phi$ è armonica in $R^N \backslash \{0\}$.
Sia $y$ un punto interno ad $\Omega$ e sia $r$ tale che l'intorno sferico $S_r(y)$ di $y$ di raggio $r$ sia contenuto in $\Omega$. Allora la funzione $\Phi(x-y)$ à armonica in $\Omega \backslash S_r(y)$.
Se $u$ è armonica in $A$, per la (3.24) si ha

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_{\partial\Omega}\left[u(x)\frac{d\Phi}{d\nu}(x-y) - \Phi(x-y)\frac{du}{d\nu}(x)\right] d\sigma \\ &+\; \int_{\partial S_r(y)}\left[u(x)\frac{d\Phi}{d\rho}(x-y) - \Phi(x-y)\frac{du}{d\rho}(x)\right] d\sigma \end{aligned} \tag{3.29}$$

dove l'operatore $\frac{d}{d\rho}$ nel secondo integrale indica la derivata nella direzione radiale.
Risulta

$$\left|\int_{\partial S_r(y)} \Phi(x-y)\frac{du}{d\rho}(x)\, d\sigma\right| \leq \begin{cases} \left(\max\limits_{\bar\Omega}\|\nabla u\|\right) r|\log r| & \text{se } N = 2 \\ \\ \left(\max\limits_{\bar\Omega}\|\nabla u\|\right) \dfrac{r}{N-2} & \text{se } N > 2 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial S_r(y)} \Phi(x-y)\frac{du}{d\rho}(x)\, d\sigma = 0\,. \tag{3.30}$$

Tenendo conto della (3.27) si ha anche

$$-\int_{\partial S_r(y)} u(x)\frac{d\Phi}{d\rho}(x-y)\, d\sigma = \Phi'(r)\int_{\partial S_r(y)} u\, d\sigma = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{\partial S_r(y)} u\, d\sigma\,.$$

Per il teorema della media integrale abbiamo

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{\partial S_r(y)} u\, d\sigma = u(y)$$

e quindi

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial S_r(y)} u(x)\frac{d\Phi}{d\rho}(x-y)\, d\sigma = -u(y)\,. \tag{3.31}$$

In definitiva, per le (3.29), (3.30) e (3.31), abbiamo

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left[u(x)\frac{d\Phi}{d\nu}(x-y) - \Phi(x-y)\frac{du}{d\nu}(x)\right] d\sigma\,. \tag{3.32}$$

## 3.4 La funzione di Green

Supponiamo che per ogni $y$ interno ad $\Omega$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_x h(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \\ h(x,y) = -\Phi(x-y) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammetta una soluzione $h(x,y)$.
Dalla (3.24) applicata alla coppia di funzioni $u$ e $h$ si ha

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u(x)\frac{d\,h}{d\nu}(x,y) - h(x,y)\frac{du}{d\nu}(x) \right] d\sigma = 0\,. \tag{3.33}$$

Introduciamo la funzione

$$G(x,y) = \Phi(x-y) + h(x,y)$$

nota come funzione di Green relativa a $\Omega$.
Sommando la (3.32) e la (3.33), ricordando che $G(x,y) = 0$ se $x \in \partial\Omega$, si ha

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{dG}{d\nu}(x,y)\,d\sigma\,. \tag{3.34}$$

La formula (3.34) suggerisce un metodo per risolvere il problema di Dirichlet in un dominio $\Omega$ per l'equazione di Laplace. Tale metodo consiste nel determinare la funzione di Green relativa a $\Omega$ per poi verificare che la (3.34) è effettivamente soluzione del problema. Una tale determinazione non è cosa semplice. Ci limitiamo qui al caso in cui l'insieme $\Omega$ sia la sfera $S_r$ di $R^N$ con centro nell'origine 0 e raggio $r$.
Per ogni $y \in R^N$ diverso da 0 poniamo

$$\bar{y} = \frac{r^2}{\|y\|^2}\,y\,. \tag{3.35}$$

Se $x \in \partial S_r$, essendo i triangoli di vertici $0, x, y$ e $0, x, \bar{y}$ simili, per la (3.35) si ha

$$\frac{\|y\|}{r} = \frac{\|x-y\|}{\|x-\bar{y}\|} = \frac{r}{\|\bar{y}\|}\,. \tag{3.36}$$

Se $x, y$ sono due punti di $S_r$ e $x \neq y$ poniamo

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\left(\dfrac{\|y\|}{r}(x-\bar{y})\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \\ \Phi(x) - \Phi(r) & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Per verificare che $G$ è la funzione di Green relativa a $S_r$ basta osservare che la funzione

$$\Phi\left(\frac{\|y\|}{r}\|x-\bar{y}\|\right)$$

è armonica in $R^N \backslash \{\bar{y}\}$ e, quindi, in $S_r$ e che, per la (3.36), risulta $G(x,y) = 0$ se $x \in \partial S_r$.
Essendo

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y >$$

e

$$\begin{aligned} \|x-\bar{y}\|^2 &= \|x\|^2 + \frac{r^4}{\|y\|^2} - 2\frac{r^2}{\|y\|^2} < x, y > \\ &= \frac{r^2}{\|y\|^2}\left(\frac{\|x\|^2\|y\|^2}{r^2} + r^2 - 2 < x, y >\right) \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \Phi\left(\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>}\right) \\ &- \Phi\left(\sqrt{\frac{\|x\|^2\|y\|^2}{r^2}+r^2-2<x,y>}\right). \end{aligned}$$

Da tale espressione di $G$ si ricava intanto che $G(x,y)=G(y,x)$.
Si ha inoltre

$$G(x,y) \leq 0\,. \tag{3.37}$$

A tale proposito basta verificare che

$$\|x\|^2+\|y\|^2 \leq \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{r^2}+r^2$$

e tale diseguaglianza puó essere riscritta nel modo seguente

$$(r^2-\|y\|^2)\|x\|^2 \leq (r^2-\|y\|^2)r^2\,.$$

Procediamo ora con il calcolo della derivata normale di $G$.
Se $x \in \partial S_r$, ricordando la (3.27) si ha

$$\frac{dG}{d\rho}(x,y) = \frac{1}{\sigma_N\|x-y\|^{N-1}}\left(\frac{\|x\|-\|y\|\cos\gamma}{\|x-y\|} - \frac{\|x\|\dfrac{\|y\|^2}{r^2}-\|y\|\cos\gamma}{\|x-y\|}\right)$$

dove $\gamma$ è l'angolo formato dai vettori $x$ e $y$. Risulta pertanto

$$\frac{dG}{d\rho}(x,y) = \frac{r^2-\|y\|^2}{\sigma_N r}\frac{1}{\|x-y\|^N}\,.$$

Quindi la formula di rappresentazione (3.34) diventa

$$u(y) = \frac{r^2-\|y\|^2}{\sigma_N r}\int_{\partial S_r}\frac{u(x)}{\|x-y\|^N}\,d\sigma_x\,. \tag{3.38}$$

La (3.38) è nota come formula integrale di Poisson e coincide nel caso bidimensionale con la (3.6). La formula (3.38) suggerisce l'espressione che deve avere la soluzione del problema di Dirichlet in $S_r$ relativo all'equazione di Laplace con dato al bordo $\varphi$. Si ha infatti il seguente risultato.

**Teorema 3.4.1** - *Se $\varphi$ è una funzione continua su $\partial S_r$ allora*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2-\|x\|^2}{\sigma_N r}\displaystyle\int_{\partial S_r}\frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^N}\,d\sigma_y & x \in S_r \\ \\ \varphi(x) & x \in \partial S_r\,. \end{cases}$$

*risolve il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } S_r \\ \\ u = \varphi & \text{su } \partial S_r\,. \end{cases}$$

**Dim.:** Per verificare la condizione al bordo si possono utilizzare le argomentazioni contenute nella dimostrazione del teorema 3.1.3.
Poiché è possibile derivare sotto il segno di integrale, per dimostrare che $u$ è armonica basta verificare che è armonica in $S_r$ la funzione

$$U(x) = \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|x-y\|^N} \, .$$

A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned} U_{x_i x_i} &= -\frac{2}{\|x-y\|^N} + 4N\frac{x_i(x_i-y_i)}{\|x-y\|^{N+2}} \\ &- N\frac{r^2-\|x\|^2}{\|x-y\|^{N+2}} + N(N+2)\frac{r^2-\|x\|^2}{\|x-y|^{N+2}}(x_i-y_i)^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta U = -\frac{2N}{\|x-y\|^N} + \frac{2N}{\|x-y\|^{N+2}}\left(\|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^N x_i y_i + r^2\right) = 0$$

essendo

$$\|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^N x_i y_i + r^2 =< x-y, x-y >= \|x-y\|^2 \, .$$

□

## 3.5 La proprietà di media

Si dice che una funzione $u$ continua in $\Omega$ ha la proprietà di media se, comunque si fissi $\bar{x} \in \Omega$, si ha

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\omega_N r^N}\int_{S_r(\bar{x})} u \, dx \tag{3.39}$$

per ogni sfera $S_r(\bar{x})$, di centro $\bar{x}$ e raggio $r$, contenuta in $\Omega$.
Riscriviamo la (3.39) nel modo seguente

$$\omega_N r^N u(\bar{x}) = \int_0^r d\rho \int_{\partial S_\rho(\bar{x})} u \, d\sigma \, .$$

Derivando rispetto a $r$ si ha

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}\int_{\partial S_r(\bar{x})} u \, d\sigma \, . \tag{3.40}$$

In modo analogo, integrando la (3.40), dalla (3.40) si ottiene la (3.39). Pertanto la proprietà di media di una funzione puó essere formulata facendo riferimento, indifferentemente, alla (3.39) o alla (3.40).

**Teorema 3.5.1** - *Una funzione armonica in $\Omega$ ha la proprietà di media.*

**Dim.:** Riscriviamo la (3.38) nel modo seguente

$$u(y) = \frac{r^2 - \|y-\bar{x}\|^2}{\sigma_N r}\int_{\partial S_r(\bar{x})} \frac{u(x)}{\|x-y\|^N} \, d\sigma_x \tag{3.41}$$

con $y \in S_r(\bar{x}) \subset \Omega$. Se si pone $y = \bar{x}$ in (3.41) si ottiene la (3.40). □

Una importante conseguenza della proprietà di media è costituita dal seguente risultato.

**Teorema 3.5.2** - *Sia $u$ una funzione continua in $\Omega$ connesso. Se $u$ ha la proprietà di media, in particolare se $u$ è armonica, allora $u$ non ha punti di massimo e minimo assoluti in $\Omega$ a meno che essa non sia costante.*

**Dim.:** Sia $\bar{x}$ un punto di massimo assoluto. Si ha allora

$$u(x) \le u(\bar{x}) = k \tag{3.42}$$

per ogni $x$ appartenente a un intorno sferico $S_r(\bar{x})$ di $\bar{x}$.
Riscriviamo la (3.39) nel modo seguente

$$\int_{S_r(\bar{x})} [u(x) - u(\bar{x})]\, dx = 0\,.$$

Dalla (3.42) si ottiene allora che $u$ assume il valore $k$ in $S_r(\bar{x})$.
Abbiamo quindi che l'insieme

$$E = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = k\}$$

è aperto. Ma ovviamente $E$ è anche chiuso. Essendo $\Omega$ connesso deve essere $E = \Omega$. Quindi $u$ è costante. □

Dal teorema 3.5.2 discende il seguente risultato noto come principio di massimo.

**Teorema 3.5.3** - *Sia $u$ una funzione continua nella chiusura di $\Omega$ e armonica o, piú semplicemente, dotata della proprietà di media in $\Omega$. Allora essa assume il valore minimo e il valore massimo su $\partial\Omega$. Si ha cioè*

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u &= \max_{\partial\Omega} u \\ \inf_{\Omega} u &= \min_{\partial\Omega} u\,. \end{aligned}$$

Dal principio di massimo consegue che la soluzione del problema di Dirichlet in $\Omega$ per l'equazione di Laplace è unica.
Infatti se $u, v$ sono due soluzioni allora la funzione $w = u - v$ è armonica in $\Omega$ ed è nulla su $\partial\Omega$. Deve allora essere $w = 0$ ovvero $u = v$.

Concludiamo con la seguente caratterizzazione delle funzioni armoniche.

**Teorema 3.5.4** - *Una funzione $u$ continua in $\Omega$ è armonica se e solo se ha la proprietà di media.*

**Dim.:** Abbiamo già dimostrato (cfr. teorema 3.5.1) che una funzione armonica ha la proprietà di media.
Sia $u$ una funzione continua con la proprietà di media. Se $S$ è una sfera contenuta in $\Omega$ sia $v$ la soluzione del problema di Dirichlet in $S$ con dato $u$ su $\partial S$. La funzione $u - v$ ha ovviamente la proprietà di media ed è nulla su $\partial S$. Per il teorema 3.5.3 si ha $u = v$ in $S$. Quindi $u$ è armonica in $S$. Essendo $S$ una generica sfera contenuta in $\Omega$ allora $u$ è armonica in tutto $\Omega$. □

# Capitolo 4

# Il teorema dei numeri primi

## 4.1 La funzione zeta di Riemann

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{4.1}$$

con $z = x + i\,y$.

**Teorema 4.1.1** - *La serie* (4.1) *converge nel semipiano* $x > 1$ *ad una funzione olomorfa.*

*Dim.* Si ha $|n^{-z}| = n^{-x}$. La serie (4.1) è allora totalmente e, quindi, uniformemente convergente in ogni semipiano $x \geq \delta$ con $\delta > 1$. Per la proposizione 2.3.1 la somma della serie (4.1) è olomorfa nel semipiano $x > 1$ . Si ha inoltre

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta} \tag{4.2}$$

se $x \geq \delta$.

La funzione somma della serie (4.1) è prolungabile analiticamente nel semipiano $x > 0$ privato del punto $z = 1$. Sussiste infatti il seguente risultato.

**Teorema 4.1.2** - *Esiste una funzione* $H$ *olomorfa nel semipiano* $x > 0$ *tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{z-1} + H(z) \tag{4.3}$$

*se la parte reale* $x$ *di* $z$ *è maggiore di* 1.

**Dim.:** Per la proposizione 2.3.4 le funzioni

$$\delta_n(z) = \frac{1}{n^z} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^z}\, dt \tag{4.4}$$

sono intere cioè olomorfe in tutto il piano complesso.
Se $t \in [n, n+1]$ si ha

$$\frac{1}{n^z} - \frac{1}{t^z} = -\int_n^t \frac{d}{d\tau} \tau^{-z}\, d\tau = z \int_n^t \tau^{-z-1}\, d\tau$$

e quindi

$$\left|\frac{1}{n^z} - \frac{1}{t^z}\right| \leq \frac{|z|}{n^{x+1}}\,.$$

Poiché

$$\delta_n(z) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{t^z}\right) dt$$

si ha

$$|\delta_n(z)| \leq \frac{|z|}{n^{x+1}}\,. \tag{4.5}$$

La (4.5) comporta che la serie di termine generale $\delta_n$ converge uniformemente sui compatti del semipiano $x > 0$ ad una funzione $H$ che risulta olomorfa in base alla proposizione 2.3.3.
Dalla (4.4) si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} = \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^z} + \sum_{n=1}^{N} \delta_n(z)$$

da cui, facendo divergere $N$, si ottiene l'identità (4.3). □

Poniamo

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + H(z)\,. \tag{4.6}$$

La funzione $\zeta$ è nota come zeta di Riemann.
Per la (4.2) la funzione (4.6) è limitata in ogni semipiano $x \geq \delta$ con $\delta > 1$.Ció non è piú vero se si prende $z = x + i\,y$ nel semipiano $x \geq 1$. È possibile peró ottenere dei risultati che descrivono il conportamento asintotico di $\zeta$ e $\zeta'$.

**Lemma 4.1.1** - *Sia $\alpha \in [0,1]$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $C_1(\varepsilon)$ tale che*

$$|\zeta(x + i\,y)| \leq C_1(\varepsilon)|y|^{1-\alpha+\varepsilon} \tag{4.7}$$

*se $x \geq \alpha$ e $|y| \geq \beta > 0$.*

**Dim.:** Se $z = x + i\,y$ dalla (4.4) si ha

$$|\delta_n(z)| \leq \frac{1}{n^x} + \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{2}{n^x} \leq \frac{2}{n^\alpha}\,. \tag{4.8}$$

Per la (4.5) si ha anche

$$|\delta_n(z)| \leq \frac{|z|}{n^{\alpha+1}}\,. \tag{4.9}$$

Per le (4.8) e (4.9) si ha allora

$$|\delta_n(z)| = |\delta_n(z)|^{1-\alpha+\varepsilon}|\delta_n(z)|^{\alpha-\varepsilon} \leq \left(\frac{|z|}{n^{\alpha+1}}\right)^{1-\alpha+\varepsilon}\left(\frac{2}{n^\alpha}\right)^{\alpha-\varepsilon} \leq 2\,\frac{|z|^{1-\alpha+\varepsilon}}{n^{1+\varepsilon}}$$

e quindi, ricordando la (4.6),

$$|\zeta(z)| \leq \frac{1}{|z-1|} + 2|z|^{1-\alpha+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\,. \tag{4.10}$$

Se $x \geq 2$ la (4.7) sussiste in quanto la funzione $\zeta$ è limitata in tale semipiano. Se $x \in [\alpha, 2]$ e $|y|$ è maggiore di una costante positiva allora la (4.10) si trasforma facilmente nella (4.7). □

**Lemma 4.1.2** - *Sia $x \geq 1$ e $|y| \geq 1$. Allora per ogni $\varepsilon$ sufficientemente piccolo esiste una costante $C_2(\varepsilon)$ tale che*

$$|\zeta'(x + i\, y)| \leq C_2(\varepsilon)|y|^{\varepsilon}\,. \tag{4.11}$$

**Dim.:** Dalla formula integrale di Cauchy (1.37), derivando sotto il segno di integrale, si ha

$$\zeta'(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{+\gamma}\frac{\zeta(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\xi$$

dove $\gamma$ è la circonferenza con centro in $z = x + i\, y$ e raggio $\varepsilon$. Si ha quindi

$$\zeta'(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\zeta\left(z + \varepsilon e^{i\theta}\right)e^{-i\theta}\,d\theta\,.$$

La circonferenza $\gamma$ si trova nel semipiano $x \geq 1 - \varepsilon$ e, se $\varepsilon < 1$, nell'insieme $|y| \geq 1 - \varepsilon$.
È possibile applicare il lemma 4.1.1. Dalla (4.7) con $\alpha = 1 - \varepsilon$ abbiamo

$$|\zeta'(z)| \leq C_2(\varepsilon)|y|^{2\varepsilon}$$

ovvero la (4.11) con $2\varepsilon$ al posto di $\varepsilon$. □

## 4.2 Prodotti infiniti

Data una successione $\{a_k\}$ si consideri la successione il cui termine generale è

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)\,.$$

Se essa converge il suo limite

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k) \tag{4.12}$$

prende il nome di prodotto infinito della successione $\{1 + a_k\}$.

**Lemma 4.2.1** - *Se la serie di termine generale $a_k$ converge assolutamente allora il prodotto infinito della successione $\{1 + a_k\}$ converge. La quantità (4.12) è uguale a zero se e solo se uno dei fattori si annulla.*

**Dim.:** Poiché la serie di termine generale $a_k$ converge si ha

$$|a_k| \leq \frac{1}{2} \tag{4.13}$$

a partire da un opportuno indice $\bar{k}$.
Consideriamo la funzione

$$\log(1 + z) = \log|1 + z| + i\mathrm{Arg}(1 + z)$$

con $\mathrm{Arg}(1 + z) \in ] - \pi, \pi[$. Se $|z| < 1$ si ha

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} \tag{4.14}$$

e quindi

$$|\log(1+z)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \log 2\,.$$

La funzione

$$\frac{\log(1+z)}{z}$$

è olomorfa per $|z| < 1$.
Se $|z| \le 1/2$, per il teorema 1.9.7 si ha

$$\left|\frac{\log(1+z)}{z}\right| \le \max_{|z|=1/2} \left|\frac{\log(1+z)}{z}\right| = 2 \max_{|z|=1/2} |\log(1+z)| \le 2\log 2 < 2$$

e quindi, per la (4.13),

$$|\log(1+a_k)| \le 2|a_k|$$

se $k \ge \bar{k}$.
Pertanto la serie

$$\sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \log(1+a_k)$$

è anch'essa assolutamente convergente. Se $S$ è la sua somma si ha

$$\prod_{k=\bar{k}}^{\infty}(1+a_k) = \exp\left(\sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \log(1+a_k)\right) = e^S \ne 0\,.$$

All'inizio della domostrazione abbiamo escluso un numero finito di termini della successione $\{a_k\}$. Prendendo in considerazione anche i corrispondenti termini nel prodotto infinito si ottiene che questo è nullo solo se è nullo uno dei suoi fattori. $\square$

**Proposizione 4.2.1** - *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in un insieme aperto $A$. Se per ogni $z$ in $A$ si ha $|f_n(z) - 1| \le c_n$ e la serie di termine generale $c_n$ converge allora il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in $A$ ad una funzione olomorfa $f$.*

**Dim.:** Se $f_n(z) = 1 + a_n(z)$ si ha $|a_n(z)| \le c_n$. Quindi si puó argomentare come nel lemma 4.2.1. Le stime comportano la convergenza uniforme del prodotto infinito. L'olomorfia di $f$ discende allora dalla proposizione 2.3.1.

## 4.3 Proprietà di $\zeta$

Prendiamo le mosse dal seguente risultato che consente di scrivere la funzione $\zeta$ come prodotto infinito di fattori in cui compaiono solo i termini della successione $\{p_n\}$ dei numeri primi ordinati in modo crescente.

**Lemma 4.3.1** - *Se $z = x + i\,y$ e $x > 1$ allora*

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}\,. \tag{4.15}$$

**Dim.:** Proviamo dapprima la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \tag{4.16}$$

con $x$ numero reale maggiore di uno.
Siano $N, M$ due interi tali che $N \leq M$. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica ogni intero $n \leq N$ puó essere scritto in un unico modo como prodotto di primi ciascuno dei quali è minore o uguale a $N$ e compare meno di $M$ volte nella scomposizione. Si ha pertanto

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{p_n^{2x}} + \cdots + \frac{1}{p_n^{Mx}}\right)$$

da cui, essendo

$$1 + \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{p_n^{2x}} + \cdots + \frac{1}{p_n^{Mx}} < \frac{1}{1 - p_n^{-x}} ,$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} < \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} .$$

Facendo divergere $N$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \leq \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} . \tag{4.17}$$

Si ha anche

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{p_n^{2x}} + \cdots + \frac{1}{p_n^{Mx}}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} .$$

Facendo prima divergere $M$ si ha

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} ,$$

poi, passando al limite per $N$ che tende ad infinito, abbiamo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} . \tag{4.18}$$

Dalle (4.17) e (4.18) si ottiene la (4.16).
Sia $z = x + i\,y$. Posto

$$f_n(z) = \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$$

si ha

$$|f_n(z) - 1| = \frac{1}{|p_n^z - 1|} \leq \frac{1}{p_n^x - 1} .$$

Se $x \geq \delta > 1$ si ha allora

$$|f_n(z) - 1| < \frac{2}{n^\delta} .$$

Si puó applicare la proposizione 4.2.1 e concludere che il prodotto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$$

è una funzione olomorfa nel semipiano $x > 1$. Essa, per la (4.16), coincide con $\zeta$ sulla semiretta reale $x > 1$ e, per l'unicità del prolungamento analitico, è uguale a $\zeta$ in tutto il semipiano $x > 1$. Si ha allora la (4.15). $\square$

Richiamiamo il seguente risultato sulle serie doppie.

**Lemma 4.3.2** - *Sia data una successione doppia $\{a_{mn}\}$ di numeri complessi tale che risulti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|\right) < +\infty \,. \tag{4.19}$$

*Allora la serie doppia di termine generale $\{a_{mn}\}$ converge e si ha*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) \,.$$

*Inoltre la somma della serie non cambia se se ne riordinano i termini in modo arbitrario.*

**Lemma 4.3.3** - *Posto $c_n = 1/m$ se $n = p^m$ con $p$ primo e $c_n = 0$ in tutti gli altri casi si ha*

$$\log\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^z} \tag{4.20}$$

*per ogni $z = x + i\,y$ con $x > 1$.*

**Dim.:** Per la proposizione 1.5.2 ha senso definire nel semipiano $x > 1$ una determinazione olomorfa della funzione polidroma $\log\zeta$. In base alla (4.15), facendo ricorso allo sviluppo in serie di potenze (4.14), sussiste la seguente formula

$$\log\zeta(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - p_n^{-z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_n^{-mz}}{m}\right) \,.$$

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|p_n^{-mz}|}{m}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{mx}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x - 1} < +\infty \,,$$

per il lemma 4.3.2 possiamo riordinare i termini della serie doppia di termine generale

$$\frac{p_n^{-mz}}{m}$$

in modo da ottenere la (4.20). □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente fondamentale risultato.

**Teorema 4.3.1** - *La funzione $\zeta$ non si annulla nel semipiano $x \geq 1$.*

**Dim.:** Per la (4.15), ricordando la proposizione 4.2.1, si ha $\zeta(z) \neq 0$ per $x > 1$. Dobbiamo quindi verificare che $\zeta$ non si annulla sulla retta $x = 1$.
Supponiamo per assurdo che in $(1 + i\,y_0)$ la funzione $\zeta$ abbia uno zero almeno del primo ordine. Si ha allora

$$|\zeta(x + iy_0)|^4 \le 0((x-1)^4)$$

per $x$ prossimo a uno.
Per il teorema 4.1.2 il punto 1 è un polo del primo ordine per $\zeta$. Si ha pertanto

$$|\zeta(x)|^3 = 0((x-1)^{-3}) \,. \tag{4.21}$$

Infine, poiché $\zeta$ è olomorfa in $(1 + 2i\,y_0)$, la funzione $|\zeta(x + 2iy_0)|$ è limitata in un intorno di uno.

In definitiva abbiamo

$$\lim_{x\to 1} |\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy_0)\zeta(x+2iy_0)| = 0\,. \tag{4.22}$$

Osservato che, se $z = s + i\,t$, la parte reale di $n^{-z}$ è $n^{-s}\cos(t\log n)$, per la (4.20) si ha

$$\log|\zeta(x+i\,y)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}\cos(y\log n)$$

e

$$\log|\zeta(x+2i\,y)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}\cos(2y_0\log n)\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \log|\zeta^3(x)\zeta^4(x+i\,y)\zeta(x+2i\,y)| \\ = \;& 3\log|\zeta(x)| + 4\log|\zeta(x+i\,y)| + \log|\zeta(x+2i\,y)| \\ = \;& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}\left(3 + 4\cos(y\log n) + \cos(2y\log n)\right)\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$3 + 4\cos(y\log n) + \cos(2y\log n) = 2(1+\cos(y\log n))^2 \geq 0$$

risulta

$$\log|\zeta^3(x)\zeta^4(x+i\,y)\zeta(x+2i\,y)| \geq 0$$

da cui

$$|\zeta^3(x)\zeta^4(x+i\,y)\zeta(x+2i\,y)| \geq 1 \tag{4.23}$$

in contrasto con la (4.22). □

Concludiamo tale paragrafo con il seguente risultato che fornisce informazioni sul comportamento asintotico del reciproco di $\zeta$.

**Lemma 4.3.4** - *Per ogni $\varepsilon$ positivo esiste una costante $C_3(\varepsilon)$ tale che*

$$\frac{1}{|\zeta(x+iy)|} \leq C_3(\varepsilon)|y|^{\varepsilon} \tag{4.24}$$

*se $x \geq 1$ e $|y| \geq 1$.*

**Dim.:** Riscriviamo la (4.23) nel modo seguente

$$|\zeta(x+i\,y)|^4 \geq |\zeta(x)|^{-3}|\zeta(x+2i\,y)|^{-1}\,.$$

Per (4.7) con $\alpha = 1$ abbiamo quindi

$$|\zeta(x+i\,y)|^4 \geq C|\zeta(x)|^{-3}|y|^{-\varepsilon} \tag{4.25}$$

dove $C$, qui e nel seguito, denota una costante positiva il cui valore non è necessario che sia precisato.
Assumiamo che sia, per esempio, $x \geq 2$. Per la limitatezza di $\zeta$ nel semipiano $x \geq 2$ dalla (4.25) si ottiene

$$|\zeta(x+i\,y)| \geq C|y|^{-\varepsilon/4}\,.$$

Abbiamo quindi la (4.24) con $\varepsilon/4$ al posto di $\varepsilon$.
Sia $1 < x < 2$. Dalla (4.25), per la (4.21) si ha

$$|\zeta(x + i\,y)| \geq c_1(x-1)^{3/4}|y|^{-\varepsilon/4}\,. \tag{4.26}$$

Per il teorema di Lagrange e per la (4.11) esiste inoltre una costante $c_2$ tale che

$$|\zeta(x' + iy) - \zeta(x+iy)| \leq c_2|x'-x||y|^{\varepsilon}\,. \tag{4.27}$$

Se

$$K = \left(\frac{c_1}{2c_2}\right)^4 \tag{4.28}$$

consideriamo i punti della striscia $x \in ]1,2]$ descritti dall'equazione

$$x = 1 + K|y|^{-5\varepsilon} = x(y)\,.$$

Sia $x \geq x(y)$. Dalla (4.26) si ha

$$|\zeta(x + i\,y)| \geq c_1(x(y)-1)^{3/4}|y|^{-4\varepsilon} = c_1K^{3/4}|y|^{-4\varepsilon} \tag{4.29}$$

cioè ancora la (4.24) con $4\varepsilon$ al posto di $\varepsilon$.
Sia $x \leq x(y)$. Si ha intanto

$$|\zeta(x+iy)| \geq |\zeta(x(y)+iy)| - |\zeta(x(y)+iy) - \zeta(x+iy)|\,.$$

Il primo termine a secondo membro puó essere minorato utilizzando la (4.29). Per trattare il secondo è necessario riprendere la (4.27). Essendo

$$x(y) - x \leq x(y) - 1 = K|y|^{-5\varepsilon}$$

si ha

$$|\zeta(x(y) + i\,y) - \zeta(x + i\,y)| \leq c_2K|y|^{-4\varepsilon}\,.$$

Abbiamo pertanto

$$|\zeta(x + i\,y)| \geq \left(c_1K^{3/4} - c_2K\right)|y|^{-4\varepsilon}$$

da cui, ricordando l'espressione (4.28) di $K$,

$$|\zeta(x+iy)| \geq c_2K|y|^{-4\varepsilon}$$

ovvero la (4.24) con $4\varepsilon$ al posto di $\varepsilon$. □

## 4.4 La funzione di Tchebychev

Consideriamo la funzione di Tchebychev

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p \tag{4.30}$$

dove la sommatoria è estesa ai soli interi della forma $p^m$ con $p$ primo.
Tale funzione si puó scrivere anche nel seguente modo

$$\psi(x) = \sum_{1\leq n \leq x} l_n \tag{4.31}$$

dove $l_n$ vale $\log p$ se $n$ è una potenza di un numero primo $p$, vale zero in tutti gli altri casi. Fissato $x$, per ogni primo $p \le x$ denotiamo con $n_p$ il numero naturale tale che

$$p^{n_p} \le x < p^{n_p+1}\,.$$

Si ha

$$n_p \le \frac{\log x}{\log p}$$

ovvero

$$n_p = \left[\frac{\log x}{\log p}\right]$$

dove il simbolo $[\,\cdot\,]$ denota la funzione parte intera.
Esistono $n_p$ potenze di $p$ che sono minori o uguali a $x$. Quindi il termine $l_n$ che compare in (4.31) assume $n_p$ volte il valore $\log p$. Si ha allora la seguente ulteriore espressione per $\psi$

$$\psi(x) = \sum_{p\le x} n_p \log p = \sum_{p\le x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \tag{4.32}$$

dove la sommatoria è estesa questa volta a tutti i primi $p \le x$. Questi costituiscono un insieme finito la cui cardinalità si indica con $\pi(x)$. Dimostriamo il seguente risultato che collega il comportamento asintotico di tale funzione $\pi$ a quello della funzione $\psi$.

**Lemma 4.4.1** - *Se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{4.33}$$

*allora*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\pi(x)\frac{\log x}{x}\right) = 1\,. \tag{4.34}$$

**Dim.:** Dalla (4.32) si ha

$$\psi(x) \le \sum_{p\le x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \pi(x)\log x$$

da cui, per la (4.33),

$$1 \le \liminf_{x\to\infty} \left(\pi(x)\frac{\log x}{x}\right)\,.$$

Ricorrendo di nuovo alla (4.32) si ha

$$\psi(x) = \sum_{p\le x} n_p \log p \ge \sum_{p\le x} \log p\,.$$

Se $\alpha < 1$ abbiamo

$$\psi(x) \ge \sum_{x^\alpha<p\le x} \log p \ge [\pi(x) - \pi(x^\alpha)]\log x^\alpha\,.$$

Poiché $x^\alpha \ge \pi(x^\alpha)$ risulta

$$\frac{\psi(x)}{x} + \alpha x^{\alpha-1}\log x \ge \alpha\pi(x)\frac{\log x}{x}$$

da cui, per la (4.33)

$$1 \ge \alpha \limsup_{x\to\infty} \left(\pi(x)\frac{\log x}{x}\right)\,.$$

Per $\alpha$ che tende a uno si ha

$$1 \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}\,.$$

Abbiamo in tal modo dimostrato la (4.34). $\square$

Introduciamo ora la funzione

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)\,dt \tag{4.35}$$

il cui comportamento asintotico è legato a quello di $\psi$ secondo quanto indicato nel seguente lemma.

**Lemma 4.4.2** - *Se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{4.36}$$

*allora sussiste la* (4.33)*.*

**Dim.:** Sia $\alpha > 1$. Essendo $\psi$ crescente si ha

$$\int_x^{\alpha x} \psi(t)\,dt \geq (\alpha-1)x\psi(x)$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x)}{x} &\leq \frac{1}{(\alpha-1)x^2}\left[\int_1^{\alpha x}\psi(t)\,dt - \int_1^x \psi(t)\,dt\right]\\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{\psi_1(\alpha x)}{(\alpha x)^2}\alpha^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2}\right]\end{aligned}$$

e quindi, per la (4.36),

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\alpha+1}{2}\,.$$

Facendo tendere $\alpha$ ad uno abbiamo

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leq 1\,. \tag{4.37}$$

Sia $\alpha < 1$. Si ha

$$\int_{\alpha x}^{x} \psi(t)\,dt \leq (1-\alpha)x\psi(x)$$

e quindi

$$\frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{\psi_1(\alpha x)}{(\alpha x)^2}\alpha^2\right]$$

da cui per la (4.36)

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{\alpha+1}{2}\,.$$

Facendo anche in questo caso tendere $\alpha$ a uno otteniamo

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} \geq 1\,. \tag{4.38}$$

Dalle (4.37) e (4.38) si ricava la (4.33). $\square$

Fissato un numero reale $c$ positivo consideriamo la retta del piano complesso

$$\gamma_c = \{c + i\,y\} \tag{4.39}$$

con l'orientamento delle $y$ crescenti.

Sussiste il seguente risultato.

**Lemma 4.4.3** - *Se a è un numero reale positivo allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_c} \frac{a^z}{z(z+1)}\,dz = \begin{cases} 0 & se\ 0 < a \le 1 \\ \dfrac{a-1}{a} & se\ a > 1\,. \end{cases} \tag{4.40}$$

**Dim.:** Poniamo

$$f(z) = \frac{a^z}{z(z+1)}\,.$$

Consideriamo dapprima il caso $a > 1$.
Fissato $r > c+1$ sia $\Gamma_r$ il contorno costituito dal segmento $S_r$ della retta $\gamma_c$ i cui estremi sono i numeri complessi $c-ir$, $c+ir$ e la semicirconferenza $C_r$, di raggio $r$, con centro nel punto dell'asse reale di ascissa $c$, collocata nel semipiano a sinistra di $\gamma_c$. Orientiamo $\Gamma_r$ in senso antiorario. Osservato che all'interno di $\Gamma_r$ la funzione $f$ presenta due poli del primo ordine nei punti 0 e 1, per il teorema 1.9.1 si ha

$$\int_{+\Gamma_r} f(z)\,dz = \int_{+S_r} f(z)\,dz + \int_{+C_r} f(z)\,dz = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-1)]\ .$$

Per la (1.65) si ha $\mathrm{Res}(f,0) = 1$ e $\mathrm{Res}(f,-1) = -a^{-1}$. Abbiamo pertanto

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{+S_r} f(z)\,dz + \int_{+C_r} f(z)\,dz\right] = 1 - \frac{1}{a}\,.$$

Poiché $|a^z| = a^x \le a^c$ se $z \in C_r$ si ha

$$\lim_{z\to\infty} (z-c)f(z) = 0\,.$$

Per il lemma 1.10.1 risulta

$$\lim_{r\to\infty} \int_{+C_r} f(z)\,dz = 0$$

per cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_c} f(z)\,dz = 1 - \frac{1}{a}\,.$$

Se $a \in ]0,1]$ si ragiona come nel caso precedente sostituendo la semicirconferenza $C_r$ con la sua simmetrica rispetto a $\gamma_c$. Su tale semicirconferenza si ha $|a^z| = a^x \le 1$. Inoltre in questo caso all'interno del contorno non esistono punti singolari di $f$. Ragionando come nel caso precedente si ottiene l'asserto. □

Proponiamo infine una ulteriore espressione per la funzione $\psi_1$.

**Lemma 4.4.4** - *Per ogni $c > 1$ si ha*

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_c} \frac{x^{z+1}}{z(z+1)}\,\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz\,. \tag{4.41}$$

**Dim.:** Per la proposizione 2.3.3 si puó derivare termine a termine la (4.20). Si ha

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \log n}{n^z}$$

da cui, ricordando l'espressione dei coefficienti $c_n$ descritta nell'enunciato del lemma 4.3.3,

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n}{n^z}\,. \tag{4.42}$$

Se $t \leq x$ per la (4.31) si ha

$$\psi(t) = \sum_{1\leq n\leq x} l_n \chi_n(t)$$

dove

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq n \\ 0 & \text{se } t < n\,. \end{cases}$$

Dalla (4.35) si ha

$$\psi_1(x) = \sum_{1\leq n\leq x} l_n \int_1^x \chi_n(t)\,dt = \sum_{1\leq n\leq x} l_n (x-n)\,. \tag{4.43}$$

Per la (4.42) si ha

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_c} \frac{x^{z+1}}{z(z+1)}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz = \frac{x}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} l_n \int_{+\gamma_c}\frac{1}{z(z+1)}\frac{x^z}{n^z}\,dz\,.$$

Per il lemma 4.4.3 risulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_c}\frac{1}{z(z+1)}\frac{x^z}{n^z}\,dz = \begin{cases} 1-\dfrac{n}{x} & \text{se } n < x \\ 0 & \text{se } n \geq x \end{cases}$$

e quindi

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_c}\frac{x^{z+1}}{z(z+1)}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz = x\sum_{1\leq n\leq x} l_n \Big(1-\frac{n}{x}\Big)$$

da cui, ricorrendo alla (4.43), si ottiene la (4.41). □

## 4.5 Andamento asintotico della funzione $\pi$

Obiettivo di tale paragrafo finale è il seguente risultato noto come teorema dei numeri primi.

**Teorema 4.5.1** - *Il comportamento asintotico all'infinito della funzione $\pi$ è descritto dalla* (4.34).

**Dim.:** In base ai lemmi 4.4.1 e 4.4.2 basta verificare che sussiste la (4.36).
Poniamo

$$f(z) = -\frac{x^{z+1}}{z(z+1)}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,.$$

Fissato $T$ indichiamo con $+\gamma_T$ la curva orientata del piano complesso costituita dalla semiretta

$$\gamma_1 = \{1+it\,:\,t\leq -T\}$$

orientata dal basso verso l'alto, dal segmento

$$\gamma_2 = \{s-iT\,:\,1\leq s\leq 2\}$$

orientato da sinistra a destra, dal segmento

$$\gamma_3 = \{2+it\,:\,-T\leq t\leq T\}$$

orientato dal basso verso l'alto, dal segmento

$$\gamma_4 = \{s+iT\,:\,1\leq s\leq 2\}$$

orientato da destra a sinistra e dalla semiretta

$$\gamma_5 = \{1 + it \,:\, t \geq T\}$$

orientata dal basso verso l'alto.
Fissato $\delta$ positivo, sufficientemente piccolo, consideriamo inoltre la curva orientata $+\gamma_{T,\delta}$ costituita dalla semiretta $\gamma_1$ orientata come sopra, dal segmento

$$\gamma_2' = \{s - iT \,:\, 1 - \delta \leq s \leq 1\}$$

orientato da destra verso sinistra, dal segmento

$$\gamma_3' = \{1 - \delta + it \,:\, -T \leq t \leq T\}$$

orientato dal basso verso l'alto, dal segmento

$$\gamma_4' = \{s + iT \,:\, 1 - \delta \leq s \leq 1\}$$

orientato da sinistra verso destra e dalla semiretta $\gamma_5$ orientata come sopra.
Verifichiamo innanzitutto che

$$\int_{+\gamma_c} f(z)\, dz = \int_{+\gamma_T} f(z)\, dz \tag{4.44}$$

dove $\gamma_c$ è la retta (4.39) con $c > 1$.
Applichiamo il teorema di Cauchy al circuito costituito dalle curve $+\gamma_c$ e $-\gamma_T$, limitatamente ai punti $z = s + it$ con $|t|$ minore di una costante $K$, dal segmento orizzontale

$$\{s - i\,K \quad 1 \leq s \leq c\} \tag{4.45}$$

orientato da sinistra a destra e dall'altro segmento orizzontale

$$\{s + i\,K \quad 1 \leq s \leq c\} \tag{4.46}$$

orientato da destra a sinistra.
Per le (4.11) e (4.24) su tali segmenti si ha

$$\left|\frac{\zeta'(s \pm i\,K)}{\zeta(s \pm i\,K)}\right| = 0\left(K^{2\varepsilon}\right)$$

e quindi

$$|f(s \pm i\,K)| = 0\left(K^{-2+2\varepsilon}\right)\,.$$

Pertanto nell'espressione del valore dell'integrale di $f$ esteso al circuito sopra descritto i contributi relativi ai segmenti (4.45) e (4.46) tendono a zero al divergere di $K$. Ció implica la (4.44).
Consideriamo ora il circuito rettangolare $\gamma$, orientato in senso antiorario, costituito dai segmenti $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_4$, $\gamma_4'$, $\gamma_3'$ e $\gamma_2'$ . Si ha ovviamente

$$\int_{+\gamma} f(z)\, dz = \int_{+\gamma_T} f(z)\, dz - \int_{+\gamma_{T,\delta}} f(z)\, dz$$

e, per il teorema dei residui,

$$\int_{+\gamma} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{Res}(f, 1)\,.$$

Per la (4.3) risulta

$$f(z) = \frac{x^{z+1}(1 - (z-1)^2 H'(z))}{z(z+1)(z-1)(1 + (z-1)H(z))}\,.$$

Utilizzando la (1.65) si ha allora

$$\mathrm{Res}(f,1) = \frac{x^2}{2}\,.$$

Ció comporta che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_T} f(z)\,dz = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_{T,\delta}} f(z)\,dz$$

da cui, per la (4.44) e la (4.41),

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{T,\delta}} f(z)\,dz\,. \tag{4.47}$$

Su $\gamma_1$ o a $\gamma_5$ si ha $z = 1 + i\,t$ e quindi $|x^{1+z}| = |x^{2+i\,t}| = x^2$. Per le (4.11) e (4.24) abbiamo

$$\left|\int_{+\gamma_j} f(z)\,dz\right| \le C\,x^2 \int_T^\infty t^{2\varepsilon-2}\,dt$$

con $j = 1, 5$.
Se $\sigma$ è un numero positivo si puó scegliere $T$ in modo che

$$\left|\frac{1}{2\pi\,i}\int_{+\gamma_j} f(z)\,dz\right| \le \frac{\sigma}{2}\,x^2$$

sempre per $j = 1, 5$.
Se $\delta$ è sufficientemente piccolo la funzione $\zeta$ non si annulla sul segmento $\gamma_3'$ come conseguenza del teorema 4.3.1. Pertanto, essendo

$$|x^{1+z}| = x^{1+1-\delta} = x^{2-\delta}\,,$$

si ha

$$\left|\int_{+\gamma_3'} f(z)\,dz\right| \le C\,x^{2-\delta}\,.$$

Infine consideriamo gli integrali estesi ai segmenti orizzontali $\gamma_2'$ e $\gamma_4'$. Per essi si perviene alla seguente stima

$$\left|\int_{+\gamma_j'} f(z)\,dz\right| \le C\int_{1-\delta}^1 x^{1+s}\,ds \le C\frac{x^2}{\log x}$$

con $j = 2, 4$.
In definitiva dalla (4.47) si ha

$$\left|\psi_1(x) - \frac{x^2}{2}\right| \le \sigma x^2 + C\left(x^{2-\delta} + \frac{x^2}{\log x}\right)$$

ovvero

$$\left|\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right| \le \sigma + C\left(x^{-\delta} + \frac{1}{\log x}\right)\,.$$

Si ha quindi

$$\left|\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right| \le 2\sigma$$

definitivamente. Essendo $\sigma$ arbitrario si ha la (4.36). $\square$

# Capitolo 5

# Spazi di Banach e spazi di Hilbert

## 5.1 Richiami

L'obiettivo di tale capitolo è quello di trasferire in spazi astratti alcune proprietá che sono tipiche degli ordinari spazi euclidei. Solitamente il percorso che si segue parte dalla definizione di spazio metrico per arrivare, passando per gli spazi normati, alla struttura piú ricca, rappresentata dagli spazi di Hilbert, la cui topologia viene costruita a partire da un prodotto scalare.
Ricordiamo che per distanza o metrica in un insieme $M$ si intende un'applicazione

$$(x, y) \in M^2 \longrightarrow d(x, y) \in R\,,$$

la quale soddisfi le seguenti condizioni

$M_1)$ $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in M$ ,

$M_2)$ $d(x, y) \geq 0$ ,

$M_3)$ $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ ,

$M_4)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \qquad \forall x, y, z \in M$ .

L'ultima condizione è nota come proprietà triangolare. La coppia $(M, d)$ prende il nome di spazio metrico.

**Esempio 5.1.1** *Negli spazi euclidei $R^k$ la distanza tra due punti $(x_i)$, $(y_i)$ è data da*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}\,.$$

**Esempio 5.1.2** *Nell'insieme $C$ dei numeri complessi la distanza tra due suoi elementi è il modulo della loro differenza.*

Una volta che si sia introdotta una metrica in un insieme $M$ è possibile definire l'intorno sferico di centro $x$ e raggio $r > 0$

$$S_r(x) = \{y \in M \,:\, d(x, y) < r\}\,.$$

Si può allora riproporre in tale contesto la nozione di punto interno, di punto di accumulazione, di insieme aperto e chiuso, di insieme limitato e quant'altro si possa esprimere attraverso definizioni che facciano riferimento alla nozione di intorno e, piú in generale, di convergenza. Per quanto riguarda quest'ultima nozione, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di $(M, d)$, si pone

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0\,.$$

Altra importante nozione che in modo naturale può essere trasferita in tale contesto è quella di continuitá.
Sia $f$ una funzione definita in uno spazio metrico $(M_1, d_{M_1})$ a valori in un secondo spazio metrico $(M_2, d_{M_2})$; si dice che $f$ è continua in $x_0 \in M_1$ se, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d_{M_2}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

per ogni $x$ con $d_{M_1}(x, x_0) < \delta$.

Alcune metriche, in ogni caso tutte quelle di cui ci occuperemo nel seguito, si definiscono a partire da una norma. Con tale termine si intende un'applicazione definita in uno spazio vettoriale $V$

$$v \in V \longrightarrow \|v\| \in R\,, \tag{5.1}$$

che goda delle proprietà

$N_1)$ $\|v\| \geq 0\,, \quad \forall v \in V$ ,

$N_2)$ $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ ,

$N_3)$ $\|\alpha\, v\| = |\alpha|\, \|v\|\,, \quad \forall \alpha \in C, \quad \forall v \in V$ ,

$N_4)$ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|\,, \quad \forall v, w \in V$ ;

la $N_4)$ è nota come proprietà triangolare.

**Osservazione 5.1.1** *Dagli assiomi che caratterizzano la norma discende la seguente ulteriore proprietà che solitamente si accompagna alla classica proprietà triangolare*

$$|\,\|v\| - \|w\|\,| \leq \|v - w\|\,, \quad \forall v, w \in V\,. \tag{5.2}$$

*La* (5.2) *puó essere utilizzata tra l'altro per dimostrare che la funzione* (5.1) *è continua.*

Una volta introdotta una norma in uno spazio vettoriale si definisce la distanza tra due elementi $v, w \in V$ mediante la posizione

$$d(v, w) = \|v - w\|\,.$$

Si può facilmente verificare che sono soddisfatte le proprietà $M_1), \cdots, M_4)$ che caratterizzano una metrica.

**Osservazione 5.1.2** *Siano $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|^*$ due norme differenti definite sullo stesso spazio vettoriale $V$. Si dice che tali norme sono equivalenti se esistono due costanti positive $a, b$ tali che*

$$a\|x\| \leq \|x\|^* \leq b\|x\|\,, \quad \forall x \in V\,. \tag{5.3}$$

*Da* (5.3) *discende che le due norme inducono lo stesso tipo di convergenza e, quindi, la stessa struttura topologica; con ció intendiamo dire che una successione convergente rispetto alla metrica indotta da una delle due norme converge anche in relazione alla metrica indotta dall'altra.*

**Esempio 5.1.3** *Se $V = R^k$ con*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$$

*si denota l'usuale norma euclidea.*
*È possibile introdurre in $R^k$ ulteriori norme quali per esempio*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

*e*

$$\|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}\,.$$

*Tali norme inducono la stessa topologia in quanto entrambe equivalenti alla norma euclidea.*

Alcune norme possono essere definite a partire da un prodotto scalare cioè da una applicazione

$$(v,w) \in V^2 \longrightarrow < v,w > \in R \tag{5.4}$$

che goda delle seguenti proprietà

$S_1)$ $< v,v > \geq 0\,, \qquad \forall v \in V$ ,

$S_2)$ $< v,v >= 0 \Longleftrightarrow v = 0$ ,

$S_3)$ $< \alpha v,w >= \alpha < v,w >\,, \quad \forall \alpha \in R\,, \quad \forall v,w \in V$ ,

$S_4)$ $< v,w >=< w,v >\,, \quad \forall v,w \in V$ ,

$S_5)$ $< u+v,w >=< u,w > + < v,w >\,, \quad \forall u,v,w \in V$ .

**Osservazione 5.1.3** *Se l'applicazione* (5.4) *ha valori nel campo dei complessi, al posto della $S_4$) va inserita la seguente proprietà di Hermite*

$S_4'$) $< v,w >= \overline{< w,v >}, \qquad \forall v,w \in V$ .

*Da $S_4'$) e $S_3$) discende in modo ovvio*

$S_3'$) $< v,\alpha w >= \overline{\alpha} < v,w >\,, \quad \forall \alpha \in C, \quad \forall v,w \in V$ .

**Esempio 5.1.4** *In $R^k$ il prodotto scalare di due vettori $(x_i)$, $(y_i)$ è dato da*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\,.$$

*Se $(z_i)$, $(w_i)$ sono due vettori di $C^k$ il prodotto scalare diventa*

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \overline{w_i}\,.$$

Poniamo

$$\|v\| = \sqrt{< v,v >}\,, \quad \forall v \in V\,. \tag{5.5}$$

Verifichiamo che la (5.5) è una norma. Le prime tre proprietà sono di facile verifica. Per dimostrare la proprietà triangolare è necessario preliminarmente provare la seguente disuguaglianza di Schwarz

$$| < v,w > | \leq \|v\| \|w\|\,, \quad \forall v,w \in V\,. \tag{5.6}$$

Sia $w$ un vettore non nullo di norma unitaria. Si ha, utilizzando le proprietà del prodotto scalare,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \|v - < v,w > w\|^2 =< v - < v,w > w, v - < v,w > w > \\ &= \quad < v,v > - < v,w > \overline{< v,w >} - < v,w > \overline{< v,w >} + < v,w > \overline{< v,w >} \\ &= \quad \|v\|^2 - | < v,w > |^2. \end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$| < v,w > | \leq \|v\|\,. \tag{5.7}$$

Sia $w$ un generico vettore non nullo; inserendo $w/\|w\|$ al posto di $w$ in (5.7) e utilizzando le proprietà del prodotto scalare si ottiene allora facilmente la (5.6).
Dimostriamo ora che (5.5) verifica la proprietà $N_4$). Utilizzando la (5.5), le proprietà del prodotto scalare e la (5.6), si ha

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \; < v+w, v+w > = < v, v > +2\,\mathrm{Re}(< v, w >) + < w, w > \\ &\leq \; \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

da cui ovviamente $N_4$).

**Osservazione 5.1.4** *Ricordiamo che due vettori di $V$ si dicono perpendicolari se il loro prodotto scalare è nullo.*

Si pone a questo punto in modo naturale la seguente questione: è possibile stabilire se una norma può essere definita a partire da un prodotto scalare? La risposta a tale domanda è contenuta nel seguente risultato.

**Teorema 5.1.1 (Regola del parallelogramma)** *Una norma puó essere definita tramite la* (5.5) *a partire da un opportuno prodotto scalare se e solo se è soddisfatta la seguente identità*

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\,, \quad \forall u, v \in V\,. \tag{5.8}$$

Per i dettagli relativi alla dimostrazione rimandiamo all'Appendice.

Per concludere ricordiamo la seguente definizione.

**Definizione 5.1.1** *Una successione $\{x_n\}$ di uno spazio metrico dicesi successione di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad : \quad \forall n, m > \nu \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon\,. \tag{5.9}$$

In $R$ la (5.9) è condizione necessaria e sufficiente perché una successione converga. Tale caratterizzazione non vale in un generico spazio metrico; se ciò si verifica si dice che lo spazio metrico è completo.
Uno spazio normato, se completo, prende il nome di spazio di Banach, ovvero, di spazio di Hilbert, se la norma è definita a partire da un prodotto scalare mediante la (5.5).

## 5.2 Esempi di spazi funzionali

### 5.2.1 Spazi di funzioni

Un primo esempio di spazio normato è lo spazio vettoriale $C^0([a,b])$ delle funzioni continue in un intervallo $[a,b]$ dotato della norma

$$\|f\|_{C^0} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,; \tag{5.10}$$

la distanza tra due funzioni $f, g$ è allora

$$\|f-g\|_{C^0} = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|\,. \tag{5.11}$$

Si dimostra facilmente che una successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a,b])$ ad una funzione $f$ se e solo se tale successione converge ad $f$ uniformemente in $[a,b]$. Dal classico criterio di convergenza di Cauchy per le successioni uniformemente convergenti discende allora che $C^0([a,b])$ con la norma (5.10) è completo.

Ovviamente quanto sopra detto in relazione allo spazio $C^0([a,b])$ puó tranquillamente essere esteso al caso delle funzioni continue su un compatto di $R^k$.

Sempre in $C^0([a,b])$ è possibile definire norme differenti dalla (5.10). Un primo esempio è costituito da

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\, dx\,; \tag{5.12}$$

la distanza tra due funzioni $f, g$ in tal caso è

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\,. \tag{5.13}$$

Osserviamo che mediante le (5.11) e (5.13) si misura in modo differente la distanza tra due funzioni: nel primo caso infatti la (5.11) è la massima distanza verticale tra i grafici delle due funzioni, nel secondo la (5.13) misura in un certo senso l'area dell'insieme delimitato dai grafici delle due funzioni.
Piú in generale, se $p \in ]1, \infty[$, poniamo

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{5.14}$$

Si puó far vedere che (5.14) è una norma; limitiamoci qui ad osservare che solo nel caso $p = 2$ tale norma si ottiene a partire da un prodotto scalare che assume la forma

$$< f, g >= \int_a^b f\overline{g}\, dx\,.$$

Si puó dimostrare che $C^0$ con la norma (5.12) o (5.14) non è completo; si puó prendere spunto da tale considerazione per introdurre un tipo di integrale piú generale rispetto a quello di Riemann.

### 5.2.2 Spazi di successioni

Passiamo ora a discutere il caso degli spazi i cui elementi sono successioni $\{x_n\}$ a termini reali o, piú in generale, a termini complessi.
Indichiamo con $\ell^1$ lo spazio vettoriale delle successioni $x = \{x_n\}$ per le quali risulta

$$\|x|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\,. \tag{5.15}$$

Si verifica facilmente che $\|\cdot\|_1$ è una norma.
Piú in generale denotiamo con $\ell^p$, con $p > 1$, lo spazio di successioni $x = \{x_n\}$ per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\,.$$

Verifichiamo che

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \tag{5.16}$$

è una norma.

Ricordiamo la seguente nota disuguaglianza

$$\xi\eta \le \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q} \tag{5.17}$$

dove $\xi, \eta$ sono numeri non negativi e $q = \frac{p}{p-1}$ è l'esponente coniugato di $p$.
Siano $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ due successioni appartenenti rispettivamente a $\ell^p$ e $\ell^q$. Si ha allora, per la (5.17),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \frac{|y_n|}{\|y\|_q} &\le \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\, y_n| \le \|x\|_p \|y\|_q \,. \tag{5.18}$$

Siamo ora in grado di dimostrare la proprietà triangolare. Se $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ sono due elementi di $\ell^p$ si ha, per la (5.18),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p &\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \\ &\le \left\{ \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

da cui si ottiene la proprietà triangolare.
Infine con il simbolo $\ell^\infty$ si intende lo spazio delle successioni $x = \{x_n\}$ limitate con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| \,. \tag{5.19}$$

Un sottospazio notevole di $\ell^\infty$ è costituito dall'insieme $c_0$ delle successioni infinitesime.

**Osservazione 5.2.1** *Le norme* (5.19), (5.15) *richiamano analoghe norme introdotte in $R^k$ nell'Esempio* 5.1.3. *Contrariamente al caso degli spazi euclidei però tali norme non sono equivalenti nel senso che esse inducono topologie diverse.*

Tra tutti gli spazi $\ell^p$ un ruolo particolare riveste lo spazio $\ell^2$ che è l'unico, tra tali spazi, la cui norma è indotta dal prodotto scalare

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

ovviamente finito per la (5.18).
Ricordiamo che tutti gli esempi proposti in tale paragrafo sono da annovarare tra spazi vettoriali a dimensione infinita; con ció intendiamo dire che in tutti i casi considerati non è possibile determinare sistemi finiti di generatori. Almeno per $\ell^2$ vedremo più avanti che si puó introdurre un sistema infinito di generatori, una sorta di base, costituita dalla seguente successione

$$e_i = \{\delta_{ij}\} \tag{5.20}$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \\ 1 & \text{se } i = j\,. \end{cases}$$

In un certo senso quindi lo spazio $\ell^2$ si presenta come la naturale versione infinito dimensionale degli spazi euclidei.

Per caratterizzare la convergenza negli spazi $\ell^p$ è utile riportare il seguente risultato.

**Teorema 5.2.1** *Sia $\{x_n^{(k)}\}$ una successione di elementi di $\ell^p$ con $p \in [1, +\infty[$; allora tale successione converge a $\{x_n\}$ se e solo se*

*i) per ogni $n \in N$ risulta*

$$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n\,;$$

*ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu$ tale che, per ogni $k$,*

$$\left(\sum_{i=\nu+1}^{\infty} |x_i^{(k)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon\,.$$

Quindi, contrariamente a quanto avviene negli spazi euclidei, la convergenza non è assicurata dalla semplice convergenza delle successioni numeriche costituite dai termini delle varie successioni che occupano la stessa posizione.
A tale proposito emblematico è il caso della successione (5.20). Si puó infatti facilmente verificare che le successioni numeriche formate dai termini della successione (5.20) che occupano la stessa posizione sono tutte infinitesime. La successione non tende però alla successione nulla. Infatti se cosí fosse, per la continuità della norma (cfr. Osservazione 5.1.1), la successione numerica $\{\|e_i\|_2\}$ dovrebbe essere infinitesima in contrasto col fatto che $\|e_i\|_2 = 1$ per ogni $i \in N$.

**Osservazione 5.2.2** *Se $x \in \ell^2$ si ha ovviamente*

$$\lim_{i\to\infty} < e_i, x >= \lim_{i\to\infty} x_i = 0\,.$$

*Si puó quindi affermare che la successione $\{e_i\}$ converge in qualche senso alla successione nulla. Tale tipo di convergenza viene detto convergenza debole.*

Per concludere enunciamo il seguente teorema di facile verifica.

**Teorema 5.2.2** *Gli spazi $\ell^p$ con $p \in [1, +\infty]$ sono completi. In particolare $\ell^2$ è uno spazio di Hilbert.*

## 5.3 Separabilità e compattezza

Richiamiamo la seguente

**Definizione 5.3.1** *Uno spazio metrico $M$ si dice separabile se esiste un sottoinsieme numerabile $D$ che sia denso in $M$, cioè tale che ogni elemento di $M$ è limite di una successione di elementi di $D$.*

**Osservazione 5.3.1** *La struttura dei reali è un primo significativo esempio di spazio metrico separabile: infatti l'insieme $Q$ dei razionali è numerabile e denso in $R$. Piú in generale lo spazio euclideo $R^k$ è anch'esso separabile: un sottoinsieme numerabile e denso è costituito dalle $k-$ple le cui componenti sono numeri razionali.*

**Osservazione 5.3.2** *Tutti gli spazi $\ell^p$ con $p \in [1, +\infty[$ sono spazi separabili. Un sottoinsieme numerabile e denso è costituito dall'insieme delle successioni con un numero finito di termini non nulli e, comunque, tutti razionali. Tra l'altro tale proprietà attribuisce a $\ell^2$ un ruolo centrale nella teoria degli spazi di Hilbert. Si puó infatti dimostrare che ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo a $\ell^2$ e, quindi, in qualche modo con esso identificabile.*

**Osservazione 5.3.3** *Lo spazio $\ell^\infty$ non è invece separabile. Si consideri l'insieme $S$ delle successioni i cui termini sono o zero o uno. Tale insieme non è numerabile, inoltre due suoi elementi distinti hanno distanza uno. Supponiamo che esista una successione $D$ densa in $\ell^\infty$ e ricopriamo $S$ con le sfere con centri i punti di $D$ e raggio $1/3$. In almeno una di queste devono esserci due punti di $S$; siano $x, y$ tali due punti e sia $z$ il centro della sfera. Si ha allora*

$$1 = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

*L'assurdo cui siamo pervenuti prova l'asserto.*

**Osservazione 5.3.4** *Lo spazio $C^0([a, b])$ con la norma (5.10) è anch'esso separabile. Ciò è conseguenza di un risultato, noto come Teorema di approssimazione di Weierstrass (cfr. Appendice). In base a tale risultato è possibile approssimare in modo uniforme una qualsiasi funzione continua mediante polinomi a coefficienti razionali.*

**Definizione 5.3.2** *Un sottoinsieme $K$ di uno spazio metrico dicesi compatto se ogni sua successione ha una sottosuccessione convergente ad un elemento dell'insieme stesso.*

Ricordiamo che la compattezza ha un ruolo importante anche nelle applicazioni dal momento che interviene, per esempio, ogni volta che si vuole minimizzare una funzione.

**Teorema 5.3.1 (Teorema di Weierstrass)** *Sia $f$ una funzione numerica continua in un compatto $K$ di uno spazio metrico. Allora $f$ è dotata di minimo e di massimo, esistono cioè due punti $x_m, x_M \in K$ tali che, per ogni $x \in K$,*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\,.$$

Sia

$$m = \inf_{x \in K} f(x)\,.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore è possibile determinare una successione $\{x_n\}$ di elementi di $K$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = m\,. \tag{5.21}$$

Essendo $K$ compatto dalla successione $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_h}\}$ convergente ad un elemento $\bar{x} \in K$. Per la continuità di $f$ risulta

$$\lim_{h \to \infty} f(x_{n_h}) = f(\bar{x})\,.$$

Tenendo presente la (5.21) si ottiene $f(\bar{x}) = m$, ovvero l'asserto.
In modo analogo si dimostra che $f$ ha massimo.

È noto che negli spazi euclidei ogni successione limitata ha un'estratta convergente. Da tale risultato discende tra l'altro che un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.
Tali proprietà non valgono in spazi a dimensione infinita (cfr. in Appendice il Teorema di Riesz). A tale proposito può essere utile ancora una volta ricordare la successione (5.20); tale successione è limitata ma da essa non è possibile estrarre ovviamente alcuna successione convergente. Altro

esempio riguarda $C^0([0,1])$: la successione di funzioni $\{x^n\}$ non ha nessuna sottosuccessione convergente perché essa, e quindi ogni sua sottosuccessione, converge puntualmente ad una funzione discontinua.
È possibile in molti casi caratterizzare i compatti di uno spazio metrico. Per quanto riguarda $C^0([a,b])$ tale caratterizzazione è oggetto del teorema di Ascoli-Arzelà la cui dimostrazione è riportata in Appendice.
Premettiamo la seguente

**Definizione 5.3.3** *Le funzioni appartenenti ad un sottoinsieme $E$ di $C^0([a,b])$ si dicono equicontinue se, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{5.22}$$

*per ogni coppia di punti $x, y \in [a,b]$ con $\|x - y\| < \delta$ e per ogni $f \in E$.*

**Teorema 5.3.2 (Teorema di Ascoli-Arzelà)** - *Sia $E$ un sottoinsieme chiuso e limitato di $C^0([a,b])$; supponiamo inoltre che le funzioni di $E$ siano equicontinue. Allora $E$ è compatto.*

**Osservazione 5.3.5** *Un sottoinsieme $E$ di $\ell^2$ è compatto se è limitato e se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice $\nu$ tale che risulti*

$$\sum_{i=\nu+1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \varepsilon^2$$

*comunque si prenda $\{\xi_i\} \in E$.*

## 5.4 Appendice

### 5.4.1 Regola del parallelogramma

Dimostriamo che la regola del parallelogramma (5.8) caratterizza le norme che si possono ottenere a partire da un prodotto scalare secondo quanto indicato nella (5.5).
È intanto evidente che una norma definita a partire da un prodotto scalare soddisfa la (5.8). Dimostriamo il viceversa. Si ponga

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \; ; \tag{5.23}$$

verifichiamo che (5.23) è effettivamente un prodotto scalare legato alla norma (5.5).
Si ha facilmente che $< x, y >=< y, x >$ e $< x, x >= \|x\|^2$.
Essendo

$$< x, z > + < y, z >= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \; ,$$

applicando la (5.8) con $(x+z)$ e $(y+z)$ al posto di $u, v$ e ricordando la (5.23), si ha

$$< x, z > + < y, z >= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right) = 2 < \frac{x+y}{2}, z > \; .$$

Se $y = 0$, essendo ovviamente $< y, z >= 0$, si ha

$$< x, z >= 2 < \frac{x}{2}, z > \; .$$

Sfruttando tale formula si ottiene allora

$$< x, z > + < y, z >= 2 < \frac{x+y}{2}, z >=< x+y, z >$$

cioè $S_5$). Ovviamente si ha anche

$$< \sum_{i=1}^{n} x_i, z >= \sum_{i=1}^{n} < x_i, z > \ . \tag{5.24}$$

Dalla (5.24), se $x_i = x$, si ha

$$< nx, z >= n < x, z > \tag{5.25}$$

ovvero, se $x_i = x/n$,

$$< \frac{x}{n}, z >= \frac{1}{n} < x, z > \ . \tag{5.26}$$

Pertanto, considerato un numero razionale $m/n$, per le (5.25) e (5.26), si ha

$$< \frac{m}{n} x, z >= m < \frac{x}{n}, z >= \frac{m}{n} < x, z > ,$$

cioè $S_3$) con $\alpha$ razionale. Infine, per la densitá di $Q$ in $R$ e per la proprietà di continuità della norma (cfr. Osservazione 5.1.2), si ottiene la $S_3$) per ogni $\alpha \in R$.

### 5.4.2 Il teorema di Riesz

**Teorema 5.4.1 (Lemma di Riesz)** *Sia $V$ un sottospazio lineare chiuso e proprio di uno spazio di Banach. Allora, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un elemento $u$ di norma unitaria tale che*

$$\mathrm{dist}(u, V) \geq 1 - \varepsilon \, . \tag{5.27}$$

Il fatto che $V$ sia chiuso e che sia un sottoinsieme proprio consente di scegliere un elemento $u_0 \notin V$ tale che $d = \mathrm{dist}(u_0, V) > 0$. Essendo

$$d = \inf_{v \in V} \|u_0 - v\| \, ,$$

per le proprietà dell'estremo inferiore esiste un elemento $v_0 \in V$ tale che

$$d \leq \|u_0 - v_0\| < \frac{d}{1 - \varepsilon} \, . \tag{5.28}$$

Allora il vettore di norma unitaria

$$u = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|}$$

verifica la (5.27). Infatti se $v$ è il generico elemento di $V$ si ha

$$\|u - v\| = \frac{\|u_0 - (v_0 + v\|u_0 - v_0\|)\|}{\|u_0 - v_0\|} \, .$$

Poiché $(v_0 + v\|u_0 - v_0\|) \in V$ si ha, per le (5.28),

$$\|u - v\| \geq \frac{d}{d(1 - \varepsilon)^{-1}} = 1 - \varepsilon \, ,$$

da cui, essendo $v$ arbitrariamente scelto in $V$, la (5.27).
Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 5.4.2 (Teorema di Riesz)** *Se la sfera unitaria di uno spazio di Banach è compatta allora lo spazio ha dimensione finita.*

Procediamo per assurdo. Esiste allora una successione di sottospazi vettoriali il cui $n-$mo termine $V_n$ ha dimensione $n$ ed è quindi chiuso; sia inoltre $V_n \subset V_{n+1}$. È possibile allora, per il Lemma di Riesz, costruire una successione di vettori $\{v_n\}$ di norma unitaria, con $v_n \in V_n$ e

$$\mathrm{dist}(v_n, V_{n-1}) \geq \tfrac{1}{2}\,.$$

Sia $n > m$; si ha allora $\|v_n - v_m\| > \frac{1}{2}$. Dalla successione $\{v_n\}$ non è possibile quindi estrarre alcuna sottosuccessione convergente.

### 5.4.3 Il teorema di Ascoli-Arzelà

Consideriamo una successione di punti

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots \tag{5.29}$$

densa in $[a, b]$. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $E$. Tale successione è limitata: quindi è limitata la successione numerica $\{f_n(y_1)\}$; da essa estraiamo una sottosuccessione convergente che denotiamo nel modo seguente

$$f_{11}(y_1), f_{12}(y_1), \cdots, f_{1n}(y_1), \cdots .$$

Consideriamo ora la successione numerica $\{f_{1n}(y_2)\}$; in quanto limitata da essa è possibile estrarre una sottosuccessione convergente

$$f_{21}(y_2), f_{22}(y_2), \cdots, f_{2n}(y_2), \cdots .$$

Con tale procedura si ottiene la seguente tabella ad infinite righe e colonne

$$\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{5.30}$$

con le seguenti caratteristiche:

a) ogni riga rappresenta una successione estratta da ciascuna delle successioni contenute nelle righe precedenti nonché dalla successione $\{f_n\}$;

b) la successione che occupa la riga $k-$ma converge in $y_k$ e quindi, per quanto detto al punto a), in ogni $y_h$ con $h < k$.

Consideriamo la successione diagonale, cioè la successione il cui termine $n-$mo è $g_n = f_{nn}$.
Tale successione converge in ogni punto $y_k$ in quanto essa, a parte un numero finito di termini, è estratta da tutte le successioni che costituiscono le righe della tabella (5.30).
Sfruttando l'equicontinuità è ora possibile dimostrare che la successione $\{g_n\}$ converge in ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ e che tale convergenza è uniforme. Fissato $\varepsilon > 0$ si determini $\delta$ secondo quanto indicato nella Definizione 5.3.3. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $m$ intervalli tutti di ampiezza inferiore a $\delta$ e scegliamo in ciascuno di tali intervalli un punto della successione (5.29); denotiamo tali punti con i simboli

$$z_1, z_2, \cdots, z_m\,.$$

Fissato un punto $x$ supponiamo che esso appartenga all'intervallo cui appartiene il punto $z_i$. Si ha allora

$$|g_k(x) - g_h(x)| \leq |g_k(x) - g_k(z_i)| + |g_k(z_i) - g_h(z_i)| + |g_h(z_i) - g_h(x)| < 3\varepsilon$$

vuoi per la condizione di equicontinuità (5.22) vuoi per la convergenza della successione numerica $\{g_k(z_i)\}$. È evidente che la stima vale per $h, k$ maggiori di un opportuno indice $\nu$, lo stesso indice $\nu$ a partire dal quale risulta, per la convergenza di $\{g_k(z_i)\}$,

$$|g_k(z_i) - g_h(z_i)| < \varepsilon .$$

Va sottolineato il fatto che le successioni numeriche $\{g_k(z_i)\}$ sono in numero finito. Ció è essenziale per poter concludere che la stima sopra ottenuta è uniforme al variare di $x$.
Abbiamo in tal modo dimostrato che $E$ è compatto in quanto da ogni sua successione abbiamo estratto una successione che converge uniformemente.
Osserviamo che è anche possibile invertire tale proposizione; si puó infatti dimostrare che se $E$ è compatto allora necessariamente $E$ deve essere un insieme chiuso, limitato e con la proprietà che le funzioni che ad esso appartengono sono equicontinue.

### 5.4.4 Il teorema di approssimazione di Weierstrass

Riportiamo la dimostrazione del seguente risultato di approssimazione di Weierstrass dovuta al matematico ucraino S. Bernstein.

**Teorema 5.4.3** *Data $f \in C^0([a,b])$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p$ tale che*

$$\|f - p\|_{C^0} < \varepsilon .$$

Supponiamo che l'intervallo di definizione sia l'intervallo $[0,1]$ e consideriamo i cosiddetti polinomi di Bernstein

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} .$$

Derivando rispetto a $x$ la classica formula del binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{5.31}$$

e moltiplicando per $x$ si ha

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} . \tag{5.32}$$

Differenziando due volte la (5.31) rispetto a $x$ e moltiplicando per $x^2$ si ottiene

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k} . \tag{5.33}$$

Ponendo $y = 1 - x$ nelle (5.31), (5.32) e (5.33) si ha rispettivamente

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$

Si ha pertanto

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
= \quad &\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2n\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
= \quad &[nx+n(n-1)x^2] - 2n^2x^2 + n^2x^2
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)\,. \tag{5.34}
$$

Per l'uniforme continuità di $f$, fissato $\varepsilon > 0$, si puó determinare un $\delta > 0$ tale che

$$
|f(x)-f(y)| < \varepsilon \qquad \forall x,y \in [0,1]\,; \tag{5.35}
$$

sia inoltre $M$ tale che

$$
|f(x)| \le M\,, \qquad \forall x \in [0,1]\,. \tag{5.36}
$$

Si ha allora

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p_n(x)| \quad &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\le \left|\sum_{|k-nx|<\delta n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&+ \left|\sum_{|k-nx|\ge\delta n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\,.
\end{aligned}
$$

Se $|k-nx| < n\delta$ si ha anche $|x-k/n| < \delta$ e quindi, per la (5.35),

$$
\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon\,;
$$

pertanto risulta

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{|k-nx|<\delta n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
\le \quad &\sum_{|k-nx|<\delta n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
< \quad &\varepsilon\left(\sum_{|k-nx|<\delta n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right) \\
\le \quad &\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right) = \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Se invece $|k-nx| \geq n\delta$ si ha

$$\left| \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

(per la (5.36))

$$\leq 2M \left( \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

$$\left( \text{essendo } \frac{k-nx}{n\delta} \geq 1 \right)$$

$$\leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \left( \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

(per la (5.34))

$$= \frac{2M}{n^2\delta^2}\, nx(1-x)\,.$$

Poiché $x(1-x) \leq 1/4$ in definitiva si ha

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}\,.$$

Se allora si sceglie $n$ in modo tale che risulti

$$n > \frac{M}{2n\delta^2}$$

si ha

$$|f(x) - p_n(x)| < 2\varepsilon$$

da cui l'asserto.

# Capitolo 6

# Integrazione secondo Lebesgue

## 6.1 Introduzione

L'approccio con la nozione di integrale solitamente avviene con la definizione che si fa risalire a G.Riemann. Tale definizione, modellata sul caso delle funzioni continue, mostra tutta la sua efficacia in tale ambito. Infatti, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue, uniformemente convergente in un intervallo $[a,b]$, allora la funzione limite è continua e si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx\,. \tag{6.1}$$

Quindi, in relazione all'operazione di passaggio al limite sotto il segno di integrale, l'impostazione alla Riemann è si rivela adeguata se si fa riferimento alla convergenza indotta dalla norma

$$\|f\|_{C^0} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

Introduciamo nello spazio $C^0([a,b])$ un diverso tipo di convergenza ricorrendo alla norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx\,. \tag{6.2}$$

Lo spazio cosí normato non è completo; esistono cioè successioni $\{f_n\}$, di Cauchy rispetto alla norma (6.2), che convergono, in qualche senso da precisare, a una funzione che non è continua. Si puó intervenire sulla definizione di integrale in modo da recuperare tali funzioni tra quelle integrabili e fare in modo che continui a valere la (6.1). Tale questione fu affrontata agli inizi del novecento da H.Lebesgue che propose una nozione di integrale adatta allo scopo. Premessa indispensabile è una teoria della misura di tipo nuovo anch'essa dovuta a Lebesgue.
Per motivare la necessità di precisare meglio la nozione di misura prendiamo in considerazione una classica questione di Calcolo delle Probabilità.
Rappresentiamo una successione di lanci di una moneta mediante una sequenza $\{a_n\}$ di cifre dove $a_n$ puó assumere uno dei due valori $0, 1$

$$\omega = a_1\,, a_2\,, \cdots, a_n\,, \cdots\,. \tag{6.3}$$

Indichiamo con $s_n(\omega)$ il numero di volte che, nei primi $n$ lanci, compare la faccia della moneta con il simbolo croce, cui facciamo corrispondere per esempio il valore numerico 1; si ha ovviamente

$$s_n(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i\,.$$

La legge dei grandi numeri afferma che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}\,; \tag{6.4}$$

c'è da aspettarsi cioè che il caso non preferisca una delle due facce della moneta.
La (6.4) va in qualche senso precisata; a tal fine è utile richiamare la nozione di insieme di misura nulla secondo Lebesgue.

**Definizione 6.1.1** *Si dice che un sottoinsieme $X$ di $R$ ha misura nulla secondo Lebesgue, in simboli $m(X) = 0$, se, fissato $\varepsilon$, esiste una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tale che $X \subseteq \bigcup_n I_n$ e*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon\,.$$

Sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle successioni (6.3), dette successioni di Bernoulli. Identifichiamo $\mathcal{B}$ con un opportuno insieme numerico nel modo seguente. Associamo alla successione (6.3) il numero reale, che continuiamo a denotare con $\omega$, la cui rappresentazione nel sistema binario è

$$\omega = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\,; \tag{6.5}$$

$\omega$ appartenente ovviamente all'intervallo $[0, 1]$.
L'applicazione in tal modo costruita non è a stretto rigore biunivoca. Infatti gli allineamenti (6.5) che presentano la cifra 0 al posto $n$ e la cifra 1 a partire dall'indice $n + 1$ vanno identificati con quelli che hanno tutte le cifre nulle a partire dalla cifra di posto $n + 1$ e con 1 al posto $n$. Se si prescinde da tali casi che, essendo in quantità numerabile, rappresentano un insieme trascurabile in quanto di misura nulla, è possibile identificare l'insieme $\mathcal{B}$ con tutto l'intervallo $[0, 1]$. Ad ogni sottoinsieme $E$ di $\mathcal{B}$ ($E$ è detto evento) corrisponde quindi un sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$.
Ció premesso enunciamo il seguente risultato secondo il quale la probabilità che il caso preferisca una delle due facce della moneta è effettivamente nulla.

**Legge dei grandi numeri** - *Consideriamo l'evento*

$$E = \left\{\omega \in [0, 1] \quad : \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n(\omega)}{n} \neq \frac{1}{2}\right\}\,;$$

*allora $m(E) = 0$.*

Riportiamo ora due esempi interessanti di insiemi di misura nulla.

**Esempio 6.1.1** *Denotiamo con $D$ l'insieme dei numeri razionali contenuti in $[0, 1]$. È noto che l'insieme $D$ è numerabile; risulta quindi $D = \{r_n\}_{n\in N}$.*
*Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in N$ consideriamo l'intervallo*

$$I_n = \left[r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right].$$

*Si ha $D \subset \bigcup_n I_n$ e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = 2\,\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon\,;$$

*dall'arbitrarietà di $\varepsilon$ discende che $m(D) = 0$.*
*In modo analogo si dimostra che ha misura nulla qualsiasi insieme numerabile.*
*Si puó inoltre verificare che $D$ non è misurabile secondo Peano-Jordan.*

**Esempio 6.1.2** *Posto* $E_0 = [0,1]$ *sia*

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

*l'insieme che si ottiente da* $E_0$ *eliminando i punti dell'intervallo aperto* $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$*, il cosiddetto terzo medio. Si elimini ora il terzo medio in ognuno dei due intervalli che compongono* $E_1$*; si ottiene in tal modo l'insieme*

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] .$$

*Cosí procedendo si ottiene una successione di plurintervalli* $\{E_n\}$ *con le seguenti caratteristiche:*

*i)* $E_n$ *è unione di* $2^n$ *intervalli di ampiezza* $3^{-n}$*;*

*ii) la successione* $\{E_n\}$ *è decrescente nel senso che* $E_{n+1} \subset E_n$*.*

*Allora*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n .$$

*si definisce insieme di Cantor. tale insieme, in quanto intersezione di chiusi, è chiuso. Si puó dimostrare che appartengono a* $C$ *soli i punti dell'intervallo* $[0,1]$ *che si possono rappresentare nella forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$$

*con la cifra* $\alpha_n$ *che assume o il valore* $0$ *o il valore* $2$*. Appartengono quindi a* $C$ *solo quei numeri di* $[0,1]$ *che, in base tre, si rappresentano mediante allineamenti in cui non compare mai la cifra* $1$*; ció tra l'altro comporta che* $C$ *non è numerabile ma ha la potenza del continuo. Si puó dimostrare inoltre che* $C$ *è privo di punti interni e di punti isolati.*
*Infine* $C$ *ha misura nulla; basta osservare che* $C \subset E_n$ *con* $E_n$ *plurintervallo di misura* $(\frac{2}{3})^n$*; ovviamente ció implica che è nulla anche la misura secondo Peano-Jordan di* $C$*.*
*L'insieme di Cantor è il primo significativo esempio di insieme frattale; per tali insiemi si puó introdurre la nozione di dimensione frattale che non sempre è rappresentata da un intero. Nel caso dell'insieme* $C$ *la dimensione è*

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63\ldots .$$

## 6.2 Misura secondo Lebesgue

Per definire la misura di un sottoinsieme di $R$ il punto di partenza consiste nell'attribuire intanto una misura agli intervalli $I = [a,b]$ per i quali $m(I) = b - a$.
Come passo successivo si considerino gli insiemi della forma $P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, i cosiddetti plurintervalli, unione di un numero finito di intervalli $I_k$ a due a due privi di punti interni comuni; si pone

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) . \tag{6.6}$$

Va osservato che la definizione (6.6) è ben posta dal momento che il valore numerico in tal modo determinato non dipende dal modo in cui $P$ viene decomposto in unione di intervalli.
Sia ora $A$ un sottoinsieme limitato di $R$. Per ricoprimento di intervalli di $A$ si intende una successione di intervalli $\{I_n\}$ tale che $A \subseteq \bigcup_n I_n$. Si definisce *misura esterna di* $A$ la quantità

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_n m(I_n)\right\} ,$$

dove l'estremo inferiore è ottenuto al variare dei ricoprimenti di intervalli di $A$.
Sembra quindi che con tale nozione si possa attribuire una misura ad un qualsiasi sottoinsieme di $R$. Purtroppo peró la misura esterna non risponde ad un requisito essenziale che deve avere una misura. Tale requisito, noto con il nome di numerabile additività, richiede che l'unione di una successione di insiemi misurabili, a due a due disgiunti, sia misurabile e che la sua misura sia la somma delle misure dei singoli insiemi. Per recuperare tale proprietà bisogna selezionare una opportuna classe di sottoinsiemi di $R$ mediante il seguente procedimento.

**Definizione 6.2.1** *Fissato $\varepsilon > 0$, supponiamo che esista un plurintervallo $P$ tale che, se*

$$S(P, A) = (P \setminus A) \cup (A \setminus P)\,,$$

*denota la differenza simmetrica di $P$ e $A$, si abbia*

$$m^*(S(P, A)) < \varepsilon\,. \tag{6.7}$$

*Si dice allora che $A$ è misurabile secondo Lebesgue e si pone $m(A) = m^*(A)$.*

**Osservazione 6.2.1** *Il significato della condizione* (6.7) *è evidente; in sostanza un insieme è misurabile se la sua misura puó essere approssimata bene quanto si vuole con la misura di un plurintervallo. Infatti, per la* (6.7)*, quella parte dell'insieme $A$ che non è contenuta nel plurintervallo $P$ puó essere ricoperta da una successione di intervalli tale che la somma delle loro misure non supera $\varepsilon$.*

La definizione di misurabilità puó essere estesa al caso di insiemi non limitati. Si dice che $A$ è misurabile se risultano misurabili gli insiemi limitati $A_r = A \cap [-r, r]$ per ogni $r > 0$. La misura secondo Lebesgue di $A$ è allora

$$m(A) = \lim_{r\to\infty} m(A_r)\,.$$

Ovviamente tale misura puó anche non essere finita.

Denotiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $R$ misurabili secondo Lebesgue.
Riportiamo, senza fornire la dimostrazione, le principali proprietà di $\mathcal{M}$ e di $m$.

**Teorema 6.2.1** *La famiglia $\mathcal{M}$ è un $\sigma$-anello; essa cioè gode delle seguenti proprietà*

- *se $A, B \in \mathcal{M}$ allora $A \cup B$ e $A \setminus B \in \mathcal{M}$ appartengono a $\mathcal{M}$;*
- *se $\{A_k\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{M}$ allora $\bigcup_k A_k \in \mathcal{M}$.*

*La misura $m$ è numerabilmente additiva. Sia $\{A_k\}$ una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti; si ha allora*

$$m\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k m(A_k)\,.$$

**Osservazione 6.2.2** *Ovviamente risulta misurabile anche un insieme che sia intersezione di una successione di insiemi misurabili.*

È appena il caso di ricordare che la nozione di misura secondo Lebesgue generalizza quella di misura secondo Peano-Jordan e che, come osservato nell'esempio 6.1.1, esistono insiemi misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan.
Costruiamo un ulteriore esempio; seguiremo una procedura simile a quella utilizzata nell'esempio 6.1.2 per definire l'insieme di Cantor.
Partiamo sempre dall'intervallo $[0, 1]$. Fissato $a \in ]0, 1[$ si cancellino i punti dell'intervallo aperto, di centro $\frac{1}{2}$ e di ampiezza $\frac{a}{2}$, i cui estremi sono $\frac{1}{2} - \frac{a}{4}$ e $\frac{1}{2} + \frac{a}{4}$. Dai due intervalli rimanenti cancelliamo gli intervalli aperti, centrati nei rispettivi punti medi, di ampiezza $\frac{a}{2^3}$. Restano quattro intervalli

chiusi: da questi, con la stessa procedura, cancelliamo gli intervalli aperti di ampiezza $\frac{a}{2^5}$. Dopo aver ripetuto il procedimento $n$ volte la misura del plurintervallo unione degli intervalli in tal modo eliminati è

$$a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}\right).$$

Iterando il procedimento si ottiene una successione di plurintervalli la cui unione ha per misura $a$; il complementare in $[0,1]$ di tale insieme ha quindi misura $1-a$. Poiché tale insieme è privo di punti interni la sua frontiera non ha misura nulla; quindi, esso non puó essere misurabile secondo Peano-Jordan.

## 6.3 Integrale secondo Lebesgue

Premettiamo la seguente definizione.

**Definizione 6.3.1** *Si dice che una funzione $f$ è misurabile se, per ogni $\alpha \in R$, risulta misurabile l'insieme*

$$\{x \mid f(x)>\alpha\}. \tag{6.8}$$

**Osservazione 6.3.1** *Nella definizione* 6.3.1 *il segno $>$ che compare in* (6.8) *puó essere sostituito da uno qualsiasi dei simboli $<$, $\leq$ oppure $\geq$.*

Si puó dimostrare facilmente che la somma e il prodotto di due funzioni misurabili è misurabile. Per i nostri scopi è di particolare interesse il seguente risultato.

**Teorema 6.3.1** *Sia $\{f_n\}$ una successione, eventualmente finita, di funzioni misurabili. Allora sono misurabili le funzioni*

$$\inf_n f_n(x), \quad \sup_n f_n(x), \quad \liminf_n f_n(x), \quad \limsup_n f_n(x).$$

*Se la successione ha per limite una funzione $f$ allora tale funzione è misurabile.*

Dimostriamo che è misurabile la funzione $\sup_n f_n(x)$. Basta osservare che

$$\{x \mid \sup_n f_n(x)>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid f_n(x)>\alpha\}$$

e ricordare che la famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è un $\sigma$-anello.
In modo analogo si procede per la funzione $\inf_n f_n(x)$. Questo basta anche per poter concludere che le funzioni $\liminf_n f_n(x)$, $\limsup_n f_n(x)$ e, eventualmente, $\lim_n f_n(x)$ sono misurabili.

**Definizione 6.3.2** *Dato un sottoinsieme $E$ di $R$ per funzione caratteristica di $E$ si intende*

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & se\ x\in E\\ \\ 0 & se\ x\notin E.\end{cases}$$

**Definizione 6.3.3** *Una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e limitati $E_i$, a due a due disgiunti,*

$$s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x) \tag{6.9}$$

*si dice funzione semplice.*

Le funzioni semplici (6.9) sono ovviamente misurabili.
Si ha il seguente risultato.

**Teorema 6.3.2** *Sia $f$ una funzione misurabile e non negativa. Esiste allora una successione crescente di funzioni semplici $\{s_k\}$ tale che*

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)\,.$$

Fissato un intero $k$ consideriamo gli insiemi misurabili

$$F_k = \{x \,|\, f(x) \geq k\}$$

e, se $j$ è un intero al piú uguale a $k\,2^k$,

$$F_{k,j} = \left\{ x \quad | \quad \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \right\}.$$

Consideriamo la funzione semplice

$$s_k(x) = k\,\chi_{F_k}(x) + \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k}\,\chi_{F_{k,j}}(x)\,. \tag{6.10}$$

Si verifica facilmente che la successione $\{s_k\}$ ha le proprietà richieste.

Le funzioni semplici hanno un ruolo strategico nella trattazione dell'integrale secondo Lebesgue in primo luogo perché per tali funzioni esso puó essere definito in modo naturale. Infatti, per la funzione semplice (6.9), il relativo integrale è

$$\int_E s\,dm = \sum_{i=1}^{n} c_i\, m(E_i \cap E)\,.$$

**Definizione 6.3.4** *Sia $f$ definita in $E \in \mathcal{M}$, misurabile e non negativa. Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni semplici $s$ tali che $s \leq f$. Per integrale secondo Lebesgue di $f$ esteso ad $E$ si intende la quantità, non necessariamente finita,*

$$\int_E f\,dm = \sup_{s\in\mathcal{S}} \int_E s\,dm\,.$$

*Se l'integrale è finito si dice che $f$ è sommabile.*

Resta da discutere il caso in cui la funzione sia di segno variabile. Le funzioni

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

sono misurabili per il teorema 6.3.1. Si dice allora che $f$ è sommabile se tali sono le due funzioni $f^+, f^-$; si pone allora

$$\int_E f\,dm = \int_E f^+\,dm - \int_E f^-\,dm\,.$$

L'insieme delle funzioni sommabili in un insieme $E \in \mathcal{M}$ si indica con il simbolo $\mathcal{L}(E)$. Ovviamente, se $f \in \mathcal{L}(E)$ e $F$ è un sottoinsieme misurabile di $E$ allora la restrizione di $f$ a $F$ appartiene a $\mathcal{L}(F)$. La definizione di integrale secondo Lebesgue è modellata sulla definizione di integrale secondo Riemann; la differenza sta nel diverso significato da attribuire alle funzioni semplici nei due contesti. Infatti in relazione all'integrale di Riemann le funzioni semplici sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

**Osservazione 6.3.2** *Diremo che una certa proprietà riferita a una o piú funzioni definite in un insieme $E \in \mathcal{M}$ sussiste quasi ovunque (sinteticamente q.o.) in $E$ se essa vale per tutti i punti di $E$ tranne che per quelli appartenenti ad un insieme di misura nulla.*

**Teorema 6.3.3** *Sia $E \in \mathcal{M}$; sussistono le seguenti proprietà.*

**a)** *Per ogni $\alpha, \beta \in R$ e per ogni $f, g \in \mathcal{L}(E)$ risulta*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, dm = \alpha \int_E f\, dm + \beta \int_E g\, dm\,;$$

**b)** *se $f, g \in \mathcal{L}(E)$ e $f \leq g$ q.o. in $E$ allora*

$$\int_E f\, dm \leq \int_E g\, dm\,;$$

**c)** *se $f \in \mathcal{L}(E)$ allora anche $|f| \in \mathcal{L}(E)$ e si ha*

$$\left| \int_E f\, dm \right| \leq \int_E |f|\, dm\,;$$

**d)** *se $E = \cup_n E_n$ con $\{E_n\}$ successione, eventualmente finita, di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora*

$$\int_E f\, dm = \sum_n \int_{E_n} f\, dm\,.$$

Vale inoltre la seguente ovvia proprietà

$$m(E) = 0 \Longrightarrow \int_E f\, dm = 0\,. \tag{6.11}$$

La (6.11) prende il nome di proprietà di assoluta continuità dell'integrale rispetto alla misura di Lebesgue. È utile ricordare che la (6.11) equivale alla seguente condizione

**(AC)** *Ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che*

$$\left| \int_E f\, dm \right| < \varepsilon$$

*per tutti gli insiemi $E \in \mathcal{M}$ con $m(E) < \delta$.*

## 6.4 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

In tale paragrafo riportiamo alcuni classici risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Cominciamo con il seguente risultato noto come teorema della convergenza monotona.

**Teorema 6.4.1** *Sia $E \in \mathcal{M}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots\,, \quad q.o. \text{ in } E \tag{6.12}$$

*e sia $f$ la funzione definita quasi ovunque in $E$ cui tende puntualmente la successione $\{f_n\}$. Si ha allora*

$$\int_E f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm\,. \tag{6.13}$$

La funzione $f$ è misurabile per il teorema 6.3.1.
Per la (6.12) risulta crescente la successione numerica il cui termine generale è

$$\int_E f_n \, dm \, ;$$

sia $L$ il suo limite. Poiché

$$\int_E f_n \, dm \le \int_E f \, dm$$

si ha

$$L \le \int_E f \, dm \, . \tag{6.14}$$

Dimostriamo che

$$L \ge \int_E f \, dm \, . \tag{6.15}$$

Sia $s$ una funzione semplice non negativa tale che $s(x) \le f(x)$. Fissato $\delta \in ]0, 1[$, poniamo $E_n = \{x \in E \, : \, f_n(x) \ge \delta s(x)\}$. La successione $\{E_n\}$ è crescente e risulta $E = \bigcup_n E_n$. Si ha

$$L = \lim_n \int_E f_n \, dm \ge \int_E f_n \, dm \ge \int_{E_n} f_n \, dm \ge \delta \int_{E_n} s \, dm \, ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\delta$,

$$L \ge \int_{E_n} s \, dm \, . \tag{6.16}$$

Dimostriamo ora che

$$\lim_n \int_{E_n} s \, dm = \int_E s \, dm \, .$$

Poniamo $A_1 = E_1$ e, se $n > 1$, $A_n = E_n \backslash E_{n-1}$. Per la proprietà **d)** del teorema 6.3.3 si ha

$$\int_E s \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} s \, dm = \lim_n \left( \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} s \, dm \right) = \lim_n \int_{E_n} s \, dm \, .$$

Dalla (6.16) si ha allora

$$L \ge \int_E s \, dm \, .$$

Dalla definizione di integrale secondo Lebesgue discende la (6.15) e, quindi, ricordando la (6.14), l'asserto.

**Teorema 6.4.2 (Lemma di Fatou)** *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni non negative e misurabili in un insieme $E \in \mathcal{M}$. Si ha allora*

$$\int_E \left( \liminf_{k \to \infty} f_k \right) \, dm \le \liminf_{k \to \infty} \left( \int_E f_k \, dm \right) \, . \tag{6.17}$$

Poniamo

$$g_n(x) = \inf_{k \ge n} f_k(x)$$

e

$$a_n = \inf_{k \ge n} \left( \int_E f_k(x) \right) \, .$$

Le funzioni $g_n$ sono misurabili per il teorema 6.3.1. Inoltre la successione $\{g_n\}$ è crescente e ha per limite la funzione
$$f = \liminf_{k\to\infty} f_k\,.$$
Risulta anche
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n(x)\right)\,.$$
Essendo $g_n(x) \le f_k(x)$ se $n \le k$ si ha
$$\int_E g_n\,dm \le \int_E f_k\,dm \qquad \forall k \ge n$$
e quindi
$$\int_E g_n\,dm \le a_n\,.$$
In definitiva, per il teorema 6.4.1, si ha
$$\int_E f\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,dm \le \lim_{n\to\infty} a_n$$
da cui l'asserto.

Terminiamo con il seguente risultato noto come teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

**Teorema 6.4.3** *Sia $E \in \mathcal{M}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili convergente q.o. in $E$ ad una funzione $f$; supponiamo inoltre che esista una funzione $g \in \mathcal{L}(E)$ tale che per ogni $n$*

$$|f_n(x)| \le g(x)\,, \quad q.o. \text{ in } E\,. \tag{6.18}$$

*Allora $f \in \mathcal{L}(E)$ e vale la* (6.13).

Facciamo vedere innanzitutto che $f$ è sommabile. Infatti per il lemma di Fatou e la (6.18) si ha
$$\int_E |f|\,dm = \int_E \lim_{n\to\infty}|f_n|\,dm \le \liminf_{n\to\infty}\int_E |f_n|\,dm \le \int_E g\,dm\,.$$
Essendo le funzioni $g+f_n$ non negative sempre per il lemma di Fatou si ha
$$\int_E (f+g)\,dm \le \liminf_k \int_E (f_k+g)\,dm = \liminf_k\left(\int_E f_k\,dm\right) + \int_E g\,dm$$
da cui
$$\int_E f\,dm \le \liminf_k\left(\int_E f_k\,dm\right)\,. \tag{6.19}$$

Allo stesso modo, prendendo in considerazione la successione di funzioni non negative $\{g-f_n\}$, si ha
$$\int_E (g-f)\,dm \le \liminf_k\left(\int_E (g-f_n)\,dm\right) = \int_E g\,dm - \limsup_k\left(\int_E f_k\,dm\right)$$
da cui
$$\limsup_k \int_E f_k\,dm \le \int_E f\,dm\,. \tag{6.20}$$

Da (6.19) e (6.20) si ottiene la (6.13).

Dimostriamo che una funzione limitata, integrabile secondo Riemann in $I = [a, b]$ è anche integrabile secondo Lebesgue e che i rispettivi integrali coincidono.
Per ogni $n$ decomponiamo $I$ in $2^n$ intervalli di eguale ampiezza i cui estremi denotiamo con $x_k$ ($k = 1, \cdots, 2^n$). Definiamo le funzioni semplici

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \left( \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \chi_{[x_{k-1},x_k]}(x) , \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \left( \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \chi_{[x_{k-1},x_k]}(x) .$$

Le successioni $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ sono monotone, la prima crescente, la seconda decrescente; siano $s, S$ i rispettivi limiti. Si ha ovviamente $s \le f \le S$. Inoltre, per il teorema 6.4.3, essendo $f$ integrabile secondo Riemann, risulta

$$0 \le \int_I (S - s)\, dm = \lim_n \int_I (S_n - s_n)\, dm = 0 .$$

Ció implica che $s = f = S$ e che l'integrale di Lebesgue di $f$ coincide con quello di Riemann.

Proponiamo una interessante ulteriore applicazione del teorema 6.4.3.
Consideriamo la seguente funzione di classe $C^\infty(R)$

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left[ \dfrac{1}{x^2 - 1} \right] & \text{se } |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{se } |x| \ge 1 , \end{cases}$$

dove la costante $c$ va scelta in modo tale che risulti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)\, dx = 1 . \tag{6.21}$$

Poniamo

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) ; \tag{6.22}$$

tale funzione è nota come *mollificatore.*
Se $f \in \mathcal{L}(R)$, consideriamo il seguente *prodotto di convoluzione*

$$f_\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(x - y) f(y)\, dy . \tag{6.23}$$

Sussiste il seguente risultato.

**Teorema 6.4.4** *Per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione $f_\varepsilon$ è di classe $C^\infty$. Se $f$ è continua si ha inoltre*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = f(x) \tag{6.24}$$

*uniformemente sui compatti di $R$.*

Scriviamo il rapporto incrementale di $f_\varepsilon$

$$\frac{f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} \left[ \eta\left(\frac{x+h-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] f(y)\, dy .$$

Per $h$ che tende a zero la funzione integranda tende a

$$\frac{d}{dx}\left[ \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right]$$

e, per il classico teorema di Lagrange, si maggiora con la funzione

$$\frac{1}{\varepsilon}\ (\max|\eta'|)\ |f| \in \mathcal{L}(R)\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
f'_\varepsilon(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_\varepsilon(x+h)-f_\varepsilon(x)}{h} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+h-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]f(y)\,dy \\
&\quad \text{(per il teorema 6.4.3)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+h-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\right\}f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]f(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

Essendo

$$\eta'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\eta'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,,$$

risulta

$$\frac{d}{dx}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] = \varepsilon\eta'_\varepsilon(x-y) = \varepsilon\frac{d}{dx}\left[\eta_\varepsilon(x-y)\right]\,.$$

Si ha in definitiva

$$f'_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left[\eta_\varepsilon(x-y)\right]f(y)\,dy\,.$$

Quindi $f_\varepsilon$ è derivabile e la sua derivata si ottiene derivando sotto il segno di integrale.
In modo analogo si ragiona per ottenere tutte le derivate successive.
Sia ora $f$ continua. Ricorrendo al cambio di variabili $x-y=\varepsilon z$ si ha

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)\,dy = \int_{-1}^{1}\eta(z)f(x-\varepsilon z)\,dz \tag{6.25}$$

da cui, tenendo presente la (6.21),

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}\eta(z)f(x-\varepsilon z)\,dz - f(x)\int_{-1}^{1}\eta(z)\,dz\right| \\
&\le \int_{-1}^{1}\eta(z)|f(x-\varepsilon z)-f(x)|\,dz\,.
\end{aligned}$$

A questo punto è necessario ricorrere alla proprietà di uniforme continuità

$$\forall\sigma>0 \quad \exists\delta>0 \quad : \quad |f(x)-f(y)|<\sigma \quad \text{se } |x-y|<\delta\,.$$

Se si sceglie $\varepsilon<\delta$ si ha allora

$$|f(x-\varepsilon z)-f(x)|<\sigma\,,$$

da cui, ricordando ancora la (6.21), sempre se $\varepsilon<\delta$,

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)| \le \left|\int_{-1}^{1}\eta(z)|f(x-\varepsilon z)-f(x)|\,dz\right| \le \sigma\int_{-1}^{1}\eta(z)\,dz = \sigma\,.$$

Abbiamo in tal modo dimostrato la (6.24).

**Osservazione 6.4.1** *Il risultato ottenuto afferma in sostanza che le funzioni continue si possono approssimare in modo uniforme con funzioni di classe $C^\infty$ e le funzioni approssimanti si possono ottenere per quadratura mediante un prodotto di convoluzione tra la funzione data e un mollificatore. Accenneremo piú avanti al fatto che tale procedimento puó essere utilizzato anche per funzioni meno regolari; la convergenza ovviamente non sarà quella uniforme.*

**Osservazione 6.4.2** *La famiglia di funzioni $\{\eta_\varepsilon\}$ converge a zero in $R-\{0\}$ e quindi quasi ovunque. In tal caso peró non si puó passare al limite sotto il segno di integrale in quanto da* (6.21) *discende che, per ogni $\varepsilon$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(x)\,dx = 1\,.$$

*Nei corsi avanzati di Analisi Matematica si conviene che $\{\eta_\varepsilon\}$ converge ad una misura concentrata nell'origine nota come delta di Dirac.*

## 6.5 Gli spazi $L^p$

Abbiamo accennato nel paragrafo precedente al fatto che l'integrale di una funzione misurabile non risente delle eventuali variazioni dei valori della funzione su insiemi di misura nulla. Ció suggerisce di identificare funzioni che differiscano solo su insiemi di misura nulla. Formalmente ció viene fatto introducendo in $\mathcal{L}(E)$, con $E \in \mathcal{M}$, la seguente relazione di equivalenza

$$f \sim g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{q.o. in } E\,.$$

L'insieme $\mathcal{L}(E)$ viene in tal modo ripartito in classi di equivalenza. Nel seguito, per funzione intendiamo per l'appunto una tale classe di equivalenza. All'atto pratico tale punto di vista non comporta alcun problema perché possiamo sempre riferirci ad una delle funzioni della classe; ogni altra funzione differisce da quella scelta solo su un insieme di misura nulla.

Fissato $p \in [1,+\infty[$, consideriamo l'insieme $L^p(E)$ delle funzioni misurabili in $E$ tali che

$$\int_E |f|^p\,dm < +\infty\,.$$

Inanzitutto va verificato che $L^p(E)$ è uno spazio vettoriale.
Dalla convessità della funzione

$$t \longrightarrow |t|^p$$

discende la seguente disuguaglianza

$$|f+g|^p \le 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)\,. \tag{6.26}$$

Dalla (6.26) si ha

$$\int_E |f+g|^p\,dm \le 2^{p-1}\left(\int_E |f|^p\,dm + \int_E |g|^p\,dm\right) < +\infty\,.$$

Se $f \in L^p(E)$ poniamo

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\,dm\right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{6.27}$$

Verifichiamo che (6.27) è una norma. Si ha ovviamente

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{q.o. in } E\,.$$

Per quanto detto all'inizio del paragrafo possiamo affermare che $f = 0$, intendendo con ció che si sta prendendo in considerazione la classe di equivalenza cui appartiene la funzione identicamente nulla. Si ha anche $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$. Resta quindi solo da verificare la proprietà triangolare.
Se $p > 1$ sia $q = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di $p$; si ha allora

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,. \tag{6.28}$$

Cominciamo dimostrando la seguente disuguaglianza di Hölder.

**Teorema 6.5.1** *Se $f \in L^p(E)$ e $g \in L^q(E)$ si ha*

$$\left| \int_E fg \, dm \right| \leq \left( \int_E |f|^p \, dm \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |g|^q \, dm \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q \,. \tag{6.29}$$

Facendo uso della disuguaglianza

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \,, \quad \forall u, v \in [0, +\infty[ \,.$$

si ha

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \,.$$

Sfruttando tale disuguaglianza, le proprietà **a)**, **b)**, **c)** del teorema 6.3.3, la (6.27) e la (6.28), si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_E \frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_q} dm \right| &\leq \int_E \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \, dm \\ &\leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} dm + \frac{1}{q} \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} dm = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,, \end{aligned}$$

da cui si ricava la (6.29).

Siamo ora in grado di dimostrare la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,, \quad \forall f, g \in L^p(E) \,, \tag{6.30}$$

nota anche come disuguaglianza di Minkovski.
Se $p = 1$ la (6.30) discende in modo banale dalle proprietà dell'integrale secondo Lebesgue riportate nel teorema 6.3.3. Soffermiamoci quindi sul caso $p > 1$. Si verifica facilmente che

$$\| \, |f + g|^{p-1} \|_q = \|f + g\|_p^{p-1} \,. \tag{6.31}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_E |f + g|^p \, dm = \int_E |f + g| \, |f + g|^{p-1} \, dm \\ &\leq \int_E |f| \, |f + g|^{p-1} \, dm + \int_E |g| \, |f + g|^{p-1} \, dm \\ &\quad \text{(per la (6.29))} \\ &\leq \|f\|_p \| \, |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| \, |f + g|^{p-1} \|_q \\ &\quad \text{(per la (6.31))} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \, \|f + g\|_p^{p-1} \,, \end{aligned}$$

da cui ovviamente la (6.30).

Supponiamo ora che risulti $|f(x)| \leq \lambda$ per ogni $x \in E \backslash E_\lambda$ con $m(E_\lambda) = 0$. L'estremo inferiore dei valori $\lambda$ prende il nome di estremo superiore essenziale di $f$; poniamo

$$\|f\|_\infty = \text{estremo superiore essenziale di } f\,. \tag{6.32}$$

**Teorema 6.5.2** *Gli spazi $L^p(E)$, con $p \in [1, \infty]$, dotati della norma* (6.27) *ovvero della norma* (6.32)*, sono completi.*

Consideriamo dapprima il caso $p < \infty$. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy. È possibile allora determinare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}\,. \tag{6.33}$$

Posto

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

per la (6.33) e per la disuguaglianza di Minkowski si ha

$$\|S_k\|_p < 1\,.$$

Se

$$S(x) = \lim_k S_k(x)$$

per il lemma di Fatou si ha

$$\int_E S^p\, dm \leq \lim_k \int_E S_k^p\, dm \leq 1\,.$$

Quindi la funzione $S$ è quasi ovunque finita; pertanto, sempre per quasi ogni $x \in E$, risulta assolutamente convergente la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))\,; \tag{6.34}$$

indichiamo con $f$ la somma di (6.34) e prolunghiamo $f$ a zero sull'insieme di misura nulla nei cui punti la serie potrebbe non convergere. La successione delle somme parziali di (6.34) è $\{f_{n_k}\}$; si ha quindi

$$\lim_k f_{n_k} = f(x)\,.$$

Abbiamo in definitiva dimostrato la convergenza puntuale ad $f$ di una sottosuccessione di $\{f_n\}$. Verifichiamo ora che tutta la successione converge in $L^p(E)$ a $f$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu$ tale che $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ se $n, m > \nu$. Allora, per ogni $n > \nu$ si ha, applicando il lemma di Fatou,

$$\int_E |f_n - f|^p\, dm \leq \liminf_k \int_E |f_n - f_{n_k}|^p\, dm \leq \varepsilon^p\,.$$

Ció implica che le funzioni $f_n - f$ appartengono a $L^p(E)$. Quindi anche $f$ è in $L^p(E)$; inoltre la successione converge a $f$ in $L^p(E)$.
Per quanto riguarda $L^\infty(E)$ si puó dimostrare che una successione di Cauchy converge uniformemente, ad una funzione limitata, su $E \backslash E_0$ con $m(E_0) = 0$ e ció basta per concludere che anche $L^\infty$ è completo.

Gli spazi $L^p(E)$ quindi sono tutti spazi di Banach. Tra questi particolare attenzione merita lo spazio $L^2(E)$ la cui norma puó essere definita a partire dal prodotto scalare

$$< f, g >= \int_E f\bar{g}\, dm\,;$$

$L^2(E)$ è pertanto uno spazio di Hilbert.

Da questo momento in poi ogni funzione definita in un insieme limitato $E$ verrà prolungata su tutto $R$ ponendolola uguale a zero in $R \backslash E$.
Occupiamoci ora di alcuni risultati di approssimazione, mediante funzioni regolari, di funzioni appartenenti a $L^p(E)$. Introduciamo l'insieme $C_0(R)$, cioè l'insieme delle funzioni continue il cui supporto è compatto; ricordiamo che per supporto di una funzione $g$ si intende la chiusura dell'insieme $\{x \,|\, g(x) \neq 0\}$.
Punto di partenza è il seguente fondamentale risultato che riportiamo senza dimostrazione.

**Teorema 6.5.3 (Teorema di Lusin)** *Sia $f$ una funzione misurabile e limitata su $E$, insieme di misura finita. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g$ di classe $C_0(R)$ tale che*

$$m(\{x \,|\, f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$$

*e*

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \,.$$

Cominciamo dimostrando il seguente risultato.

**Teorema 6.5.4** *L'insieme delle funzioni semplici è denso in $L^p$.*

Sia $f \geq 0$ e sia $\{s_k\}$ la successione (6.10) puntualmente convergente a $f$. Essendo

$$|f(x) - s_k(x)|^p \leq |f(x)|^p \,,$$

utilizzando il teorema 6.4.3 si ottiene l'asserto.
Per una generica $f$ si applica quanto prima dimostrato alla sua parte positiva e a quella negativa.
Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato di approssimazione.

**Teorema 6.5.5** *Se $p < \infty$ allora $C_0(R)$ è denso in $L^p$.*

Se $n$ è un intero definiamo la seguente funzione, detta troncata di $f$,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} n & \text{se } |f(x)| > n \\ \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \,. \end{cases}$$

Se $F_n = \{x \quad | \quad |f(x)| \geq n\}$ allora

$$\lim_{n\to\infty} m(F_n) = 0 \,.$$

Quindi per la proprietà **(AC)** di assoluta continuità, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un valore $n$ in corrispondenza del quale

$$\int_{F_n} |f|^p \, dm < \varepsilon^p$$

e quindi anche

$$\|f - f^{(n)}\|_p < \varepsilon \,. \tag{6.35}$$

Alla luce di quanto riportato nella dimostrazione del teorema 6.5.4 è possibile determinare una funzione semplice $s \leq f$ tale che

$$\|f^{(n)} - s\|_p < \varepsilon \,. \tag{6.36}$$

Fissiamo $\sigma > 0$. Per il teorema di Lusin esiste una funzione $g \in C_0(R)$ tale che $g(x) = s(x)$ tranne che per valori $x$ appartenenti ad un insieme di misura minore di $\sigma$; inoltre

$$|g(x)| \leq \|s\|_\infty \leq n\,.$$

Si ha quindi

$$\int_R |g-s|^p\, dm = \int_{\{x \ |\ g(x)\neq s(x)\}} |g-s|^p\, dm \leq (2\|s\|_\infty)^p \sigma \leq (2n)^p \sigma$$

da cui, se $\sigma < \varepsilon^p (2n)^{-p}$,

$$\|g-s\|_p \leq \varepsilon\,. \tag{6.37}$$

In definitiva dalle (6.35), (6.36), (6.37) abbiamo

$$\|f-g\|_p \leq \|f-f^{(n)}\|_p + \|f^{(n)}-s\|_p + \|s-g\|_p \leq 3\varepsilon$$

da cui l'asserto.

Nell'ottica di quanto illustrato nel paragrafo 4, si puó dimostrare che le funzioni (6.23) convergono ad $f$ in $L^p$ al tendere a zero di $\varepsilon$.
Dalla (6.25) si ha

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{-1}^{1} \eta(z)^{1-\frac{1}{p}} \eta(z)^{\frac{1}{p}} |f(x-\varepsilon z)| dz \\
&\qquad \text{(per la disuguaglianza di Hölder (6.29))} \\
&\leq \left(\int_{-1}^{1} \eta(z) dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int \eta(z)|f(x-\varepsilon z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \text{(per la (6.21))} \\
&= \left(\int_{-1}^{1} \eta(z)|f(x-\varepsilon z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

da cui, applicando il teorema di Fubini,

$$\int |f_\varepsilon|^p\, dx \leq \int \eta(z) \left(\int |f(x-\varepsilon z)|^p dx\right) dz = \int |f|^p\, dx\,. \tag{6.38}$$

Fissato $\sigma > 0$, per il teorema 6.5.5 è possibile determinare una funzione $g \in C_0(R)$ tale che

$$\|f-g\|_p < \sigma\,;$$

per la (6.38) si ha allora

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p \leq \sigma\,. \tag{6.39}$$

Poiché $g_\varepsilon$ tende a $g$ uniformemente e, quindi, in $L^p$ si ha

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g-f\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p < 3\,\sigma$$

da cui l'asserto.
Poiché le funzioni di classe $C^\infty$ possono a loro volta essere approssimate, in base al noto teorema di Weierstrass, in modo uniforme con polinomi a coefficienti razionali che quindi sono densi in $L^p$. Tale risultato ovviamente comporta che tutti gli spazi $L^p$, con $p < \infty$, sono separabili.

# Capitolo 7

# Serie e Trasformata di Fourier

## 7.1 Motivazioni

### 7.1.1 L'equazione del calore

L'argomento che tratteremo costituisce il primo capitolo di un piú ampio progetto noto come Analisi di Fourier; con tale termine si abbracciano varie tecniche attraverso le quali una funzione puó essere rappresentata come somma o, piú in generale, come integrale di funzioni di semplice struttura.
Per precisare un po' meglio cosa intendiamo dire consideriamo un problema relativo all'equazione del calore, problema dal cui studio hanno preso le mosse molte delle questioni di cui ci occuperemo.
L'equazione del calore è una equazione a derivate parziali che descrive la diffusione di energia termica in un mezzo omogeneo. Nella sua versione piú semplice essa assume la seguente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.1}$$

con $x$, variabile spaziale, appartenente ad un intervallo, e con la variabile temporale $t$ che assume valori non negativi; $u(x,t)$ rappresenta la temperatura misurata in $x$ al tempo $t$.
In particolare la (7.1) descrive l'evoluzione nel tempo della temperatura di una sbarra, rappresentata per esempio dall'intervallo $[0,\pi]$, isolata in modo tale che il calore possa fluire solo attraverso gli estremi. Se assumiamo che la temperatura a tali estremi venga mentenuta costantemente uguale a zero si ha

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{7.2}$$

Bisogna infine assegnare la seguente ulteriore condizione

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad \forall x \in [0,\pi] \tag{7.3}$$

che descrive la distribuzione della temperatura all'istante iniziale $t=0$.
Per risolvere il problema (7.1), (7.2), (7.3) utilizzeremo il classico metodo della separazione delle variabili.
Cerchiamo innanzitutto soluzioni dell'equazione (7.1) della forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,. \tag{7.4}$$

Sostituendo in (7.1) si ha

$$X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T(t)$$

da cui

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,. \tag{7.5}$$

Poiché il primo membro dipende solo da $t$ mentre il secondo solo da $x$ i due membri di (7.5) devono essere costanti; si ha cioè

$$T'(t) + A\,T(t) = 0 \tag{7.6}$$

e

$$X''(x) + A\,X(x) = 0 \tag{7.7}$$

con $A$ costante opportuna.
Le soluzioni di (7.6) sono date da

$$T(t) = c_0 \exp(-At)\,, \quad c_0 \in R\,,$$

quelle di (7.7) da

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)\,, \quad c_1, c_2 \in R$$

dove

$$\lambda = \sqrt{A}\,. \tag{7.8}$$

Le condizioni al bordo (7.2) comportano che

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

da cui si ottiene $c_1 = 0$ e, dovendo risultare $\sin(\lambda\pi) = 0$,

$$\lambda = n\,, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ovvero, per la (7.8), $A = n^2$.
Quindi le soluzioni del problema (7.1), (7.2) che assumono la forma (7.4) hanno la seguente espressione

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \tag{7.9}$$

con $n$ intero non negativo e $b_n$ costante arbitraria.
Ovviamente una combinazione lineare di soluzioni del tipo (7.9) è ancora soluzione di (7.1) così come è soluzione di (7.1) una funzione del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \tag{7.10}$$

purché ci si accerti che tale serie converga e che sia lecito derivare termine a termine.
Per quanto riguarda la determinazione dei parametri $b_n$ il loro calcolo esplicito è da collegarsi alla condizione iniziale (7.3) sempre che il dato iniziale $f$ possa esprimersi nella seguente forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,. \tag{7.11}$$

### 7.1.2 L'equazione delle corde vibranti

La procedura utilizzata per l'equazione del calore puó essere adattata all'equazione delle corde vibranti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{7.12}$$

In questo caso la funzione $u$ rappresenta lo spostamento in verticale dalla posizione di riposo di una corda elastica fissata agli estremi di un intervallo che, come nel caso precedente, consideriamo sia $[0, \pi]$; sono allora soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Poiché ora stiamo trattando una equazione del secondo ordine nella variabile $t$, alla condizione iniziale (7.3) bisogna aggiungerne un'altra relativa alla derivata di $u$ rispetto alla variabile temporale

$$u_t(x, 0) = g(x)\,, \quad \forall x \in [0, \pi]\,. \tag{7.13}$$

Cerchiamo innanzitutto soluzioni del tipo (7.4); si ha

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

e quindi

$$X'' + A\,X = 0\,, \quad T'' + A\,T = 0\,.$$

Sfruttando le condizioni al bordo (7.2) su $X$ si ha ancora una volta $A = -n^2$ e, quindi, in definitiva

$$X(x) = c\sin(nx)$$

nonché

$$T(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\,.$$

La soluzione del problema va quindi ricercata tra quelle che assumono la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right]\,. \tag{7.14}$$

La determinazione dei parametri che compaiono in (7.14) è demandata alle due condizioni iniziali (7.3) e (7.13). Da queste si ricava infatti che deve sussistere la (7.11) e, ignorando per il momento le difficoltà che la derivazione termine a termine comporta,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin(nx)\,. \tag{7.15}$$

Siamo quindi arrivati a inquadrare l'obiettivo: caratterizzare le funzioni per le quali sussiste uno sviluppo quale quello indicato in (7.11) o (7.15) e assicurarsi che per le funzioni che si rappresentino mediante uno sviluppo tipo (7.10) o (7.14) sia possibile procedere con le necessarie derivazioni termine a termine. Sarà questo l'obiettivo che proveremo a raggiungere nei prossimi paragrafi.

### 7.1.3 L'equazione di Laplace

Se nel piano si ontroduce un sistema di coordinate polari $(\rho, \theta)$ l'operatore di Laplace assume la seguente forma

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,. \tag{7.16}$$

Cerchiamo funzioni armoniche che assumano la forma

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta)\,. \tag{7.17}$$

Inserendo la funzione (7.17) in (7.16) si vede che deve necessariamente essere

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{T''}{T} = A\,,$$

con $A$ costante opportuna. Dobbiamo quindi risolvere le equazioni differenziali ordinarie

$$\rho^2 R'' + \rho R' - AR = 0 \tag{7.18}$$

e

$$T'' + AT = 0\,. \tag{7.19}$$

Poiché le funzioni $T$ sono periodiche di periodo $2\pi$ si ha necessariamente $A = -n^2$ con $n$ intero non negativo; deve pertanto risultare

$$T(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\,.$$

In corrispondenza di $A = -n^2$ l'integrale generale di (7.18) diventa

$$c_1 \rho^n + c_2 \rho^{-n}\,.$$

Essendo interessati a soluzioni regolari deve essere ovviamente $c_2 = 0$.
In definitiva le soluzioni del tipo (7.17) hanno la seguente espressione

$$\rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))\,.$$

Come nei casi illustrati precedentemente siamo interessati a soluzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \tag{7.20}$$

sempre che per tale serie sia possibile derivare due volte sotto il segno di serie.
I valori delle costanti $a_n, b_n$ si possono determinare se si assegna una condizione al bordo tipo Dirichlet

$$u(1, \theta) = \varphi(\theta)\,.$$

## 7.2 Sistemi ortonormali

Fissato un intero $n$ consideriamo il seguente polinomio trigonometrico

$$P_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Ovviamente la funzione $P_n$ é periodica di periodo $2\pi$. Il grafico di tale funzione ha andamento sinusoidale con frequenza $n(2\pi)^{-1}$; ció vuol dire che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la sinusoide compie $n$ cicli completi.
Posto

$$H_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \tag{7.21}$$

sia

$$\alpha_n = \frac{a_n}{H_n}\,, \qquad \beta_n = \frac{b_n}{H_n}\,; \tag{7.22}$$

esiste allora un unico valore $\varphi_n \in ]-\pi, \pi]$ tale che

$$\alpha_n = \sin \varphi_n\,, \qquad \beta_n = \cos \varphi_n\,. \tag{7.23}$$

Si ha pertanto

$$P_n(x) = H_n \sin(nx + \varphi_n)\,.$$

Il grafico di $P_n$ é quindi un'onda sinusoidale con frequenza $n(2\pi)^{-1}$, ampiezza $H_n$ e fase $\varphi_n$ dove per fase si intende il punto iniziale del ciclo della sinusoide. In definitiva assegnare le due costanti $a_n, b_n$ significa di fatto individuare due grandezze quali l'ampiezza e la fase dell'onda.
Ció premesso, data una funzione $f$ periodica di periodo $2\pi$, ci chiediamo quando una tale funzione si possa esprimere come somma, eventualmente infinita, di polinomi trigonometrici, cioé quando risulti

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]\,. \tag{7.24}$$

La (7.24) dice che un'onda, il cui profilo è rappresentato dal grafico di $f$, si ottiene dalla sovrapposizione di infinite onde sinusoidali ognuna delle quali ha frequenza $n(2\pi)^{-1}$ e ampiezza e fase iniziali legati ai valori $a_n, b_n$ mediante le formule (7.21), (7.22) e (7.23).

L'espressione a secondo membro di (7.24) prende il nome di serie trigonometrica.

**Osservazione 7.2.1** *In alcune situazioni puó rivelarsi piú comodo utilizzare una scrittura diversa della serie trigonometrica che faccia riferimento alla funzione esponenziale nel campo complesso. Ricorrendo infatti alle classiche formule di Eulero la serie trigonometrica a secondo membro di* (7.24) *si puó scrivere nel seguente modo*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{7.25}$$

*dove*

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,. \tag{7.26}$$

*La* (7.24) *diventa allora*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,. \tag{7.27}$$

Se la convergenza in (7.24) é uniforme é possibile ottenere delle formule che collegano alla funzione $f$ i valori dei coefficienti $a_n, b_n$.
Moltiplichiamo entrambi i membri della (7.24) per $\cos(mx)$, $m \geq 0$, e integriamo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Per la convergenza uniforme é possibile integrare termine a termine: si ha pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \quad &= \quad \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx \\
&+ \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx\right) \\
&+ \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx\right)\,.
\end{aligned}$$

In modo analogo, moltiplicando entrambi i membri di (7.24) per $\sin(mx)$, $m \geq 1$, e procedendo come sopra si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx\right).\end{aligned}$$

Osservato che

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx = 0\,, \quad m \in N\,,$$

e tenuto conto che

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx &= 0\,,\end{aligned}$$

si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,, \quad n \geq 0\,, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,, \quad n \geq 1\,. \tag{7.28}$$

La serie trigonometrica a secondo membro in (7.24), con i coefficienti $a_n, b_n$ dati dalle formule (7.28), prende il nome di serie di Fourier di $f$.
Se sussiste la (7.24) si dice che $f$ é sviluppabile in serie di Fourier.

**Osservazione 7.2.2** *Nel caso in cui la serie trigonometrica assume la forma esponenziale* (7.27) *i coefficienti di Fourier di $f$ hanno la seguente espressione*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,, \quad n \in Z\,. \tag{7.29}$$

Le questioni che ora si pongono sono le seguenti: è proprio necessario richiedere che la convergenza sia quella uniforme? una volta che si sia accertato che la serie di Fourier di $f$ in qualche senso converge, chi ci assicura che sussiste la (7.24)?
Per dare una risposta a tali quesiti proviamo a impostare il problema in una forma astratta che fa riferimento ad alcune interessanti proprietà degli spazi di Hilbert.

**Definizione 7.2.1** *Una successione $\{v_k\}$ di elementi di uno spazio di Hilbert $H$ dicesi sistema ortonormale se si ha*

$$< v_h, v_k >= \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & se\ h = k \\ 0 & se\ h \neq k\,. \end{cases} \tag{7.30}$$

*Si dice che il sistema ortonormale è completo se, per ogni $v \in H$, esiste una successione di numeri reali o complessi $\{c_n\}$ tale che, posto*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \,, \tag{7.31}$$

*si ha*

$$v = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{7.32}$$

*o, piú sinteticamente,*

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \,. \tag{7.33}$$

Per quanto precedentemente osservato il seguente sistema trigonometrico

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\,, \quad \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}\,, \quad n, m = 1, 2, \dots \tag{7.34}$$

è un sistema ortonormale, cosí come è un sistema ortonormale la successione bilatera

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\,, \quad n \in Z\,. \tag{7.35}$$

Dimostreremo piú avanti che tali sistemi sono completi; tale risultato ci consentirà di dare una risposta positiva ad alcune questioni poste in precedenza in relazione al significato da attribuire alle identità (7.24), (7.27).
Prima di concludere tale paragrafo e passare a studiare in dettaglio il sistema trigonometrico (7.34) ovvero il sistema (7.35), osserviamo che esistono altri sistemi ortonormali completi utili in varie questioni.
Ricordiamo che il classico procedimento di Gram-Schmidt consente di costruire un sistema ortonormale completo a partire da una successione costituita da elementi le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio. Tale è, per esempio, la successione dei polinomi $\{x^n\}$ per il noto Teorema di Weierstrass. Si ottengono in tal caso i cosiddetti polinomi di Legendre

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,;$$

essi costituiscono un sistema ortonormale completo di $L^2([-1,1])$.
Altro importante esempio di sistema ortonormale completo è costituito dal sistema di funzioni di Haar. Tali funzioni si definiscono nel modo seguente

$$H_{00}(x) = 1\,, \quad H_{n,k}(x) = \begin{cases} -2^{n/2} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \le x < \frac{k-\frac12}{2^n} \\ 2^n & \text{se } \frac{k-\frac12}{2^n} \le x < \frac{k}{2^n} \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Tali funzioni, contrariamente a quelle che intervengono nei casi precedenti, sono discontinue. Tale caratteristica si rivela utile per lo studio di alcuni problemi, per esempio quelli relativi alla ricostruzione di immagini, per la cui natura le funzioni da approssimare presentano discontinuità. Esse inoltre hanno un ruolo importante nella teoria delle wavelets.

## 7.3 Identitá di Parceval

Sia $\{v_k\}$ un sistema ortonormale, non necessariamente completo, di uno spazio di Hilbert $H$. Se per un vettore $v$ di $H$ sussiste la (7.33) allora si ha

$$c_k =< v, v_k > , \qquad \forall k ; \tag{7.36}$$

$c_k$ è la proiezione di $v$ su $v_k$.
Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{n\to\infty} < s_n, v_k >=< v, v_k > \tag{7.37}$$

dove $s_n$ è la somma parziale (7.31). Si ha infatti

$$\begin{aligned} | < s_n, v_k > - < v, v_k > | \quad &= \quad | < s_n - v, v_k > | \\ & \qquad \text{(per la disuguaglianza di Schwarz)} \\ &\leq \quad \|s_n - v\|\|v_k\| = \|s_n - v\| \end{aligned}$$

da cui ovviamente (7.37) in quanto, per la (7.32), si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - v\| = 0 . \tag{7.38}$$

Abbiamo pertanto

$$< v, v_k >= \lim_{n\to\infty} < s_n, v_k >= \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{h=1}^{n} c_h < v_h, v_k > \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{h=1}^{n} c_h \delta_{hk} \right) = c_k$$

cioè (7.36).

Le (7.36) riproducono le formule (7.28) nel caso in cui il sistema ortonormale assegnato sia il sistema trigonometrico (7.34). C'è da osservare che le (7.28), ottenute in ipotesi di convergenza uniforme, in tale contesto richiedono la piú debole ipotesi di convergenza in $L^2$.

In analogia con quanto detto nel caso del sistema trigonometrico (7.34) i coefficienti (7.36) prendono il nome di coefficienti di Fourier di $v$ rispetto al sistema ortonormale $\{v_k\}$ e la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} < v, v_h > v_h \tag{7.39}$$

viene chiamata serie di Fourier di $v$.
Dimostriamo ora la seguente disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{h=1}^{\infty} | < v, v_h > |^2 \leq \|v\|^2 . \tag{7.40}$$

Se $s_n$ denota la somma parziale (7.31) e $c_k$ le quantità (7.36) si ha

$$\begin{aligned} \|s_n\|^2 \quad &= \quad < s_n, s_n >=< \sum_{h=1}^{n} c_h v_h, \sum_{k=1}^{n} c_k v_k >= \sum_{h,k=1}^{n} c_h \bar{c_k} < v_h, v_k > \\ &= \quad \sum_{h,k=1}^{n} c_h \bar{c_k} \delta_{hk} = \sum_{h=1}^{n} |c_h|^2 . \end{aligned}$$

Risulta inoltre

$$< v, s_n >= \sum_{h=1}^{n} \bar{c_h} < v, v_h >= \sum_{h=1}^{n} |c_h|^2 \,.$$

In definitiva si ha

$$\|v - s_n\|^2 = \|v\|^2 - < v, s_n > - < s_n, v > + \|s_n\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{h=1}^{n} |c_h|^2 \tag{7.41}$$

da cui ovviamente (7.40).

Dalla (7.41) si deduce anche che sussiste la (7.33) se e solo se nella diseguaglianza di Bessel (7.40) vale il segno di uguaglianza. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

**Teorema 7.3.1 (Identità di Parceval)** *Il sistema $\{v_k\}$ è completo se e solo se, per ogni $v \in H$, sussiste la seguente identità di Parceval*

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < v, v_k > |^2 = \|v\|^2 \,. \tag{7.42}$$

Dalla (7.42) si deduce che la successione dei coefficienti di Fourier, rispetto a un sistema ortonormale completo, di un vettore $v \in H$ appartiene allo spazio $\ell^2$ e che la norma $\ell^2$ di tale successione coincide con la norma di $v$ in $H$.

Sia ora $\{d_k\}$ una successione di $\ell^2$. Posto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k$$

si ha, se $n < m$,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |d_k|^2 \,. \tag{7.43}$$

La successione $\{s_n\}$ è quindi di Cauchy. Essendo $H$ completo tale successione ha limite: sia

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} d_k v_k \,.$$

Si ottiene allora che le quantità $d_k$ sono i coefficienti di Fourier di $v$; per essi vale allora la (7.42). In definitiva, se $H$ è uno spazio di Hilbert dotato di sistema ortonormale completo, l'applicazione di $H$ in $\ell^2$ che ad ogni vettore $v \in H$ associa la successione dei suoi coefficienti di Fourier è un'applicazione biunivoca che, per la (7.42), conserva la norma; un tale tipo di applicazione prende anche il nome di isometria. Possiamo quindi concludere che ogni spazio di Hilbert dotato di un sistema ortonormale completo puó essere identificato con lo spazio $\ell^2$.

Il seguente teorema fornisce un utile criterio per riconoscere se un sistema ortonormale è completo.

**Teorema 7.3.2** *Dato un sistema ortonormale $\{v_k\}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti*

**(a)** *Il sistema $\{v_k\}$ è completo.*

**(b)** *Per ogni $v \in H$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una combinazione lineare di vettori del sistema*

$$w = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k \tag{7.44}$$

*tale che*

$$\|v - w\| < \varepsilon \,. \tag{7.45}$$

**(c)** *Se i coefficienti di Fourier di un elemento $v \in H$ sono tutti nulli allora $v = 0$.*

**(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** - Tale implicazione segue in modo banale dalla definizione di sistema completo: le combinazioni lineari (7.44) essendo in questo caso le somme parziali (7.31).
**(b)** $\Longrightarrow$ **(c)** - Sia $v$ un elemento di $H$ i cui coefficienti di Fourier siano tutti nulli. Si ha, utilizzando la disuguaglianza di Schwarz e la (7.45),

$$\|v\|^2 = \|v\|^2 - < v, \sum_{h=1}^{n} d_h v_h > = < v, v - w > \leq \|v\| \|v - w\| \leq \varepsilon \|v\| \,.$$

Si ha quindi $\|v\| \leq \varepsilon$ da cui, data l'arbitrarietà di $\varepsilon$, $v = 0$.
**(c)** $\Longrightarrow$ **(a)** - Se $v \in H$, la successione delle somme parziali della serie di Fourier (7.39) è di Cauchy: per rendersi conto di ció basta ragionare come nel caso di (7.43).
Sia

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} < v, v_k > v_k \,;$$

$u$ e $v$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier; $(u - v)$ ha pertanto coefficienti di Fourier tutti nulli. Deve allora essere $u = v$ da cui l'asserto.

## 7.4 Completezza del sistema trigonometrico

Proviamo ora che il sistema trigonometrico (7.34) è completo. Per verificare ció faremo vedere che tale sistema verifica la condizione **(c)** del teorema 7.3.2.
Sia quindi $u$ una funzione di $L^2([-\pi, \pi])$ tale che tutti i suoi coefficienti di Fourier siano nulli.
Cominciamo ad analizzare il caso in cui $u$ è una funzione a valori reali la quale, prolungata a tutto $R$ per periodicità, risulti continua in $R$.
Se $u \not\equiv 0$ allora $u$ ha massimo; possiamo sempre supporre tale valore massimo positivo e assunto in 0. Esiste allora un $\delta > 0$ tale che

$$u(x) > \frac{u(0)}{2} \,, \quad \forall x \in ]-\delta, \delta[ \,. \tag{7.46}$$

Consideriamo la funzione

$$v(x) = 1 - \cos\delta + \cos x \,.$$

Si ha ovviamente

$$1 < v(x) \leq 2 - \cos\delta \quad \forall x \in ]-\delta, \delta[ \tag{7.47}$$

e

$$|v(x)| \leq 1 \,, \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \backslash ]\delta, \delta[ \,. \tag{7.48}$$

Essendo

$$v(x) = 1 - \cos\delta + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ogni potenza $n-$ma di $v$ è combinazione lineare di elementi del sistema (7.35) ovvero del sistema (7.34); quindi $v^n$ è ortogonale ad $u$ essendo questa per ipotesi ortogonale alle funzioni appartenenti ai due sistemi sopra richiamati. Si ha allora

$$0 = \int_{-\pi}^{-\delta} u\, v^n\, dx + \int_{-\delta}^{\delta} u\, v^n\, dx + \int_{\delta}^{\pi} u\, v^n\, dx = I_1 + I_2 + I_3 \,. \tag{7.49}$$

Per la (7.48) si ha

$$|I_1| + |I_3| \leq 2\pi \max |u| \,. \tag{7.50}$$

Per la (7.47) è possibile determinare $m \in ]1, 2-\cos\delta[$ e un intervallo $[-a, a] \subset ]-\delta, \delta[$ tale che risulti

$$v(x) \geq m\,, \quad \forall x \in [-a, a]\,;$$

si ha allora, ricordando (7.46),

$$I_2 \geq \int_{-a}^{a} u\, v^n\, dx \geq u(0)\, m^n a$$

Quindi, essendo $m > 1$ la quantità $I_2$ puó rendersi grande a piacere al divergere di $n$; ció, insieme alla (7.50), è in contrasto con la (7.49). Deve pertanto essere $u \equiv 0$.
Liberariamoci ora dell'ipotesi iniziale di continuità.
Premettiamo la seguente

**Definizione 7.4.1** *Una funzione $f$, definita in $R$, dicesi assolutamente continua se ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che, comunque si fissino intervalli in numero finito a due a due disgiunti $]a_i, b_i[(i = 1, \cdots, k)$ con $\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta$, si abbia*

$$\sum_{i=1}^{k} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon\,.$$

Richiamiamo ora il seguente risultato che estende al caso delle funzioni integrabili secondo Lebesgue il classico teorema fondamentale del calcolo integrale.

**Teorema 7.4.1** *Sia $f \in L^1([a, b])$. Fissato $x_0 \in [a, b]$ la funzione integrale*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

*è assolutamente continua e si ha $F'(x) = f(x)$ q.o. in $[a, b]$. Vale inoltre la seguente formula di integrazione per parti*

$$\int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{7.51}$$

*per ogni $g \in C^1([a, b])$.*

Poniamo

$$U(x) = \int_{-\pi}^{x} u(t)\, dt\,.$$

Essendo $u$ ortogonale al sistema trigonometrico (7.34) si ha

$$U(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, dt = 0\,. \tag{7.52}$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti (7.51) e la (7.52) si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \sin(kx)\, dx = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos(kx)\, dx = 0\,.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(kx)\,dx = 0\,.$$

Abbiamo quindi mostrato che $U$ è ortogonale a tutti gli elementi del sistema trigonometrico (7.34) ad eccezione del primo. Se allora poniamo

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\,dx\,,$$

la funzione $(U - C_0)$ è ortogonale a tutte gli elementi del sistema trigonometrico (7.34). Essa inoltre è continua e, per la(7.52), il suo prolungamento per periodicità $R$ resta continuo.
Per quanto dimostrato al passo precedente deve pertanto essere $U - C_0 = 0$. Per il teorema 7.4.1 si ha allora

$$0 = (U - C_0)' = u\,, \quad \text{q.o. in } ]-\pi,\pi[$$

da cui l'asserto.
Resta da analizzare il caso in cui $u$ sia una funzione a valori complessi; il risultato si ottiene ragionando separatamente sulla parte reale e sulla parte complessa.

Siamo in grado quindi di enunciare il seguente risultato.

**Teorema 7.4.2** *Se*

$$S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\,e^{inx} \tag{7.53}$$

*denota la somma parziale di indice $N$ della serie di Fourier di $f \in L^2([-\pi,\pi])$, allora la (7.27) va intesa nel senso che*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - S_N^f(x)\right|^2 dx = 0\,. \tag{7.54}$$

Nel caso del sistema trigonometrico l'identità di Parceval (7.42) assume la seguente forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\,. \tag{7.55}$$

Dalla (7.55) si ottiene il seguente noto teorema di Riemann-Lebesgue.

**Teorema 7.4.3** *Le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ dei coefficienti di Fourier di una funzione $f \in L^2[-\pi,\pi])$ sono infinitesime.*

**Osservazione 7.4.1** *Poiché le somme parziali della serie di Fourier di una funzione di classe $L^2$ sono ovviamente funzioni continue, dal precedente risultato si riottiene la proprietà di densità di $C^0$ in $L^2$.*

## 7.5 Formula integrale di Poisson

Riprendiamo lo studio dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ e associamo ad essa la condizione al bordo di Dirichlet

$$u = \varphi \qquad \text{su } \partial D \tag{7.56}$$

dove, al solito, con $D$ si intende il disco unitario del piano con centro nell'origine.
Ricordando l'espressione (7.20) che ci si aspetta abbia la generica soluzione dell'equazione di Laplace, imponendo la condizione (7.56) per $r = 1$, si ha che il modo piú ragionevole di scegliere i valori dei coefficienti $a_n, b_n$ sta nel prenderli uguali ai coefficienti di Fourier di $\varphi$. Si ha pertanto

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos[n(\theta - t)]dt\,.$$

Se $r < 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \varphi(t)\cos[n(\theta - t)]$$

è totalmente e, quindi, uniformemente convergente; si ha allora

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos[n(\theta - t)]\right\}dt\,.$$

La serie sotto il segno di integrale è la parte reale della serie geometrica di ragione $re^{i(\theta-t)}$ privata del primo termine. Si ha allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos[n(\theta - t)] = \Re\left(\frac{re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}}\right) = \frac{r\cos(\theta - t) - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}$$

da cui

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\,dt$$

che non è altro che la formula integrale di Poisson. Per la verifica che tale funzione risolve il problema di Dirichlet si rimanda a quanto già detto in precedenza.

## 7.6 Convergenza puntuale

Il risultato di convergenza in $L^2$ della serie di Fourier contenuto nel teorema 7.4.2, per quanto possa ritenersi elegante data la sua generalità, si presenta per certi versi inadeguato. È possibile pervenire ad un risultato, per certi veri più preciso, che riguardi la convergenza puntuale o, meglio, uniforme? Vedremo che ció è possibile se si fanno opportune ipotesi di regolarità su $f$.
A tal fine premettiamo alcune definizioni.

**Definizione 7.6.1** *Si dice che una funzione $f$, definita in $]-\pi,\pi]$, è continua a tratti se*
*(i) $f$ è convergente agli estremi $-\pi$ e $\pi$;*
*(ii) $f$ è continua in $]-\pi,\pi[$ tranne che in un numero finito di punti $x_1,\cdots,x_m$;*
*(iii) in ogni punto $x_k$ la funzione $f$ ha limite destro e limite sinistro finiti*

$$\lim_{x\to x_i^-} f(x) = f(x_i^-) \neq \lim_{x\to x_i^+} f(x) = f(x_i^+)\,.$$

**Osservazione 7.6.1** *Una funzione continua a tratti è quindi una funzione il cui grafico presenta un numero finito di salti. È utile sottolineare il ruolo che hanno in tale definizione i limiti di $f$ agli estremi dell'intervallo cioè $f(-\pi^+), f(\pi^-)$. Infatti quando si prolunga per periodicità una funzione definita in $]-\pi,\pi]$ a tutto $R$, perché la funzione risultante sia continua non basta che la funzione da cui siamo partiti non presenti discontinuità all'interno dell'intervallo $]-\pi,\pi[$; bisogna anche assicurarsi che sia soddisfatta la condizione*

$$f(-\pi) = f(-\pi^+) = f(\pi^-) = f(\pi)\,. \tag{7.57}$$

**Definizione 7.6.2** *Una funzione $f$ continua a tratti dicesi regolare a tratti se essa è derivabile tranne che in un numero finito di punti e la sua derivata $f'$ è continua a tratti.*

**Osservazione 7.6.2** *In sostanza una funzione $f$ è regolare a tratti se il suo grafico presenta al piú un numero finito di salti e un numero finito di spigoli. Va sottolineato che se si restringe la funzione $f$ ad uno degli intervalli in cui $f'$ è continua allora le ipotesi fatte comportano che, prolungata per continuità $f$ agli estemi di tale intervallo la funzione risultante è dotata di derivata in tali estremi.*

Siamo ora in grado di enunciare il seguente risultato relativo alla convergenza puntuale della serie di Fourier di una funzione.

**Teorema 7.6.1** *Sia $f$ una funzione, definita in $]-\pi,\pi]$, regolare a tratti. Allora la serie di Fourier di $f$ converge a*

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$$

*nei punti appartenenti all'intervallo aperto $]-\pi,\pi[$, converge a*

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+)+f(\pi^-)\right]$$

*negli estremi dell'intervallo. In particolare la serie di Fourier converge a $f$ nei punti di continuità della funzione.*

Ricordando l'espresssione (7.29) dei coefficienti di Fourier $c_n$ di $f$ la somma parziale (7.53) si scrive nel modo seguente

$$S_N^f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{in(x-t)}dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{in(t-x)}dt$$

dove nell'ultimo passaggio si è semplicemente mutato $n$ in $-n$. Con il cambio di variabili $t-x=\tau$, usando la periodicità delle funzioni presenti negli integrali, si ha

$$S_N^f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}f(x+\tau)e^{in\tau}d\tau=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\tau)D_N(\tau)d\tau \tag{7.58}$$

dove

$$D_N(\tau)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}e^{in\tau}\,; \tag{7.59}$$

tali funzioni sono note come nuclei di Dirichlet.
Con semplici calcoli si ha

$$D_N(\tau)=\frac{1}{2\pi}e^{-iN\tau}\left(1+e^{i\tau}+\cdots+e^{i2N\tau}\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-iN\tau}\frac{e^{i(2N+1)\tau}-1}{e^{i\tau}-1}$$

da cui

$$D_N(\tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)\tau}-e^{-iN\tau}}{e^{i\tau}-1}\,. \tag{7.60}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{-i\tau/2}$ e ricordando le formule di Eulero si ha la seguente espressione per i nuclei di Dirichlet

$$D_N(\tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\tau}-e^{-i(N+\frac{1}{2})\tau}}{e^{i\frac{\tau}{2}}-e^{-i\frac{\tau}{2}}}=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}\,.$$

Dalla (7.59) si ha

$$D_N(\tau) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_1^N \cos n\tau$$

da cui

$$\int_0^\pi D_N(\tau)d\tau = \int_{-\pi}^0 D_N(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\,. \tag{7.61}$$

Dalle (7.58) e (7.61) si ha

$$\begin{aligned} S_N^f(x) &- \frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right] \\ &= \int_{-\pi}^0 \left[f(x+\tau)-f(x^-)\right] D_N(\tau)d\tau + \int_0^\pi \left[f(x+\tau)-f(x^+)\right] D_N(\tau)d\tau\,. \end{aligned}$$

Utilizzando l'espressione (7.60) del nucleo di Dirichlet si ha

$$S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi g(\tau)\left[e^{i(N+1)\tau} - e^{-iN\tau}\right] d\tau \tag{7.62}$$

dove

$$g(\tau) = \begin{cases} \dfrac{f(x+\tau)-f(x^-)}{e^{i\tau}-1} & \text{se } -\pi < \tau < 0 \\ \\ \dfrac{f(x+\tau)-f(x^+)}{e^{i\tau}-1} & \text{se } 0 < \tau < \pi\,. \end{cases}$$

La funzione $g$ ha la stessa regolarità di $f$ per $\tau \neq 0$; d'altra parte per la regola di de l'Hopital si ha

$$\lim_{\tau\to 0^+} g(\tau) = \lim_{\tau\to 0^+} \frac{f'(x+\tau)}{ie^{i\tau}} = \frac{f'(x^+)}{i}$$

e, analogamente,

$$\lim_{\tau\to 0^-} g(\tau) = \frac{f'(x^-)}{i}\,.$$

Quindi $g$ è regolare a tratti; in particolare essa è di classe $L^2$. Dal teorema di Riemann-Lebesgue i suoi coefficienti di Fourier

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi g(t)e^{-int}dt$$

tendono a zero al tendere di $n$ a $+\infty$ e $-\infty$. Poiché l'espressione a secondo membro in (7.62) non è altro che $C_{-(N+1)} - C_N$ si ottiene l'asserto.

Consideriamo ora alcuni esempi. Premettiamo il seguente risultato di semplice verifica.

**Teorema 7.6.2** *Se $f$ é pari la serie di Fourier di $f$ si riduce ad una serie di soli coseni, mentre se $f$ é dispari essa diventa una serie di soli seni.*

**Esempio 7.6.1** *Consideriamo la cosiddetta onda quadra*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & se\ x \in ]-\pi, 0[ \\ \\ 1 & se\ x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

*Poiché $f$ é dispari la sua serie di Fourier é una serie di soli seni; si ha*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & \textit{se } n \textit{ é pari} \\ \\ \dfrac{4}{n\pi} & \textit{se } n \textit{ é dispari}. \end{cases}$$

*La serie di Fourier di $f$ ha allora la seguente espressione*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)x\,.$$

*Tale serie, per il teorema* 7.6.1*, ha per somma* 1 *in tutti i punti $x \in ]0,\pi[$. In particolare, ponendo $x = \pi/2$ si ha*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

*Se inoltre si applica alla funzione $f$ l'identità di Parceval* (7.55) *si ha*

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

**Esempio 7.6.2** *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x^2\,, \quad x \in [-\pi,\pi]\,.$$

*Essendo tale funzione pari la sua serie di Fourier é una serie di soli coseni. Risulta*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

*e*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}\,, \quad n \neq 0\,.$$

*Poiché tale funzione è continua e agli estremi soddisfa la condizione di raccordo* (7.57) *si ha, sempre per il teorema* 7.6.1*,*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\,, \quad x \in [-\pi,\pi]\,.$$

*In particolare, se $x = \pi$, si ha*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

*e, utilizzando* (7.55)*,*

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\,.$$

**Esempio 7.6.3** *Se*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } x \in ]-\pi,0[ \\ \\ x, & \textit{se } x \in [0,\pi]\,, \end{cases}$$

*risulta*

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}\,, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\,, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

*Si ha allora*

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)\,, \quad x \in ]-\pi,\pi[$$

*e per* $x=0$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

## 7.7 Derivazione termine a termine

In tale paragrafo assumeremo che $f$ è regolare a tratti e continua in $R$ secondo quanto indicato nell'osservazione 7.6.1.
Per una siffata funzione si puó dimostrare che vale la seguente regola di integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{7.63}$$

dove $g$ è una funzione di classe $C^1$.
Siano $a_n, b_n$ i coefficienti di Fourier di $f$ e denotiamo con $a'_n, b'_n$ quelli di $f'$

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx\,, \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

Sussiste il seguente risultato.

**Lemma 7.7.1** *Sia $f$ regolare a tratti e continua in $R$. Allora tra i coefficienti di Fourier di $f$ e $f'$ sussistono le seguenti relazioni*

$$a'_n = nb_n\,, \quad b'_n = -na_n\,. \tag{7.64}$$

Si ha

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \\ &\quad \text{(per la (7.63))} \\ &= -\frac{1}{\pi}[f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi)] + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &\quad \text{(per la (7.57))} \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = nb_n \end{aligned}$$

da cui la prima delle (7.64); la seconda si ottiene in modo analogo.

**Osservazione 7.7.1** *Nel caso in cui si usi per la serie di Fourier la forma esponenziale allora la relazione tra i coefficienti di Fourier $c_n$ di $f$ e $c'_n$ di $f'$ è*

$$c'_n = inc_n\,. \tag{7.65}$$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato di derivazione termine a termine.

**Teorema 7.7.1** *Supponiamo $f$ continua e regolare a tratti; se anche $f'$ è regolare a tratti allora la serie di Fourier di $f'$ è*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)]\,. \tag{7.66}$$

*Tale serie ha per somma $f'(x)$ in tutti i punti in cui $f$ è derivabile ovvero*

$$\frac{1}{2}\left[f'(x^+) + f'(x^-)\right] \tag{7.67}$$

*nei punti in cui il grafico di $f$ presenta uno spigolo.*

In base al lemma 7.7.1 la serie di Fourier di $f'$ si ottiene derivando formalmente termine a termine la serie di Fourier di $f$. Poiché per ipotesi $f'$ è regolare a tratti è possibile applicare il teorema 7.6.1 alla funzione $f'$. Si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)]$$

nei punti in cui $f$ è derivabile; inoltre la serie (7.66) ha per somma (7.67) nei punti in cui $f'$ presenta una discontinuità.
Se $f$ è sufficienemente regolare, per esempio di classe $C^2(R)$, e se il suo coefficiente di Fourier $a_0$ è nullo dalla (7.55) e dal Teorema 7.7.1 si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2\,dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\,.$$

Si ottiene allora la seguente Disuguaglianza di Wirtinger

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2\,dx\,. \tag{7.68}$$

In (7.68) vale ovviamente l'uguaglianza solo se tutti i coefficienti di Fourier $a_n, b_n$ con $n \ge 2$ sono nulli; ció si verifica solo se $f$ è combinazione lineare delle funzioni seno e coseno.
Si è parlato fin qui di sola convergenza puntuale; per recuperare la convergenza uniforme è utile ricordare il seguente risultato.

**Teorema 7.7.2** *Supponiamo $f$ continua e regolare a tratti; allora la serie di Fourier di $f$ converge a $f$ assolutamente ed uniformemente.*

Ragioniamo sulla forma esponenziale della serie di Fourier. Osserviamo che sussistono le (7.65) e che la successione $\{c'_n\}$ appartiene a $\ell^2$, in quanto $f' \in L^2([-\pi,\pi])$; si ha, applicando la disuguaglianza di Schwarz,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0}\left|\frac{c'_n}{n}\right| \le |c_0| + \left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\neq 0}|c'_n|^2\right)^{1/2} < +\infty\,.$$

Essendo

$$\left|c_n e^{inx}\right| \le |c_n|$$

la serie di Fourier di $f$ è totalmente convergente; come tale essa è sia assolutamente convergente che uniformemente convergente.

**Osservazione 7.7.2** *La convergenza assoluta della serie il cui termine generale è* $c_n$ *è conseguenza delle ipotesi di regolarità sulla funzione* $f$*; infatti nei casi riportati negli esempi* 7.6.1 *e* 7.6.3*, in cui le funzioni non sono continue, le rispettive serie dei coefficienti di Fourier non convergono assolutamente in quanto i loro termini generali, in valore assoluto, si comportano come la classica serie armonica. Al contrario nell'esempio* 7.6.2*, in cui la funzione soddisfa le ipotesi del teorema* 7.7.2*, la serie dei coefficienti di Fourier è assolutamente convergente in quanto confrontabile con la serie armonica generalizzata di esponente due.*

Riprendiamo lo studio del problema (7.1), (7.2) e (7.3).
A titolo esemplificativo supponiamo $f$ di classe $C^1([0,\pi])$ e tale che

$$f(0) = f(\pi) = 0\,.$$

Prolunghiamo $f$ all'intervallo $[-\pi,\pi]$ in modo che la funzione cosí ottenuta sia dispari; si puó dimostrare che una siffatta funzione è di classe $C^1$. Per quanto detto nel teorema 7.6.2 per $f$ sussiste uno sviluppo in serie di soli seni; la successione $\{a_n\}$ in (7.11) appartiene ovviamente a $\ell^2$ e, come tale, è infinitesima. La convergenza è inoltre uniforme per il Teorema 7.7.2.
Occupiamoci ora del problema della derivazione termine a termine della serie (7.10) candidata a essere la soluzione del problema. Osserviamo che

$$\left|a_n e^{-n^2 t}\sin(nx)\right| \le C e^{-n^2 d}\,, \qquad \text{se } \ t \ge d > 0$$

dove $C$ è una costante che maggiora i coefficienti della successione infinitesima $\{b_n\}$. Poiché la serie

$$\sum_n e^{-n^2 d}$$

è convergente si ha che la serie (7.10) è totalmente e quindi uniformemente convergente.
D'altra parte, se si scrive la serie che si ottiene dalla (7.10) derivando termine a termine una volta rispetto alla variabile $t$ oppure due volte rispetto alle variabile $x$, si osseva che essa esibisce al posto $n$-mo il fattore extra $n^2$. La comparsa di tale fattore non dà preoccupazioni perché, ragionando come prima, la serie cosí ottenuta è maggiorata dalla serie

$$\sum_n n^2 e^{-n^2 d}$$

che è ancora convergente data la presenza provvidenziale dell'esponenziale. Quindi dai classici teoremi di derivazione delle serie di funzioni si puó dedurre che effettivamente la somma della serie (7.10) è derivabile termine a termine e quindi, per quanto detto nel paragrafo iniziale, essa è soluzione dell'equazione del calore (7.1).
Resta ora da controllare l'ultima questione: verificare che la soluzione ottenuta si raccorda bene con il dato iniziale. Non c'è dubbio che per $t = 0$ la soluzione (7.10) ridà il dato iniziale (7.3); noi vorremmo peró che la soluzione $u$ convergesse al dato iniziale $f$. A tale questione si puó dare una risposta osservando che, per quando detto nella dimostrazione del teorema 7.7.2, la serie il cui termine generale è $b_n$ è assolutamente convergente. Poiché la serie (7.10) si maggiora con tale serie numerica si ha che (7.10) è uniformemente convergente nell'insieme

$$\{(x,t)\,|\,0 \le x \le \pi\,,\ t \ge 0\};$$

ció comporta ovviamente la continuità della soluzione in tale regione e quindi l'asserto.
Resterebbe da verificare che la soluzione trovata è anche unica; su ció peró non è possibile soffermarci.
Occupiamoci ora dell'equazione delle onde e del relativo problema (7.12), (7.2), (7.3), (7.13). Contrariamente a quanto accade nel caso dell'equazione del calore in questo caso la questione

relativa alla convergenza della serie (7.14) è piú delicata in quanto manca il fattore esponenziale e ancora piú complesso è il problema della derivazione termine a termine. Infatti se anche (7.14) convergesse, differenziando formalmente la serie due volte, comparirebbe un fattore $n^2$ che crea non pochi problemi. Per ovviare a ció di solito si impongono opportune ipotesi di regolarità sulle funzioni $f$ e $g$. Si puó infatti dimostrare che se $f$ è di classe $C^3$ e la sua derivata terza è regolare a tratti, se $g$ è di classe $C^2$ e la sua derivata seconda è regolare a tratti, e se infine $f, g, f^{(2)}, g^{(2)}$ sono nulle agli estremi dell'intervallo $[0, \pi]$ allora

$$|a_n| = 0(n^{-4})\,, \qquad |b_n| = 0(n^{-3})\,.$$

In tal caso, se si differenzia due volte la serie (7.14), la serie in tal modo ottenuta, essendo controllata dalle serie armonica di esponente due, è totalmente convergente; ció assicura la possibilità di eseguire le dovute derivazioni sotto il segno di serie. Ovviamente le ipotesi sopra riportate, se da una parte risolvono il problema matematico, non sono soddisfacenti dal punto di vista delle applicazioni in quanto sembrano un mero espediente tecnico che serve ad aggirare una difficoltà non sostanziale. D'altra parte, se si osserva che la funzione (7.14) puó essere riscritta nella forma seguente

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n(x+t)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n(x-t)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n(x-t)) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n(x+t)) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[G(x+t)+G(x-t)\right] \end{aligned}$$

dove $G$ è una primitiva di $g$. Abbiamo ottenuto una formula alternativa per la soluzione del nostro problema, formula che funziona solo se $f$ è due volte derivabile e $g$ una volta sola. Non siamo ancora arrivati a condizioni soddisfacenti sui dati ma abbiamo un sostanziale indebolimento di ipotesi.

## 7.8 Trasformata di Fourier

### 7.8.1 Motivazione

Le serie di Fourier si prestano bene a rappresentare funzioni periodiche di periodo $2\pi$ o di qualsiasi altro periodo. Supponiamo ora che $f$ sia definita su tutto l'asse reale e che non si ritenga conveniente procedere con una sua troncatura ad un qualsiasi intervallo limitato. Quale procedura seguire per provare a scomporre la funzione analogamente a quanto fatto nel caso delle serie di Fourier?
Sia $f \in L^1(R)$; fissato $T > 0$, se $f$ è sufficientemente regolare, si ha (cfr. per esempio il Teorema 7.6.1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right]\,, \quad x \in [-T, T] \tag{7.69}$$

dove

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\,dt\,, \quad n \geq 0\,, \qquad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\,dt\,, \quad n \geq 1\,.$$

Sostituendo tali valori dei coefficienti $a_n$, $b_n$ in (7.69) si ha

$$f(x) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]\,dt$$

Cosa succede se facciamo divergere il periodo $T$?
Osserviamo innanzitutto che, poiché $f \in L^1(R)$, risulta

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\,;$$

si ha quindi

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt = 0\,.$$

C'è allora da aspettarsi che si abbia

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]\,dt\,. \tag{7.70}$$

Posto $\Delta\omega = \pi T^{-1}$ e

$$\omega_n = \frac{n\pi}{T} = n\Delta\omega\,,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T}^{T} f(t)\cos\left[\omega_n(x-t)\right]\,dt\,. \tag{7.71}$$

Se poniamo

$$h(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(t)\cos[\omega(x-t)]\,dt\,,$$

l'espressione a secondo membro in (7.71) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(\omega_n)\Delta\omega\,.$$

Si tratta di una sorta di somma di Riemann relativa all'integrale

$$\int_0^{\infty} h(\omega)\,d\omega\,.$$

Facendo tendere $\Delta\omega$ a zero, ovvero il periodo $T$ a infinito, ricordando (7.70), (7.71), è ragionevole allora attendersi che

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[\omega(x-t)]\,dt \right) d\omega\,. \tag{7.72}$$

La (7.72) puó essere riscritta nella forma piú espressiva

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)]\,d\omega\,, \tag{7.73}$$

con

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt\,, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt\,. \tag{7.74}$$

Tali formule, nella loro struttura, ricordano rispettivamente la (7.24) e le (7.28) relative alle serie di Fourier. Esse di fatto ne rappresentano la versione continua: un integrale sostituisce infatti la sommatoria e i valori discreti $n$ vengono sostituiti dal parametro continuo $\omega$.

Se, invece di prendere le mosse dalla serie (7.69), se ne considera la forma esponenziale

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi x}{T}} \tag{7.75}$$

con i coefficienti $c_n$ che in questo caso assumono la forma

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{T}}\, dx\,, \quad n \in Z\ , \tag{7.76}$$

si perviene alla seguente formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt\right] e^{i\omega x}\, d\omega\,. \tag{7.77}$$

L'integrale interno si denota nel modo seguente

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt\,. \tag{7.78}$$

Tale integrale, che ha sicuramente senso nel caso in cui $f \in L^1(R)$, prende il nome trasformata di Fourier di $f$.
La (7.77) allora puó essere interpretata come una formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega\,, \tag{7.79}$$

una formula cioè che consente di risalire alla funzione originaria $f$ una volta che ne sia nota la trasformata di Fourier.

**Esempio 7.8.1** *Consideriamo la funzione*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se\ t < 0 \\ \\ e^{-t} & se\ t \geq 0\,. \end{cases}$$

*Poiché*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(1+i\omega)t} = 0\,,$$

*si ha*

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}\, dt = \lim_{r\to\infty}\int_0^{r} e^{-t}e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{1+i\omega}\,.$$

*Si osservi che essendo*

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\,,$$

$\hat{f}$ *non appartiene a* $L^1$.

**Esempio 7.8.2** *Consideriamo la funzione*

$$t \in R \longrightarrow f(t) = e^{-|t|}\,.$$

*Si verifica allora che*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}\,.$$

*In tal caso la trasformata* $\hat{f}$ *è sommabile; si puó dimostrare allora che sussiste la formula di inversione* (7.79).

**Esempio 7.8.3** *Sia $\chi_a$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-a, a]$. Si ha allora*

$$\hat{\chi}_a(\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{i\omega} = 2\,\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,.$$

*Anche in questo caso la trasformata di Fourier non è sommabile.*

**Esempio 7.8.4** *Consideriamo la funzione*

$$h(t) = \begin{cases} 0 & se\ t \notin [-1,1] \\ \\ 1 - |t| & se\ t \in [-1,1]\,. \end{cases}$$

*Poiché $h$ è pari si ha*

$$\hat{h}(\omega) = 2\int_{0}^{1} (1-t)\cos(\omega t)\, dt = \left[\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^2\,.$$

### 7.8.2 Proprietà della Trasformata di Fourier

Alcuni degli esempi proposti mettono in evidenza che non sempre la trasformata di Fourier di una funzione è sommabile. Tale inconveniente suggerisce particolare cautela quando si vuole dare significato alla formula di inversione (7.79). In compenso peró almeno localmente la trasformata di Fourier presenta interessanti proprietà di regolarità; sussiste infatti il seguente risultato noto come teorema di Riemann-Lebesgue.

**Teorema 7.8.1** *Se $f \in L^1$ allora $\hat{f}$ è uniformemente continua in R; si ha inoltre*

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0\,. \tag{7.80}$$

Limitiamoci qui a dimostrare che $\hat{f}$ è limitata e continua. Per quanto riguarda la limitatezza basta osservare che risulta

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,.$$

Per quanto riguarda la continuità si ha

$$|\hat{f}(\omega + \Delta\omega) - \hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} [e^{-i\Delta\omega t} - 1]\, dt \right|\,.$$

Essendo

$$\left| f(t) e^{-i\omega t} [e^{-i\Delta\omega t} - 1] \right| \leq |f(t)| \left| e^{-i\Delta\omega t} - 1 \right| \leq 2|f(t)|\,,$$

per il teorema sulla convergenza dominata si puó passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere in tal modo

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} |\hat{f}(\omega + \Delta\omega) - \hat{f}(\omega)| = 0\,.$$

Riportiamo nel seguente teorema un elenco delle principali proprietà della trasformata di Fourier.

**Teorema 7.8.2** *Sia $f \in L^1(R)$.*

*(i) Se $a \in R$, posto*

$$\tau_a f\,:\, x \in R \longrightarrow f(x-a)\,,$$

*si ha*

$$\mathcal{F}[\tau_a f](\omega) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)\,.$$

*(ii) Se $f$ è continua e regolare a tratti e se $f' \in L^1$ si ha*

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)\,; \tag{7.81}$$

*se la funzione*

$$\phi\,:\, x \longrightarrow xf(x)$$

*è sommabile allora risulta*

$$\hat{\phi}(\omega) = i\hat{f}'(\omega)\,. \tag{7.82}$$

*(iii) Se $f, g \in L^1$ allora*

$$\mathcal{F}[f * g] = \hat{f}\,\hat{g}\,. \tag{7.83}$$

La proprietà (i) è di facile verifica.
Dimostriamo la proprietà (ii). Si osserva innanzitutto che, essendo

$$\lim_{t\to\infty} f(x) = \int_0^\infty f'(t)\,dt + f(0)\,,$$

$f$ converge all'infinito; poiché $f$ sommabile tale funzione deve allora essere infinitesima per $t$ che diverge positivamente. Lo stesso risultato ovviamente si ottiene se $t$ diverge negativamente. Si ha allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,. \tag{7.84}$$

Ció premesso risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &\qquad \text{(integrando per parti e sfruttando la (7.84))} \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\omega\hat{f}(\omega)\,, \end{aligned}$$

cioè (7.81).
Essendo

$$x\,e^{-i\omega x} = i\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega x}$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\hat{f}'(\omega)$$

ovvero (7.82).
Dimostriamo infine la proprietà (iii). Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f*g](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}g(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-y)}f(x-y)\,dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z}f(z)\,dz\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}g(y)\,dy\right) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

cioè (7.83).

**Esempio 7.8.5** *Consideriamo la classica funzione di Gauss*

$$t \in R \longrightarrow G(t) = \exp\left(-\frac{a}{2}\,t^2\right).$$

*Si ha ovviamente*

$$G'(t) + a\,t\,G(t) = 0\,,$$

*da cui, ricordando* (7.81) *e* (7.82),

$$a\,\hat{G}'(\omega) + \omega\,\hat{G}(\omega) = 0\,.$$

*Risolvendo tale equazione differenziale si ottiene*

$$\hat{G}(\omega) = C\,e^{-\frac{\omega^2}{2a}}\,.$$

*Per determinare il valore della costante $C$ basta osservare che*

$$C = \hat{G}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{at^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,.$$

*Si ha in definitiva*

$$\hat{G}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{2a}}\,.$$

Per quanto riguarda la formula di inversione (7.79) sussiste un risultato analogo a quello illustrato per le serie di Fourier nel teorema 7.6.1.

**Teorema 7.8.3** *Se $f \in L^1(R)$ è regolare a tratti risulta*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]\,. \tag{7.85}$$

*Se inoltre $\hat{f} \in L^1(R)$ allora $f$ è continua e risulta*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\,. \tag{7.86}$$

### 7.8.3 La Trasformata di Fourier in $L^2$

Quando si è introdotta la Serie di Fourier una particolare enfasi è stata riservata alla teoria $L^2$; solo in una fase successiva ci si è soffermati sulle proprietà di convergenza puntuale o uniforme. Quest'ultimo punto di vista ci ha fin qui guidato nel proporre le pricipali proprietà della Trasformata di Fourier. Vogliamo in questo paragrafo illustrare, per la Trasformata di Fourier, un approccio che puó essere messo in relazione con la teoria $L^2$ delle Serie di Fourier.
Sia $f \in L^2(R)$; poiché non è detto che $f$ sia anche sommabile la definzione di trasformata di Fourier per una tale funzione richiede una certa attenzione.
Consideriamo la restrizione di $f$ all'intervallo $[-r, r]$ con $r \in R$. Tale restrizione appartiene a $L^1([-r, r])$; si ha infatti per la disuguaglianza di Schwarz

$$\int_{-r}^{r}|f(x)|dx \le \left(\int_{-r}^{r}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-r}^{r}dx\right)^{1/2} = (2r)^{1/2}\|f\|_{L^2}\,. \tag{7.87}$$

Ha senso quindi calcolare la trasformata di Fourier

$$\phi_r(\omega) = \int_{-r}^{r} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,. \tag{7.88}$$

Cosa succede se facciamo divergere $r$? si puó dimostrare che le funzioni (7.88) convergono in $L^2(R)$ ad una funzione che denotiamo con $\hat{f}$; si ha cioè

$$\lim_{r\to\infty} \|\phi_r - \hat{f}\|_{L^2} = 0 .$$

Tale funzione $\hat{f}$ è per definizione la Trasformata di Fourier di $f$.
Una volta definita la trasformata di Fourier di una funzione di $L^2$ si puó dimostrare che sussiste la seguente identità, nota come identità di Plancherel, che fa le veci della classica Identità di Parceval (7.42).

**Teorema 7.8.4** *Se $f \in L^2(R)$ allora anche la sua Trasformata di Fourier appartiene a $L^2$; si ha inoltre*

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2} . \tag{7.89}$$

Consideriamo due funzioni $f, g$ tali che esse e le loro trasformate di Fourier appartengano a $L^1 \cap L^2$. Tenendo presente la formula di inversione (7.86) si ha

$$\begin{aligned}
2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{ix\omega}\, d\omega}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)}e^{-ix\omega}\, d\omega\right) dx \\
&= \int\int_{R^2} f(x)e^{-ix\omega}\overline{\hat{g}(\omega)}\, dxd\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega\, dx}\right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, d\omega
\end{aligned}$$

Se $f = g$ si ottiene la (7.89). La dimostrazione nel caso in cui $f$ appartiene a $L^2$ si ottiene usando argomenti di densità. Osserviamo per concludere che per funzioni di classe $L^2$ vale anche una formula di inversione (7.79); tale formula va peró correttamente interpretata.
Poniamo

$$\psi_r(x) = \int_{-r}^{r} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega ; \tag{7.90}$$

si puó dimostrare che, al tendere di $r$ ad infinito, la famiglia di funzioni (7.90) tende in $L^2$ a $f$. Quindi la formula di inversione (7.79) in un certo senso continua a sussistere purché si interpreti nel modo giusto il simbolo di integrale.

## 7.9 Applicazioni

Riprendiamo lo studio dell'equazione del calore (7.1) cui imponiamo la condizione iniziale

$$u(x, 0) = f(x) , \quad x \in R ;$$

non ci sono condizioni al bordo che vanno sostituite da ipotesi che assicurino che la soluzione $u$ e il dato iniziale $f$ tendano a zero in modo sufficientemente rapido per $|x|$ che diverge.
Se, per ogni fissato valore della variabile $t$, si applica la trasformata di Fourier all'equazione (7.1), ricordando la (7.81), si ha

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + \omega^2\hat{u}(\omega, t) = 0 .$$

Per ogni $\omega$ fissato abbiamo quindi una equazione differenziale ordinaria del primo ordine nella variabile $t$. Se si aggiunge la condizione iniziale

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

si ottiene

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) \exp(-\omega^2 t) .$$

Dobbiamo adesso risalire all'espressione della soluzione $u$ del nostro problema.
Si osserva innanzitutto (cfr. Esempio 7.8.5) che $\exp(-\omega^2 t)$ è la trasformata di Fourier della funzione

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) .$$

Risulta allora

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) \hat{K}_t(\omega) .$$

Ricordando la (7.83) si ottiene allora

$$\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[f * K_t]$$

da cui

$$u(x, t) = [f * K_t](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy .$$

Abbiamo in tal modo ottenuto una espressione per la soluzione del nostro problema; che tale funzione sia effettivamente la soluzione cercata è oggetto di verifica.

Terminiamo tale veloce rassegna dei principali risultati relativi alla Trasformata di Fourier riportando il seguente teorema, noto come Sampling Theorem, molto utilizzato in Analisi dei Segnali.

**Teorema 7.9.1** *Supponiamo che $f \in L^2$ sia a banda limitata, risulti cioè*

$$\hat{f}(\omega) = 0 , \quad \textit{per } |\omega| \geq T$$

*con $T$ costante opportuna.*
*Allora $f$ è completamente determinata dai valori che essa assume nei punti*

$$x_n = \frac{n\pi}{T} , \quad n \in Z ;$$

*più precisamente si ha*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) \frac{\sin(Tx - n\pi)}{Tx - n\pi} . \tag{7.91}$$

L'utilità di un tale risultato è evidente; un segnale infatti puó essere ricostruito semplicemente facendo rilevazioni su un insieme discreto di valori della variabile temporale.

Consideriamo la restrizione di $\hat{f}$ all'intervallo $[-T, T]$ e sviluppiamo tale funzione in serie di Fourier nella sua forma esponenziale

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}} . \tag{7.92}$$

In tale formula i coefficienti hanno la forma (7.76); si ha pertanto

$$c_{-n} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{\frac{in\pi\omega}{T}} d\omega .$$

L'ipotesi che $\hat{f}$ sia di quadrato integrabile comporta (cfr. (7.87)) che tale funzione è anche sommabile. Si ha quindi, applicando la formula di inversione (7.86),

$$c_{-n} = \frac{\pi}{T} f\left(\frac{n\pi}{T}\right). \tag{7.93}$$

In definitiva, sempre per la formula di inversione (7.86), utilizzando (7.92) e (7.93), risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{T}\right)e^{-\frac{in\pi\omega}{T}}e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{T}\right)\int_{-T}^{T} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}}e^{i\omega x}d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{T}\right)\frac{\sin(Tx-n\pi)}{Tx-n\pi} \end{aligned}$$

cioè (7.91). Si osservi che nei precedenti passaggi abbiamo proceduto invertendo il simbolo di serie con il simbolo di integrale. Tale operazione è lecita in quanto, indicata con $S_N$ la somma parziale $N-$ma della serie (7.92) la successione $\{S_N\}$ converge in $L^2$ a $\hat{f}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega &= \lim_{N\to\infty}\int_{-T}^{T} S_N(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_{-n}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}}e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}}e^{i\omega x}d\omega\,. \end{aligned}$$

# Capitolo 8

# Equazioni a Derivate Parziali del $1^\circ$ Ordine

## 8.1 Sistemi di Equazioni Differenziali Ordinarie

Richiamiamo in tale paragrafo introduttivo alcuni risultati relativi ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Poiché una equazione differenziale di qualsiasi ordine o un qualsiasi sistema puó, con un semplice artificio, ricondursi ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, ci limitiamo a riportare brevemente le notazioni ed i risultati che si riferiscono a tale caso.
Per denotare un sistema di equazioni differenziali del primo ordine si usa la seguente notazione

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \cdots, y_n)\,, \end{array}\right. \tag{8.1}$$

dove $f_i$ sono funzioni definite in un aperto $A \subseteq R^{n+1}$. Se poniamo

$$\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n) \quad , \quad \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)\,,$$

il sistema (8.1) assume la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

che richiama quella usata per le equazioni differenziali del primo ordine.
Solitamente al sistema (8.1) si associa un dato iniziale nel modo seguente. Fissato un punto $(\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n) = (\bar{x}, \bar{\mathbf{y}}) \in A$, per problema di Cauchy si intende il seguente sistema di condizioni

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \\ y_1(\bar{x}) = \bar{y}_1 \\ \cdots \\ y_n(\bar{x}) = \bar{y}_n, \end{array}\right.$$

o, piú sinteticamente,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(\bar{x}) = \bar{\mathbf{y}}\,. \end{array}\right. \tag{8.2}$$

In relazione al problema di Cauchy (8.2) sono noti risultati di esistenza ed unicità; limitiamoci qui a ricordare il seguente teorema.

**Teorema 8.1.1** *Supponiamo che la funzione* $\mathbf{f}$ *sia continua nell'aperto* $A \subset R^{n+1}$ *e soddisfi, in un intorno del punto* $(\bar{x}, \bar{\mathbf{y}})$*, la seguente condizione di Lipschitz*

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| , \tag{8.3}$$

*dove* $\| \cdot \|$ *denota la norma euclidea di* $R^n$*.*
*Allora il problema di Cauchy* (8.2) *ammette un'unica soluzione definita nell'intervallo* $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ *con* $\delta > 0$*.*

## 8.2 Esempi di Equazioni a Derivate Parziali

I sistemi di equazioni differenziali ordinarie si prestano bene a modellizzare alcuni fenomeni fisici. Per molti altri fenomeni è però necessario ricorrere ad equazioni a derivate parziali. Ad esempio, per descrivere il fenomeno di propagazione di raggi luminosi in un mezzo omogeneo il cui indice di rifrazione può variare punto per punto, bisogna studiare l'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = f ,$$

nota come *equazione eikonale*.
Altre classiche equazioni a derivate parziali sono

$$u_t = u_{xx} ,$$

nota come *equazione del calore*, che descrive l'andamento della temperatura di una sbarra,

$$u_{tt} = u_{xx} ,$$

detta *equazione delle onde*, che descrive le oscillazioni di una corda elastica e la classica *equazione di Laplace*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

che interviene quando, in presenza di un sistema di cariche elettriche, si vuole descrivere il potenziale nella zona non occupata dalle cariche stesse.
Si tratta in tutti questi ultimi casi di equazioni a derivate parziali del secondo ordine.

Consideriamo qualche semplice esempio.

**Esempio 8.2.1** *La seguente equazione a derivate parziali del primo ordine*

$$u_t + a\, u_x = 0 , \tag{8.4}$$

*con* $a \in R$*, è nota come equazione del trasporto.*
*Si può facilmente verificare che, assegnata una funzione* $g$ *di classe* $C^1(R)$*,*

$$u(x, t) = g(x - a\, t)$$

*è soluzione di* (8.4)*.*

**Esempio 8.2.2** *Consideriamo l'equazione*

$$u_{xy} = 0 .$$

*Integrando due volte, prima rispetto alla variabile* $y$ *poi rispetto alla variabile* $x$*, si ha*

$$u(x, y) = f(x) + g(y)$$

*con* $f, g$ *di classe* $C^1(R)$*.*

## 8.3 Il Metodo delle Caratteristiche

Occupiamoci delle equazioni a derivate parziali del primo ordine cominciando, per semplicità, dal caso bidimensionale.
Sia $\Omega$ un aperto di $R^2$ di classe $C^1$ e sia

$$F : (x, y, z, p, q) \in \overline{\Omega} \times R^3 \longrightarrow R$$

una funzione anch'essa di classe $C^1$.
Consideriamo la seguente equazione a derivate parziali del primo ordine

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0\,, \tag{8.5}$$

cui associamo la condizione al bordo

$$u(x, y) = g(x, y)\,, \quad (x, y) \in \Gamma \tag{8.6}$$

con $\Gamma \subseteq \partial\Omega$.
Vogliamo risolvere il problema (8.5), (8.6) con il cosiddetto *metodo delle caratteristiche*. Si vuole con un tale procedimento ricondurre il problema dato ad un problema a valori iniziali per un opportuno sistema di equazioni differenziali ordinarie. Allo scopo bisogna individuare curve opportune che collegano punti di $\Omega$ con punti collocati, possibilmente, sulla parte di frontiera su cui è assegnato il dato iniziale (8.6); la soluzione si ottiene poi risolvendo un problema a valori iniziali relativo ad una equazione differenziale ordinaria.
Denotiamo con

$$x = x(s)\,, \qquad y = y(s) \tag{8.7}$$

opportune equazioni parametriche della curva da determinare; poniamo

$$z(s) = u(x(s), y(s)) \tag{8.8}$$

e

$$p(s) = u_x(x(s), y(s))\,, \quad q(s) = u_y(x(s), y(s))\,. \tag{8.9}$$

Supponiamo che la soluzione $u$ di (8.5) sia di classe $C^2$.
Derivando le (8.9) si ottiene

$$\begin{cases} p'(s) = u_{xx}(x(s), y(s))\, x'(s) + u_{xy}(x(s), y(s))\, y'(s) \\ q'(s) = u_{xy}(x(s), y(s))\, x'(s) + u_{yy}(x(s), y(s))\, y'(s)\,. \end{cases} \tag{8.10}$$

Derivando inoltre l'equazione (8.5) rispetto a $x$ e rispetto a $y$ si ha

$$\begin{cases} F_x + F_z u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{xy} = 0 \\ F_y + F_z u_y + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} = 0\,. \end{cases} \tag{8.11}$$

Le (8.10) e le (8.11) presentano l'inconveniente di far riferimento alle derivate seconde di $u$. Di tali derivate è possibile però liberarsi richiedendo che

$$\begin{cases} x' = F_p \\ y' = F_q\,. \end{cases} \tag{8.12}$$

Con tale posizione infatti, da (8.10) e (8.11), si ottiene

$$\begin{cases} p' = -F_z p - F_x \\ q' = -F_z q - F_y\,. \end{cases} \tag{8.13}$$

Infine, derivando la (8.8), si ha

$$z' = u_x x' + u_y y'$$

da cui, ricordando ancora le condizioni (8.12), si ottiene

$$z' = pF_p + qF_q \,. \tag{8.14}$$

Le equazioni (8.12), (8.13) e (8.14) costituiscono un sistema di equazioni differenziali che prende il nome di *sistema delle equazioni caratteristiche;* le curve (8.7) vengono chiamate *curve caratteristiche.*

Consideriamo il caso di una equazione lineare

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = c(x,y)\,u \,. \tag{8.15}$$

Il sistema (8.12) assume la seguente forma

$$\begin{cases} x' = a(x,y) \\ y' = b(x,y) \end{cases} \tag{8.16}$$

dal quale si può risalire alle curve caratteristiche.
Per ottenere l'espressione della soluzione bisogna risolvere l'equazione differenziale (8.14) che, in base alla (8.15), diventa

$$z' = c(x(s), y(s))z \,. \tag{8.17}$$

Nel caso delle equazioni lineari (8.15) non è quindi necessario ricorrere alle equazioni (8.13).
Per l'equazione del trasposto (8.4) il sistema (8.16) si scrive nel modo seguente

$$\begin{cases} x'(s) = a \\ t'(s) = 1\,; \end{cases}$$

le curve caratteristiche sono le rette di equazioni $x - at = c$ con $c$ costante arbitraria. Dalla (8.17), che in tal caso diventa $z' = 0$, si deduce che la soluzione si mantiene costante lungo tali rette caratteristiche.

Consideriamo ora il caso $n-$dimensionale. Sia $\Omega$ un aperto di $R^n$ di classe $C^1$ e sia

$$F : (x, z, p) \in \overline{\Omega} \times R^{n+1} \longrightarrow R$$

una funzione di classe $C^1$.
Consideriamo la seguente equazione a derivate parziali del primo ordine

$$F(x, u, \nabla u) = 0 \tag{8.18}$$

dove $\nabla u = (u_{x_i})$ denota il gradiente di $u$.
Se

$$x(s) = (x_1(s), \cdots, x_n(s))$$

è una rappresentazione parametrica di una curva di $R^n$ il cui sostegno è contenuto in $\Omega$, poniamo

$$z(s) = u(x(s))$$

e

$$p(s) = (p_i(s)) = (u_{x_i}(x(s)))\,.$$

Sia $u$ una soluzione di classe $C^2$ di (8.18); ragionando come nel caso dell'equazione (8.5) si ottiene il seguente sistema di $2n+1$ equazioni

$$\left\{\begin{aligned} & x_i' = F_{p_i} && i = 1, \cdots, n \\ & p_i' = -F_{x_i} - F_z p_i && i = 1, \cdots, n \\ & z' = \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} p_i \,. \end{aligned}\right. \tag{8.19}$$

**Esempio 8.3.1** *Sia* $\mathbf{a} = (a_i)$ *un vettore di* $R^n$*. La versione n-dimensionale dell'equazione del trasporto* (8.4) *è*

$$u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0\,. \tag{8.20}$$

*La soluzione di* (8.20) *in* $R^n \times [0, +\infty[$*, che verifica la condizione al bordo*

$$u(x, 0) = g(x)\,, \quad x \in R^n$$

*con g funzione di classe* $C^1(R^n)$*, è*

$$u(x_1, \cdots, x_n, t) = g(x_1 - a_1 t, \cdots, x_n - a_n t)\,.$$

La (8.20) è una equazione a derivate parziali lineare cioè del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_0(x) u\,. \tag{8.21}$$

Per tali equazioni il sistema delle equazioni caratteristiche si riduce sostanzialmente al seguente sistema

$$\left\{\begin{aligned} & x_i' = a_i(x) \qquad i = 1, \cdots, n \\ & z' = a_0(x) z\,. \end{aligned}\right. \tag{8.22}$$

Nel caso dell'equazione lineare

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha u \tag{8.23}$$

dal sistema (8.22) si deduce che le curve caratteristiche sono le semirette uscenti dall'origine; risolvendo quindi lungo tali semirette l'equazione $z' = \alpha z$, si ha che ogni soluzione di (8.23) è una funzione positivamente omogenea di grado $\alpha$. Si riottiene in tal modo il classico Teorema di Eulero.

## 8.4 Equazioni quasi lineari

Consideriamo un'equazione a derivate parziali del primo ordine quasi lineare, lineare cioè nelle due derivate parziali prime

$$a(x, y, u)\, u_x + b(x, y, u)\, u_y = c(x, y, u)\,; \tag{8.24}$$

supponiamo che le funzioni $a, b, c$ siano definite in un aperto di $R^3$ e ivi di classe $C^1$.
Anche in questo caso, come già nel caso dell'equazione lineare (8.15), il sistema di equazioni caratteristiche si riduce ad un sistema ridotto di tre sole equazioni

$$\begin{cases} x' = a(x,y,z) \\ y' = b(x,y,z) \\ z' = a(x,y,z)\,p + b(x,y,z)\,q = c(x,y,z)\,. \end{cases} \tag{8.25}$$

Illustriamo un primo metodo per trovare una soluzione dell'equazione (8.24) che soddisfi una assegnata condizione iniziale.
Supponiamo di avere a disposizione due integrali primi indipendenti

$$\psi_1(x,y,z) = c_1\,, \quad \psi_2(x,y,z) = c_2 \tag{8.26}$$

del sistema di equazioni differenziali (8.25). Assegnata una generica funzione di due variabili

$$(r,s) \longrightarrow \Phi(r,s)\,,$$

consideriamo l'equazione

$$\Phi(\psi_1(x,y,z), \psi_2(x,y,z)) = 0\,. \tag{8.27}$$

Supponiamo che all'equazione (8.27) sia possibile applicare il classico Teorema di Dini e che quindi essa definisca implicitamente una funzione $u$ delle due variabili $x, y$; si ha allora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial z}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial z}}\,.$$

Il campo vettoriale $(a, b, c)$ è, in ogni punto, tangente alla curva integrale del sistema (8.25) passante per quel punto; tali curve integrali giacciono inoltre sulle superfici rappresentate dalle equazioni (8.26). Risulta pertanto

$$a\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + b\,\frac{\partial \psi_i}{\partial y} + c\,\frac{\partial \psi_i}{\partial z} = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Un semplice calcolo mostra allora che la funzione $u$ è soluzione di (8.24).
Fissiamo ora un dato iniziale: imponiamo cioè al grafico della soluzione di passare per una curva che assumiamo sia descritta dal seguente sistema

$$\begin{cases} \phi_1(x,y,z) = 0 \\ \phi_2(x,y,z) = 0\,. \end{cases} \tag{8.28}$$

Per determinare la funzione incognita $\Phi$ in grado, attraverso la (8.27), di fornirci almeno in forma implicita l'espressione della soluzione, si procede nel modo seguente:
- si considera il sistema

$$\begin{cases} \psi_1(x,y,z) = c_1 \\ \psi_2(x,y,z) = c_2 \\ \phi_1(x,y,z) = 0 \\ \phi_2(x,y,z) = 0\,; \end{cases}$$

- si eliminano quindi le variabili $x, y, z$ in modo da ottenere una equazione del tipo

$$\Phi(c_1, c_2) = 0\,;$$

- la soluzione cercata assume allora la forma (8.27).

**Osservazione 8.4.1** *Ovviamente se la curva assegnata* (8.28) *è soluzione del sistema di equazioni caratteristiche* (8.25) *il problema è indeterminato, nel senso che esistono infinite superfici il cui sostegno contiene la curva assegnata.*
*Consideriamo a titolo di esempio l'equazione*

$$x\,u_y - y\,u_x = 0\,, \tag{8.29}$$

*le cui curve caratteristiche sono le circonferenze con centro nell'origine. Si vuole una soluzione di* (8.29) *passante per la curva individuata dalle equazioni*

$$z = 1\,, \quad x^2 + y^2 = 1\,;$$

*allora ogni funzione del tipo $u(x^2 + y^2)$, con $u$ tale che $u(1) = 1$, è soluzione del problema.*

**Esempio 8.4.1** *Consideriamo ancora l'equazione* (8.29). *Due integrali primi indipendenti del sistema di equazioni differenziali* (8.25) *sono dati da*

$$z = c_1\,, \quad x^2 + y^2 = c_2\,. \tag{8.30}$$

*Cerchiamo una soluzione il cui grafico passi per la semiretta di $R^3$*

$$y = 0\,, \quad z = x\,, \quad x \geq 1\,. \tag{8.31}$$

*Eliminando le variabili $x, y, z$ dal sistema costituito dalle equazioni* (8.30) *e* (8.31) *si ottiene la condizione $c_1^2 = c_2$. Quindi la soluzione del nostro problema è la superficie conica di equazione*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Nei seguenti esempi utilizzeremo il sistema di equazioni caratteristiche per esibire l'espressione analitica di soluzioni di problemi al bordo relativi a equazioni a derivate parziali del primo ordine.

**Esempio 8.4.2** *Consideriamo l'equazione lineare*

$$u_x + u_y = 1\,.$$

*Le curve caratteristiche sono le rette di equazioni $y = x + c$. Per ottenere l'espressione di una soluzione basta osservare che la restrizione di una tale soluzione lungo ciascuna delle rette caratteristiche deve soddisfare l'equazione $z' = 1$ e tener conto delle eventuali condizioni iniziali.*

**Esempio 8.4.3** *Proviamo ora a determinare la soluzione, nel primo quadrante del piano, dell'equazione*

$$x\,u_y - y\,u_x = u\,,$$

*la quale verifichi la condizione*

$$u(x, 0) = g(x)\,, \quad \text{se } x \geq 0\,. \tag{8.32}$$

*Il sistema delle equazioni caratteristiche si riduce a*

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = z\,. \end{cases}$$

*Se si tiene anche conto di* (8.32) *si ha*

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = g(r)e^{\theta}\,.$$

*L'espressione della soluzione, in coordinate polari, è allora*

$$u(r, \theta) = g(r)e^{\theta}\,.$$

**Esempio 8.4.4** *Consideriamo la seguente equazione*

$$u_x + u_y = u^2\,.$$

*Cerchiamo la soluzione definita nel semipiano delle $y$ positive la quale soddisfi la condizione al bordo*

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in R\,. \tag{8.33}$$

*Per ottenere l'espressione della soluzione bisogna tener presente che le curve caratteristiche sono le rette di equazioni $y = x + c$. Risolvendo l'equazione differenziale $z' = z^2$ e tenendo conto del dato al bordo* (8.33) *si ottiene la seguente espressione*

$$u(x,y) = \frac{g(x-y)}{1 - y\,g(x-y)}$$

*per la soluzione.*

Nel caso generale una equazione a derivate parziali quasi lineare del primo ordine assume la seguente forma

$$\mathbf{a}(x,u)\cdot\nabla u = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_0(x,u)\,, \tag{8.34}$$

dove $\mathbf{a} = (a_i)$ è una funzione vettoriale definita in un aperto di $R^{n+1}$.
Un esempio notevole di equazione del tipo (8.34) è costituito dall'equazione

$$u_t + \operatorname{div}\,\mathbf{F}(u) = u_t + \mathbf{F}'(u)\cdot\nabla u = u_t + \sum_{i=1}^{n} F_i'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0\,; \tag{8.35}$$

la (8.35) è nota come *legge di conservazione scalare*.

## 8.5 Punti di frontiera non caratteristici

Dai vari esempi riportati nel precedente paragrafo emerge che il problema al bordo (8.5), (8.6) ha buone possibilità di essere risolto se ci si appella al sistema delle equazioni caratteristiche. In tale paragrafo intendiamo verificare che tale sistema consente effettivamente di costruire una soluzione almeno in un intorno di un punto di $\Gamma$.
Per semplicità cominciamo a trattare il caso in cui la frontiera è piatta in un intorno di un suo punto che possiamo pensare essere l'origine del piano. Associamo quindi all'equazione (8.5) la condizione

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in I \tag{8.36}$$

dove $I$ è un intorno di zero.
Consideriamo il sistema delle equazioni caratteristiche (8.12), (8.13), (8.14) e assegniamo opportune condizioni iniziali

$$x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad z(0) = z_0\,, \quad p(0) = p_0\,, \quad q(0) = q_0\,.$$

Prima di procedere bisogna assicurarsi che siano però verificate alcune condizioni di compatibilità. Se la curva caratteristica passa per l'origine deve essere, in accordo con la condizione al bordo (8.36),

$$z_0 = u(0,0) = g(0)\,. \tag{8.37}$$

Sempre per la (8.36) deve inoltre essere soddisfatta la condizione

$$p_0 = u_x(0,0) = g'(0)\,. \tag{8.38}$$

Infine, per il fatto che $u$ è soluzione dell'equazione (8.5), si ottiene un'ultima relazione cui deve soddisfare $q_0$

$$F(0,0,g(0),g'(0),q_0) = 0\,. \tag{8.39}$$

Osserviamo che la condizione (8.39) imposta su $q_0$ potrebbe o non prevedere soluzioni o riservarcene più di una.

**Definizione 8.5.1** *Se è soddisfatta la* (8.39) *si dice che il punto* $(0,0,g(0),g'(0),q_0)$ *è ammissibile.*

Per costruire una soluzione del problema al bordo (8.5), (8.36), almeno in un intorno dell'origine, è necessario assicurarsi che la condizione di compatibilità (8.39), per piccole perturbazioni, si conserva. A tale questione dà una risposta il seguente risultato.

**Teorema 8.5.1** *Se* $(0,0,g(0),g'(0),q_0)$ *è ammissibile e se*

$$F_q(0,0,g(0),g'(0),q_0) \neq 0 \tag{8.40}$$

*esiste un'unica funzione* $q(x)$*, definita in un intorno dello zero, tale che* $q(0) = q_0$ *e*

$$F(x,0,g(x),g'(x),q(x)) = 0\,. \tag{8.41}$$

*Il punto* $(x,0,g(x),g'(x),q(x))$ *è cioè ammissibile.*

Basta osservare che le (8.39) e (8.40) consentono di applicare il Teorema di Dini sulle funzioni implicite all'equazione

$$F(x,0,g(x),g'(x),q) = 0\,.$$

**Definizione 8.5.2** *Un punto ammissibile per cui sussista la* (8.40) *dicesi non caratteristico.*

Il fatto che la frontiera sia localmente piatta è solo una ipotesi di comodo di cui ci si può liberare. Supponiamo che la frontiera di $\Omega$ sia di classe $C^1$: ciò comporta che la frontiera, localmente, è il luogo degli zeri di una funzione di classe $C^1$ il cui gradiente non si annulla.

Quest'ultima condizione comporta che in un intorno di un suo punto la frontiera si rappresenta come il grafico, per esempio, di una funzione $\phi$ della variabile $x$. Allora con il cambio di variabili

$$X = x\,, \quad Y = y - \phi(x)\,, \tag{8.42}$$

ci si riconduce al caso di un dominio con frontiera localmente piatta.

Verifichiamo gli effetti della trasformazione (8.42) sull'equazione (8.5).

Poniamo

$$U(X,Y) = u(X, Y + \phi(X))\,.$$

Essendo anche

$$u(x,y) = U(x, y - \phi(x))$$

si ha

$$u_x(x,y) = U_X(x,y-\phi(x)) - U_Y(x,y-\phi(x))\phi'(x)\,, \quad u_y(x,y) = U_Y(x,y-\phi(x))\,.$$

L'equazione (8.5), nelle nuove variabili, diventa allora

$$G(X,Y,U,U_X,U_Y) = F(X, Y-\phi(X), U, U_X - U_Y\phi'(X), U_Y) = 0\,;$$

tale equazione ha la stessa struttura dell'equazione originaria.

**Osservazione 8.5.1** *Nel caso in cui la condizione al bordo assuma la forma generale* (8.6) *le condizioni di ammissibilità si presentano in forma più complessa. Supponiamo che* $\Gamma$ *si possa rappresentare mediante una coppia di funzioni* $(\alpha(\sigma), \beta(\sigma))$ *con* $\sigma$ *parametro ascissa curvilinea; al valore* $\sigma = 0$ *corrisponda il punto* $(x_0, y_0)$*. Allora, riscritta la* (8.6) *nella forma*

$$u(\alpha(\sigma), \beta(\sigma)) = g(\sigma)\,,$$

*le condizioni di compatibilità prevedono, oltre a* (8.37)*, le due condizioni*

$$\begin{cases} p_0\alpha'(0) + q_0\beta'(0) = g'(0) \\ F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0\,. \end{cases} \tag{8.43}$$

**Osservazione 8.5.2** *Nel caso in cui la frontiera non sia localmente piatta, sempre ammettendo che siano soddisfatte le condizioni di compatibilità* (8.43)*, la* (8.40) *va sostituita dalla seguente relazione*

$$F_p(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)\,\nu_x + F_q(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)\,\nu_y \neq 0 \tag{8.44}$$

*dove* $(\nu_x, \nu_y)$ *è un versore normale a* $\partial\Omega$ *in* $(x_0, y_0)$*.*
*Si dice allora che il punto* $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ *è non caratteristico.*

Quanto appena detto per il caso bidimensionale può essere riproposto in relazione al caso generale dell'equazione (8.18) cui affianchiamo una condizione al bordo analaga alla (8.6).
Limitiamoci qui a riportare cosa vuol dire che $(x_0, z_0, p_0)$, con $x_0$ punto della frontiera di $\Omega$, non è caratteristico. La condizione (8.44) assume in tale situazione la seguente forma

$$F_p(x_0, z_0, p_0) \cdot \nu = \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(x_0, z_0, p_0)\nu_i \neq 0\,, \tag{8.45}$$

dove $\nu = (\nu_i)$ è un versore normale alla frontiera di $\Omega$ in $x_0$.

## 8.6 Esistenza locale

Utilizzeremo ora il sistema delle equazioni caratteristiche per costruire la soluzione di un problema al bordo relativo all'equazione (8.5); tale costruzione ci consentirà di pervenire ad un risultato di esistenza locale, la soluzione cioè verrà esibita in un intorno di un punto $(x_0, y_0)$ della frontiera del dominio.
Per quanto osservato nel precedente paragrafo non è restrittivo supporre che tale punto sia l'origine e che la frontiera, in un intorno dell'origine, si riduca ad una porzione della retta di equazione $y = 0$.
Consideriamo pertanto il problema (8.5), (8.36).
Supponiamo che $(0, 0, g(0), g'(0), q_0)$ sia ammissibile e non caratteristico.
Per il Teorema 8.5.1, per $r$ è sufficientemente piccolo, esiste $q(r)$ tale che $q(0) = q_0$ e

$$F(r, 0, g(r), g'(r), q(r)) = 0\,. \tag{8.46}$$

Il sistema di equazioni caratteristiche (8.12), (8.13), (8.14) ammette soluzioni, che denotiamo con i simboli

$$x(r,s), \quad y(r,s), \quad z(r,s), \quad p(r,s), \quad q(r,s)\,,$$

in corrispondenza dei dati iniziali

$$x(r,0) = r\,,\ y(r,0) = 0\,,\ z(r,0) = g(r)\,,\ p(r,0) = g'(r)\,,\ q(r,0) = q(r)\,. \tag{8.47}$$

Dimostriamo che l'applicazione

$$(r,s) \longrightarrow (x(r,s), y(r,s)) \tag{8.48}$$

è invertibile almeno se $r, s$ sono sufficientemente piccoli.
Per le condizioni iniziali (8.47) risulta

$$x_r(0,0) = 1\,, \quad y_r(0,0) = 0\,.$$

Inoltre, per le (8.12), si ha

$$x_s(0,0) = F_p(0,0,g(0),g'(0),q_0)\,, \quad y_s(0,0) = F_q(0,0,g(0),g'(0),q_0)\,.$$

Quindi lo jacobiano della trasformazione (8.48) nell'origine assume il valore

$$F_q(0,0,g(0),g'(0),q_0)\,;$$

tale jacobiano è non nullo per la (8.40). L'asserto segue allora dal classico teorema di Dini per i sistemi di funzioni implicite.
Denotiamo con

$$(x,y) \longrightarrow (r(x,y), s(x,y)) \tag{8.49}$$

l'inversa della trasformazione (8.48); poniamo

$$u(x,y) = z(r(x,y), s(x,y)) \tag{8.50}$$

e

$$p(x,y) = p(r(x,y), s(x,y))\,, \quad q(x,y) = q(r(x,y), s(x,y))\,.$$

Vogliamo verificare che la funzione (8.50) è soluzione del problema al bordo (8.5), (8.36).
Sia

$$f(r,s) = F(x(r,s), y(r,s), z(r,s), p(r,s), q(r,s))\,;$$

si ha innanzitutto per le (8.47) e (8.46)

$$f(r,0) = 0\,. \tag{8.51}$$

Inoltre, ricordando le (8.12), (8.13), (8.14), risulta

$$\begin{aligned} f_s &= F_x x_s + F_y y_s + F_z z_s + F_p p_s + F_q q_s \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z(F_p p + F_q q) - F_p(F_z p + F_x) - F_q(F_z q + F_y) = 0\,. \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione, insieme alla (8.51), comporta che

$$F(x(r,s), y(r,s), z(r,s), p(r,s), q(r,s)) = 0\,. \tag{8.52}$$

Passando alle variabili $x, y$ mediante la trasformazione (8.49), la (8.52) diventa

$$F(x, y, u(x,y), p(x,y), q(x,y)) = 0\,.$$

Per dimostrare che la funzione $u$ data dalla (8.50) è soluzione dell'equazione (8.5) resta quindi da verificare che

$$p(x,y) = u_x(x,y)\,, \quad q(x,y) = u_y(x,y)\,. \tag{8.53}$$

Come conseguenza delle equazioni caratteristiche (8.12), (8.13) si ha

$$z_s = p x_s + q y_s\,. \tag{8.54}$$

Proviamo che

$$z_r = px_r + qy_r \,. \tag{8.55}$$

Poniamo

$$h = z_r - px_r - qy_r \,.$$

Si ha

$$h(r,0) = z_r(r,0) - p(r,0)x_r(r,0) - q(r,0)y_r(r,0) = 0 \tag{8.56}$$

per le (8.47).
Si ha inoltre

$$h_s = z_{rs} - p_s x_r - p x_{rs} - q_s y_r - q y_{rs} \,.$$

Derivando la (8.54) rispetto a $r$ e sostituendo il risultato ottenuto nella precedente uguaglianza, si ottiene

$$h_s = p_r x_s + q_r y_s - p_s x_r - q_s y_r \,.$$

Utilizzando ancora una volta le equazioni caratteristiche (8.12), (8.14), si ha

$$h_s = p_r F_p + q_r F_q + (F_x + pF_z)x_r + (F_y + qF_z)y_r \,. \tag{8.57}$$

Derivando ora la (8.52) rispetto a $r$ risulta

$$F_x x_r + F_y y_r + F_z z_r + F_p p_r + F_q q_r = 0 \,.$$

Tenendo conto di ciò nella (8.57) e ricordando la definizione di $h$ si ottiene

$$h_s = F_z(px_r + qy_r - z_r) = -F_z h \,.$$

Tale relazione, insieme alla (8.56), comporta che la funzione $h$ è identicamente nulla; si è ottenuta in tal modo la (8.55).
Dimostriamo da ultimo le (8.53).
Si ha, per le (8.54) e (8.55)

$$\begin{aligned} u_x &= z_r r_x + z_s s_x = (px_r + qy_r)r_x + (px_s + qy_s)s_x \\ &= p(x_s s_x + x_r r_x) + q(y_s s_x + y_r r_x) = p \,, \end{aligned}$$

essendo ovviamente

$$x_s s_x + x_r r_x = 1 \,, \quad y_s s_x + y_r r_x = 0 \,.$$

In modo analogo si ottiene la seconda delle (8.53).
Infine si verifica facilmente che $u$ soddisfa la condizione al bordo.

## 8.7 Applicazioni ed esempi

**A)** Cominciamo a trattare il caso più semplice dell'equazione lineare (8.21). Dal sistema (8.22) discende che le curve caratteristiche sono le traiettorie del campo vettoriale $\mathbf{a} = (a_i)$. Tali curve non si intersecano almeno se il campo vettoriale è ovunque non nullo.
Associamo all'equazione (8.21) la seguente condizione al bordo

$$u(x) = g(x) \,, \quad x \in \Gamma \,.$$

Per la (8.45) un punto $\bar{x} \in \Gamma$ è non caratteristico se

$$\mathbf{a}(\bar{x}) \cdot \nu(\bar{x}) \neq 0 \,,$$

dove $\nu$ denota un versore normale a $\Gamma$ in $\bar{x}$; $\Gamma$ ha quindi tutti punti non caratteristici se non è mai tangente alle traiettorie del campo.
Osserviamo ancora una volta che, ottenute le traiettorie del campo, bisogna risolvere l'ultima delle equazioni differenziali (8.22) per pervenire all'epressione della soluzione; in particolare, se $a_0 \equiv 0$, la soluzione è costante lungo ogni curva caratteristica.

**B)** Come esempio di equazione quasi lineare riprendiamo il caso della legge di conservazione (8.35); cerchiamo una soluzione definita nel semispazio delle $t$ positive, la quale verifichi la condizione iniziale

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in R^n\,.$$

Il sistema delle equazioni caratteristiche si riduce a

$$\begin{cases} x_i' = F_i'(z) \\ t' = 1 \\ z' = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione $t' = 1$ consente di prendere la variabile $t$ come la variabile in uso nelle rappresentazioni parametriche della curva caratteristica. Dall'ultima equazione si deduce che inoltre la funzione $z$ è costante sulle curve caratteristiche; quindi

$$z(t) = z_0 = g(x_0)\,,$$

con $x_0 \in R$. Si ha allora che le curve caratteristiche sono le rette

$$x = F'(g(x_0))t + x_0\,.$$

Se $n = 1$ e $F(u) = u^2$ si ottengono le rette di equazioni

$$x = 2g(x_0)t + x_0\,.$$

Si può dimostrare tali rette caratteristiche non si incontrano nel semipiano delle $t$ positive se si suppone $g' \geq 0$.
Se invece tale condizione non è soddisfatta le rette si intersecano in punti di tale semipiano; ciò rende impossibile utilizzare il metodo delle caratteristiche per ottenere la soluzione al di là di intorni dei punti di frontiera.
Se per esempio $g(x) = -x$ le rette caratteristiche hanno equazioni

$$x = x_0(1 - 2t)\,;$$

tali rette passano tutte per il punto $(0, \frac{1}{2})$.

**C)** Consideriamo ora, come esempio di equazione totalmente non lineare, l'equazione

$$u_x u_y = u\,; \tag{8.58}$$

cerchiamo una soluzione definita nel semipiano delle $x$ positive, che soddisfi la condizione al bordo

$$u(0,y) = y^2\,. \tag{8.59}$$

Il sistema delle equazioni caratteristiche è

$$\begin{cases} x' = q \\ y' = p \\ z' = 2pq \\ p' = p \\ q' = q\,. \end{cases}$$

Tale sistema può essere facilmente risolto partendo dalle ultime due equazioni; imponendo le opportune condizioni iniziali si ha allora

$$\begin{cases} p = p_0 e^s \\ q = q_0 e^s \\ x = q_0(e^s - 1) \\ y = y_0 + p_0(e^s - 1) \\ z = z_0 + p_0 q_0 (e^{2s} - 1)\,. \end{cases} \tag{8.60}$$

Verifichiamo le condizioni di compatibilità. Si ha innanzitutto $z_0 = y_0^2$; tenendo conto della (8.59) si ha anche

$$q_0 = 2y_0\,.$$

Sfuttando il fatto che $u$ è soluzione di (8.58) risulta

$$p_0 q_0 = y_0^2$$

da cui

$$p_0 = \frac{y_0}{2}\,.$$

Inserendo i valori di $p_0, q_0$ così ottenuti in (8.60) si ha che le curve caratteristiche sono rette di equazioni

$$y = \frac{x}{4} + y_0 \tag{8.61}$$

se $y_0 \neq 0$. Quest'ultima condizione serve anche ad assicurare che stiamo prendendo in considerazione punti non caratteristici del bordo.
Lungo le rette (8.61) l'espressione della soluzione è

$$z(s) = y_0^2 e^{2s}\,.$$

In definitiva si ottiene

$$u(x,y) = \left(\frac{4y + x}{4}\right)^2\,.$$

Più in generale, se si assume il dato al bordo

$$u(0,y) = g(y)\,,$$

con $g$ funzione di classe $C^1$ a derivata non nulla, le curve caratteristiche sono rette di equazioni

$$y = y_0 + \frac{g(y_0)}{[g'(y_0)]^2} x\,.$$

Se per esempio $g(y) = y$, si ottengono le rette

$$y = y_0(1 + x)\,;$$

tali curve caratteristiche ricoprono senza mai intersecarsi il semipiano delle $x$ positive.
La soluzione del problema in questo caso è

$$u(x,y) = y(x+1)\,.$$

**D)** Terminiamo con un cenno all'*equazione di Hamilton-Jacobi*

$$u_t + H(x, \nabla u) = 0\,, \tag{8.62}$$

dove
$$H\,:\,(x,p)\in\Omega\times R^n\longrightarrow H(x,p)\in R$$
è una funzione di classe $C^1$ e $\Omega$ è un aperto di $R^n$.
Il sistema (8.19) è un sistema di $2n+3$ equazioni nelle incognite
$$\begin{cases} x_i(s) & i=1,\cdots,n \\ t(s) & \\ p_i(s)=u_{x_i}(x(s),t(s)) & i=1,\cdots,n \\ p_{n+1}(s)=u_t(x(s),t(s)) & \\ z=u(x(s),t(s))\,, & \end{cases}$$
che assume la seguente forma
$$\begin{cases} x_i'(s)=H_{p_i} & i=1,\cdots,n \\ t'(s)=1 & \\ p_i'(s)=-H_{x_i} & i=1,\cdots,n \\ p_{n+1}'(s)=0 & \\ z'=\sum_{i=1}^n H_{p_i}p_i+p_{n+1}\,. & \end{cases} \tag{8.63}$$
Innanzitutto osserviamo che, essendo $t'(s)=1$, si può identificare il parametro $s$ con la variabile $t$.
Essendo inoltre $p_{n+1}'=0$, si ottiene che
$$p_{n+1}(t)=u_t(x(t),t)=-H(x(t),p(t))=\text{costante}\,.$$
Per ottenere le curve caratteristiche è quindi sufficiente risolvere il sistema
$$\begin{cases} x_i'=H_{p_i} \\ p_i'=-H_{x_i}\,. \end{cases} \tag{8.64}$$
Una volta risolto tale sistema non resta che utilizzare l'ultima delle equazioni di (8.63)
$$z'=\sum_{i=1}^n H_{p_i}p_i-H$$
per ottenere l'espressione della soluzione.
Le equazioni (8.64) prendono il nome di *equazioni di Hamilton.*

**Esempio 8.7.1** *Consideriamo il seguente problema al bordo relativo ad una equazione di Hamilton-Jacobi*
$$\begin{cases} u_t+u_x^2=0\,, & in\ t\geq 0 \\ u(x,0)=g(x)\,. \end{cases}$$
*Osservato che i punti dell'asse delle $x$ sono punti non caratteristici si ha che le equazioni di Hamilton* (8.64) *in questo caso danno come curve caratteristiche le rette di equazioni*
$$x=2g'(x_0)t+x_0\,, \tag{8.65}$$
*con $x_0\in R$.*
*Per determinare l'espressione della soluzione bisogna tener presente che*
$$z=\left[g'(x_0)\right]^2t+g(x_0)\,. \tag{8.66}$$
*Se dalla* (8.65) *si riesce a ricavare $x_0$ in funzione di $x$ e $t$, sostituendo in* (8.66) *si ottiene l'espressione della soluzione.*
*A titolo di esempio se $g(x)=x^2$ la* (8.65) *diventa*
$$x=x_0(4t+1)\,.$$
*Ricavando $x_0$ e sostituendo nella* (8.66) *si ottiene*
$$u(x,t)=\frac{x^2}{4t+1}\,.$$

# Capitolo 9

# Equazioni a Derivate Parziali del Secondo Ordine

## 9.1 Il problema di Cauchy

Consideriamo la seguente equazione a derivate parziali lineare del secondo ordine

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)\,; \tag{9.1}$$

i coefficienti dell'operatore $\mathcal{L}$ e il termine noto $f$ sono funzioni definite in un aperto $\Omega \subset R^n$ sulla cui regolarità di volta in volta saranno precisate le ipotesi. La matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

è non nulla e simmetrica. L'ipotesi di simmetria non è restrittiva in quanto un qualsiasi operatore $\mathcal{L}$ della forma (9.1) puó sempre essere riscritto in modo tale da rispettare tale condizione. Posto infatti

$$a_{ij}^{(s)}(x) = \frac{a_{ij}(x) + a_{ji}(x)}{2}$$

e

$$\mathcal{L}^{(s)}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u$$

si ha, per ogni $u \in C^2(\Omega)$,

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}^{(s)}u\,.$$

Se $n = 1$ l'equazione (9.1) si scrive nel modo seguente

$$u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x)$$

con $b, c$ funzioni definite in un intervallo $I$ di $R$; fissato $x_0 \in I$, a tale equazione si è soliti associare le seguenti condizioni iniziali

$$u(x_0) = u_0\,, \quad u'(x_0) = u_1\,.$$

Vogliamo ora formulare per l'equazione (9.1) un analogo sistema di condizioni.

Consideriamo una varietà regolare $S$ di dimensione $(n-1)$ contenuta in $\Omega$. Supponiamo che $S$ si possa rappresentare mediante una equazione

$$F(x) = 0 \tag{9.3}$$

con $F$ funzione di classe $C^2(\Omega)$ tale che $\nabla F \neq 0$ su $S$. Poniamo

$$\nu(x) = \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}\,, \quad x \in S\,; \tag{9.4}$$

si è in tal modo assegnato un campo vettoriale su $S$ i cui vettori sono ortogonali alla varietà $S$.
Fissate due funzioni $u_0$ e $u_1$ regolari, definite su $S$, associamo all'equazione (9.1) le seguenti condizioni iniziali, dette condizioni di Cauchy,

$$u(x) = u_0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = u_1(x)\,, \quad x \in S\,. \tag{9.5}$$

Ci chiediamo se tali due funzioni $u_0$ e $u_1$ possono essere scelte in modo arbitrario.
Cominciamo a trattare tale questione facendo l'ipotesi che la varietà $S$ coincida per esempio con una porzione della varietà lineare di equazione $x_n = 0$.
Posto $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ riscriviamo le (9.5) nel modo seguente

$$u(x', 0) = u_0(x')\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0) = u_1(x')\,. \tag{9.6}$$

Dalle condizioni (9.6) si possono ricavare i valori di tutte le derivate prime di $u$ nei punti di $S$; basta osservare che per la prima delle relazioni (9.6) risulta

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x')\,, \quad i \neq n\,. \tag{9.7}$$

A partire da tali identità si possono inoltre ottenere, sempre su $S$, i valori di tutte le derivate seconde di $u$ tranne quelli relativi alla derivata

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\,. \tag{9.8}$$

Basta infatti derivare la seconda delle (9.6) rispetto ad una delle prime $n-1$ variabili per ottenere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n}(x', 0)\,, \quad i \neq n$$

e, per quanto riguarda le altre, derivare le (9.7) rispetto ad una delle variabili $x_i$ con $i \neq n$.
Per il calcolo della derivata seconda (9.8) non basta ricorrere alle condizioni (9.6). È necessario far anche uso dell'equazione (9.1) e della ipotesi aggiuntiva

$$a_{nn}(x', 0) \neq 0\,. \tag{9.9}$$

Se è soddisfata la (9.9) si ha infatti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x', 0) = \frac{1}{a_{nn}} \left[ f - \sum_{(i,j)\neq(n,n)} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0 u \right] \tag{9.10}$$

dove tutte le funzioni che compaiono nell'espressione a secondo membro vanno calcolate in punti di $S$; i valori di tali funzioni sono noti in quanto, oltre ai coefficienti dell'operatore $\mathcal{L}$ e alla funzione $f$, sono coinvolte la soluzione e le sue derivate prime e seconde, tranne ovviamente la (9.8).

**Definizione 9.1.1** *Se la condizione* (9.9) *è verificata in ogni punto della varietà* $S$ *si dice che* $S$ *non è caratteristica per l'equazione* (9.1)*.*

**Osservazione 9.1.1** *Se non è soddisfatta la condizione* (9.9) *allora l'espressione in parentesi quadra in* (9.10) *è nulla. Tale condizione è da interpretarsi come una condizione di compatibilità sulle due funzioni* $u_0$ *e* $u_1$*. Ció comporta tra l'altro che tali funzioni non possono essere scelte in modo del tutto arbitrario.*

**Esempio 9.1.1** *Consideriamo l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0\,. \tag{9.11}$$

*L'asse delle* $x$ *è una curva caratteristica per tale equazione. Se si vuole che*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = u_1(x)$$

*deve ovviamente essere*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{d}{dx}\,[u_1(x)] = 0\,;$$

*la funzione* $u_1$ *è pertanto costante.*
*Una soluzione di* (9.11) *che soddisfa le condizioni iniziali*

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = u_1 \tag{9.12}$$

*ha la seguente espressione*

$$u(x,y) = u_0(x) + v(y)$$

*con* $v$ *tale che* $v(0) = 0$ *e* $v'(0) = u_1$*.*
*Esistono quindi infinite soluzioni del problema* (9.11)*,* (9.12)*.*

**Esempio 9.1.2** *Se* $S$ *è caratteristica possiamo trovarci anche in una situazione in cui il problema a valori iniziali va in qualche modo posto in analogia con quanto detto per le equazioni a derivate parziali del primo ordine. Per esempio se si considera l'equazione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*la retta* $t = 0$ *è caratteristica. Non è possibile assegnare su tale retta tutte e due le condizioni* (9.5) *dal momento che deve risultare*

$$u_1(x) = \frac{d^2 u_0}{dx^2}(x)\,.$$

*Vedremo successivamente che esiste un'unica soluzione definita nel semipiano* $t > 0$ *che soddisfa una sola delle condizioni iniziali* (9.5)*.*

L'ipotesi che $S$ sia una porzione di varietà lineare è solo una ipotesi di comodo che puó essere rimossa.
Assumiamo infatti che $S$ sia rappresentata dalla (9.3).

**Definizione 9.1.2** *Si dice che* $S$ *non è caratteristica per l'equazione differenziale* (9.1) *se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_i(x)\nu_j(x) \neq 0\,, \quad \forall x \in S\,, \tag{9.13}$$

*dove* $(\nu_i(x))$ *è il vettore* (9.4) *normale in* $x$ *a* $S$*.*

Proviamo a giustificare la condizione (9.13) appiattendo $S$ con una opportuna trasformazione in modo da ricondurci al caso precedente.
Fissato un punto $x_0$ di $S$, per le ipotesi di regolarità su $S$ è possibile determinare un intorno sferico $B_r(x_0)$ di $x_0$ e un'applicazione

$$x \in B_r(x_0) \longrightarrow y = \Phi(x) = (\Phi_i(x)) \in R^n \,, \tag{9.14}$$

in modo tale che

i) $\Phi$ è di classe $C^2$ e ha jacobiano non nullo;

ii) $\Phi$ ha una inversa $\Phi^{-1} = \Psi$ anch'essa di classe $C^2$;

iii) $\Phi$ trasforma $S$ in una porzione dell'iperpiano $y_n = 0$, cioè

$$\Phi(S \cap B_r(x_0)) \subset \{y_n = 0\} \,. \tag{9.15}$$

Poniamo

$$v(y) = u(\Psi(y))$$

cosí che

$$u(x) = v(\Phi(x)) \,. \tag{9.16}$$

A seguito della trasformazione (9.14) l'equazione (9.1) va opportunamente riscritta come una equazione nella funzione incognita $v$.
A tale scopo osserviamo che, considerando l'espressione (9.16) di $u$, si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{h,k} \frac{\partial^2 v}{\partial y_h \partial y_k} \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} + [\cdots\cdots] \,; \tag{9.17}$$

in parentesi quadra vanno inseriti termini che coinvolgono le derivate di $v$ di ordine inferiore al secondo.
Posto

$$\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}(\Psi(y)) \,,$$

l'operatore differenziale $\mathcal{L}$ diventa

$$\tilde{\mathcal{L}} v = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_h \partial y_k} \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} + [\cdots\cdots] \,; \tag{9.18}$$

abbiamo scritto in forma esplicita la parte principale dell'operatore, quella cioè contenente le derivate del secondo ordine, sorvolando sulla parte dell'operatore contenente le derivate di $v$ di ordine inferiore da inserire nel termine in parentesi quadra.
Per la (9.15) la parte di $S$ contenuta in $B_r(x_0)$ si è trasformata in un sottoinsieme dell'iperpiano $y_n = 0$. La non caratteristicità di $S$ puó quindi essere letta facendo ricorso alla condizione (9.9) in relazione ovviamente all'operatore (9.18); tale condizione va scritta nel modo seguente

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j} \neq 0 \tag{9.19}$$

in quanto l'espressione a primo membro in (9.19) è il coefficiente della derivata seconda di $v$ rispetto a $y_n$.
Il vettore $(\nabla \Phi_n)$ è non nullo, essendo non nullo lo jacobiano di $\Phi$; esso è inoltre parallelo a $\nu$ in quanto, per la (9.15), la superficie $S$ rappresenta il livello zero della funzione $\Phi_n$. La (9.19) equivale quindi alla condizione (9.13).

## 9.2 Funzioni Analitiche

Sia

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{9.20}$$

con $\alpha_i$ intero non negativo, un multiindice; poniamo

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$$

e inoltre, se $x = (x_i) \in R^n$,

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\,.$$

**Definizione 9.2.1** *Sia $\Omega$ un aperto di $R^n$; si dice che una funzione $f$, definita in $\Omega$, è analitica in $\bar{x} = (\bar{x}_i) \in \Omega$ se si ha*

$$f(x) = \sum_\alpha a_\alpha (x - \bar{x})^\alpha \tag{9.21}$$

*per $x$ appartenente ad un opportuno intorno di $\bar{x}$.*
*La funzione $f$ dicesi analitica in $\Omega$ se essa è analitica in ogni punto di $\Omega$.*

Nel caso bidimensionale la serie a secondo membro in (9.21) è un esempio di serie doppia cioè di una serie del tipo

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}\,. \tag{9.22}$$

Per definire la somma di (9.22) si puó procedere in diversi modi. Sommiamo per esempio prima gli elementi di una stessa riga, cioè quelli con primo indice fissato, per poi sommare i risultati così ottenuti; se con tale procedura si ottiene un valore finito si dice che la serie (9.22) è sommabile per righe e il risultato ottenuto si indica con il simbolo

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \right)\,. \tag{9.23}$$

In modo analogo si procede se si vuole sommare la serie (9.22) per colonne; il risultato che si ottiene si indica nel modo seguente

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_{ij} \right)\,. \tag{9.24}$$

Non è detto che i due valori (9.23) e (9.24) coincidano; altrettando puó dirsi per tutti i risultati che si dovessero ottenere con procedimenti di sommazione diversi dai due precedentemente illustrati. Se peró la serie è assolutamente convergente, se cioè con un qualsiasi metodo di sommazione converge la serie doppia dei valori assoluti della serie (9.22), allora si puó dimostrare che il risultato che si ottiene con un qualunque metodo di sommazione è sempre lo stesso. In particolare coincidono i due valori (9.23) e (9.24). Vale inoltre una sorta di proprietà commutativa: la somma della serie cioè non cambia se si permutano in modo arbitrario i termini della sommatoria.

Richiamiamo brevemente alcune proprietà relative alla serie di potenze (9.21).

**a)** Se la serie converge in un punto diverso da $\bar{x}$ esiste un $r$ positivo tale che la serie (9.21) converge assolutamente nel cubo

$$C_r(\bar{x}) = \{x \quad | \quad |x_i - \bar{x}_i| < r \,, \quad i = 1, \cdots, n\}\,;$$

la convergenza della serie è inoltre uniforme nei compatti contenuti in tale cubo.

**b)** La serie (9.21) è derivabile termine a termine in $C_r(\bar{x})$. Denotata con $f$ la somma della serie, $f$ è di classe $C^\infty$; risulta inoltre

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\bar{x})\,, \tag{9.25}$$

dove

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Le (9.25) consentono di riscrivere la (9.21) nella seguente forma

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\bar{x})(x - \bar{x})^\alpha\,; \tag{9.26}$$

la serie a secondo membro in (9.26) è la serie di Taylor di $f$ di punto iniziale $\bar{x}$.

Rilevante è il seguente risultato.

**Teorema 9.2.1** *Siano $f, g$ due funzioni analitiche in un aperto connesso $\Omega$; se in un punto $\bar{x} \in \Omega$ si ha*

$$D^\alpha f(\bar{x}) = D^\alpha g(\bar{x})\,, \quad \forall \alpha\,, \tag{9.27}$$

*allora le due funzioni coincidono su tutto $\Omega$.*

Indichiamo con $A$ l'insieme dei punti di $\Omega$ in cui sussiste la (9.27). Ovviamente $A$ non è vuoto; inoltre $A$ è aperto in quanto, se $x \in A$ allora esiste un intorno di $x$ in cui le due funzioni coincidono in quanto coincidono le loro serie di Taylor di punto iniziale $x$.
D'altra parte in un punto del complementare di $A$ o le funzioni o una delle loro derivate differiscono; ovviamente per continuità ci'o si verifica anche in un intorno del punto. Tale intorno è incluso nel complementae di $A$ che è quindi aperto.
L'asserto segue allora dall'ipotesi di connessione di $\Omega$.

Concludiamo tale breve rassegna con il seguente risultato.

**Teorema 9.2.2** *Se $f$ è analitica in un punto $\bar{x}$ essa è analitica in un intorno di $\bar{x}$.*

Supponiamo che il punto $\bar{x}$ coincida con l'origine; si ha quindi

$$f(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha\,, \quad x \in C_r(0) \tag{9.28}$$

con $r > 0$.
Poichè la serie (9.28) è assolutamente convergente, per ogni $\rho < r$ si ha

$$\sum_\alpha |a_\alpha| \rho^{|\alpha|} < +\infty\,. \tag{9.29}$$

Fissato un punto $\bar{x} \in C_{r/4}(0)$ consideriamo $x \in C_{r/8}(\bar{x})$; risulta quindi

$$|\bar{x}_i| < \frac{r}{4}\,, \qquad |x_i - \bar{x}_i| < \frac{r}{8}\,, \quad \forall i\,. \tag{9.30}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_\alpha a_\alpha[(x-\bar{x})+\bar{x}]^\alpha = \sum_\alpha a_\alpha \left(\prod_{i=1}^n [(x_i-\bar{x}_i)+\bar{x}_i]^{\alpha_i}\right) \\
&= \sum_\alpha a_\alpha \left(\prod_{i=1}^n \left[\sum_{k_i=0}^{\alpha_i} \binom{\alpha_i}{k_i}(x_i-\bar{x}_i)^{k_i}\,\bar{x}_i^{\alpha_i-k_i}\right]\right).
\end{aligned}
$$

Posto

$$
C_{k_i}^{\alpha_i} = \begin{cases} \dbinom{\alpha_i}{k_i} & \text{se } k_i \le \alpha_i \\ \\ 0 & \text{se } k_i > \alpha_i \end{cases}
$$

e

$$
C_k^\alpha = \prod_{i=1}^n C_{k_i}^{\alpha_i}
$$

piú sinteticamente si puó scrivere

$$
f(x) = \sum_\alpha \left(\sum_k C_k^\alpha (x-\bar{x})^k \bar{x}^{\alpha-k}\right). \tag{9.31}
$$

Ricordato che

$$
C_{k_i}^{\alpha_i} \le 2^{\alpha_i}\,,
$$

per le (9.30) si ha

$$
\begin{aligned}
\left|\prod_{i=1}^n \left[C_{k_i}^{\alpha_i}(x_i-\bar{x}_i)^{k_i}\,\bar{x}_i^{\alpha_i-k_i}\right]\right| &\le \prod_{i=1}^n \left[2^{\alpha_i}\left(\frac{r}{8}\right)^{k_i}\left(\frac{r}{4}\right)^{\alpha_i-k_i}\right] \\
&= 2^{|\alpha|}\left(\frac{r}{8}\right)^{|k|}\left(\frac{r}{4}\right)^{|\alpha|-|k|} = \left(\frac{r}{2}\right)^{|\alpha|}\frac{1}{2^{|k|}}.
\end{aligned}
$$

La serie a secondo membro in (9.31) si maggiora allora nel modo seguente

$$
\sum_\alpha\sum_k |a_\alpha|\left(\frac{r}{2}\right)^{|\alpha|}\frac{1}{2^{|k|}} = \left(\sum_k \frac{1}{2^{|k|}}\right)\sum_\alpha |a_\alpha|\left(\frac{r}{2}\right)^{|\alpha|} = 2^n \sum_\alpha |a_\alpha|\left(\frac{r}{2}\right)^{|\alpha|};
$$

tale serie converge per la (9.29).
La serie a secondo membro in (9.31) è quindi assolutamente convergente; è possibile pertanto scambiare i simboli di sommatoria in (9.31). Si ottiene allora la seguente espressione per $f$

$$
f(x) = \sum_k a'_k (x-\bar{x})^k
$$

dove

$$
a'_k = \sum_\alpha C_k^\alpha \bar{x}^{\alpha-k}.
$$

La funzione $f$ è analitica in $\bar{x}$; si è cosí ottenuto l'asserto.

## 9.3 Il Teorema di Kovalevskaya

Supponiamo che i coefficienti, il termine noto dell'equazione (9.1) e i dati iniziali $u_0$ e $u_1$ in (9.6) siano analitici.
Se è soddisfatta l'ipotesi (9.9) è possibile calcolare non solo le derivate seconde ma ottenere nei punti di $S$ i valori di tutte le derivate parziali di $u$.
Infatti, una volta note tutte le derivate seconde di $u$ su $S$ è ovviamente possibile derivare tali funzioni rispetto ad una delle prime $n-1$ variabili ottenendo in tal modo tutte le derivate terze tranne ovviamente

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}\,. \tag{9.32}$$

Per ottenere quest'ultima bisogna derivare la (9.1) rispetto a $x_n$; tenendo in debito conto l'ipotesi (9.9) si ha allora

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}(x',0) = \frac{1}{a_{nn}(x',0)}\,[\cdots\cdots]\ ,$$

dove, nella parentesi quadra, vanno inseriti termini che coinvolgono i coefficienti dell'operatore, il termine noto e le derivate della funzione $u$ fino a quelle del terzo ordine fatta eccezione per la (9.32).
Ovviamente, per la regolarità dei dati è possibile iterare il ragionamento in modo da ottenere tutte le derivate successive.
Anche in questo caso l'ipotesi che $S$ sia lineare è una ipotesi di comodo; se $S$ è infatti una varietà di equazione (9.3) con $F$ funzione analitica, quanto prima affermato continua a sussistere. Ovviamente è necessario operare attraverso una trasformazione che, appiattendo localmente la superficie, ci consente di riproporre la stessa situazione descritta all'inizio del paragrafo.
Per quanto detto in precedenza è possibile, fissato $x_0 \in S$, scrivere la serie formale di Taylor di punto iniziale $x_0$ della eventuale soluzione del problema di Cauchy (9.1), (9.5). Se si verifica che tale serie converge in un intorno di $x_0$ e che la sua somma è effettivamente soluzione del problema si è ottenuta una soluzione analitica del problema di Cauchy. Ció è quanto viene fatto nella dimostrazione del seguente teorema dovuto a Kovalevskaya.

**Teorema 9.3.1** *Se i dati del problema di Cauchy* (9.1), (9.5) *sono analitici e se $S$ non è caratteristica per l'equazione* (9.1) *allora, per ogni punto $x_0 \in S$, è possibile determinare un intorno di tale punto in cui esiste una soluzione analitica del problema* (9.1), (9.5). *Inoltre non esiste piú di una soluzione analitica in un qualsiasi intorno di $x_0$.*

## 9.4 Classificazione

L'ipotesi di simmetria sulla matrice (9.2) consente di affermare che gli autovalori $\lambda_i(x)$ di tale matrice sono reali. Indichiamo con $n_+$ il numero degli autovalori positivi, con $n_-$ il numero degli autovalori negativi e con $n_0$ la molteplicità dell'autovalore nullo; ovviamente risulta

$$n = n_+ + n_- + n_0\,.$$

**Definizione 9.4.1** *L'operatore $\mathcal{L}$ si dice ellittico in $x$ se uno dei due interi $n_+, n_-$ coincide con $n$ se cioè gli autovalori della matrice* (9.2) *sono o tutti positivi o tutti negativi.*
*L'operatore si dice iperbolico in $x$ se la matrice $A(x)$ ha un autovalore di segno opposto a quello dei rimanenti se, cioè, per esempio, $n_+ = n-1$ e $n_- = 1$. L'operatore si dice ultraiperbolico se $n_0 = 0$ e $n_+, n_-$ sono entrambi maggiori di uno.*
*Infine se $n_0 \neq 0$ l'operatore si dice parabolico.*
*L'operatore infine si dice ellittico, iperbolico o parabolico in $\Omega$ se è, rispettivamente, ellittico, iperbolico o parabolico in ogni punto di $\Omega$.*

**Esempio 9.4.1** *L'operatore di Laplace*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}$$

*è un classico esempio di operatore ellittico. Gli operatori*

$$u_{tt} - \Delta u$$

*e*

$$u_t - \Delta u\,,$$

*che intervengono nell'equazione delle onde e nell'equazione del calore, sono esempi rispettivamente di operatore iperbolico e di operatore parabolico.*

**Esempio 9.4.2** *Consideriamo l'operatore*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

*con $a$ funzione continua tale che $x\,a(x) > 0$. Tale operatore è ellittico per $x > 0$, parabolico sui punti dell'asse delle $y$, iperbolico nel semipiano delle $x$ negative.*

Fissato il punto $\bar{x} \in \Omega$ la matrice $A(\bar{x})$, in quanto simmetrica, è simile alla matrice diagonale che presenta sulla diagonale principale tutti gli autovalori di $A(\bar{x})$.
È allora evidente che si puó costruire una matrice non singolare $C = (c_{hk})$ tale che risulti

$$C\,A(\bar{x})\,C^* = \Lambda$$

dove $\Lambda = (\lambda_{hk})$ è ancora una matrice diagonale i cui elementi

$$\lambda_{hk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x}) c_{hi} c_{kj} \tag{9.33}$$

sono nulli se $h \neq k$ e verificano le seguenti condizioni se $h = k$

$$\lambda_{hh} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 1, \cdots, n_+ \\ -1 & \text{se } h = (n_+ + 1), \cdots, (n_+ + n_-) \\ 0 & \text{se } h > (n_+ + n_-)\,. \end{cases}$$

Se operiamo il seguente cambiamento di variabili

$$x \longrightarrow y = Cx$$

l'operatore $\mathcal{L}$ va riscritto come un operatore che agisce sulla funzione

$$y \longrightarrow v(y) = u(C^{-1}y)\,. \tag{9.34}$$

Tenendo presente che

$$u(x) = v(Cx)\,, \tag{9.35}$$

si ha (cfr. anche (9.17))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{h,k} c_{hi} c_{kj} \frac{\partial^2 v}{\partial y_h \partial y_k}\,.$$

Verifichiamo gli effetti di tale trasformazione sulla parte principale dell'operatore $\mathcal{L}$. Si ha

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j} a_{ij}(C^{-1}y)\left(\sum_{h,k} c_{hi}c_{kj}\frac{\partial^2 v}{\partial y_h \partial y_k}\right).$$

Nel punto $\bar{y} = C\bar{x}$, per quanto detto in relazione ai termini (9.33), l'operatore assume la seguente espressione, detta forma canonica,

$$\sum_{i=1}^{n_+} v_{y_i y_i} - \sum_{i=n_+ +1}^{n_+ + n_-} v_{y_i y_i}.$$

Si osservi che la trasformazione operata ha ridotto l'operatore a tale semplice struttura solo nel punto $\bar{x}$. Se peró l'operatore ha coefficienti costanti ovviamente tale trasformazione agisce sull'operatore in ogni punto di $\Omega$.

**Esempio 9.4.3** *Consideriamo l'operatore a primo membro nell'equazione* (9.11). *Operiamo la seguente trasformazione lineare*

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = -x + y \end{cases}$$

*sulle variabili.*
*L'operatore assume allora la seguente forma canonica*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

## 9.5 L'equazione del calore

Vogliamo studiare il seguente problema a valori iniziali per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } R \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in R. \end{cases} \tag{9.36}$$

Osserviamo che la retta $t = 0$ su cui viene assegnato il dato iniziale è caratteristica.
Consideriamo la seguente funzione

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad \text{in } R \times (0, +\infty). \tag{9.37}$$

La funzione (9.37) è detta soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Un calcolo diretto mostra che essa è soluzione di tale equazione nel semipiano delle $t$ positive. Inoltre essa è singolare nell'origine.
Di fondamentale importanza è il seguente risultato.

**Teorema 9.5.1** *Per ogni $t > 0$ si ha*

$$\int_R \Phi(x,t)\,dx = 1. \tag{9.38}$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}\int_R \Phi(x,t)\,dx &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}\int_R \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)dx \\ &\quad (\text{posto } z = \tfrac{x}{2\sqrt{t}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_R \exp(-z^2)\,dz = 1\,.\end{aligned}$$

**Osservazione 9.5.1** *Sia $g$ una funzione continua e limitata; per ogni $t > 0$ la soluzione fondamentale è una gaussiana; al tendere di $t$ a zero tale famiglia di gaussiane tende ad una misura $\delta_0$ nota come delta di Dirac concentrata in zero.*

Per $t > 0$ definiamo la seguente funzione

$$u(x,t) = \int_R \Phi(x-y,t)g(y)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_R \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)g(y)\,dy\,. \tag{9.39}$$

Sussiste il seguente risultato.

**Teorema 9.5.2** *La funzione* (9.39) *è una soluzione dell'equazione del calore di classe $C^\infty$ nel semipiano delle $t$ positive. Si ha inoltre*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0) \tag{9.40}$$

*per ogni $x_0 \in R$. Quindi $u$ è soluzione del problema* (9.36).

Poiché la funzione $\Phi$ è di classe $C^\infty$ nel semipiano $t > 0$ è possibile derivare la funzione (9.39) sotto il segno di integrale. Si ha allora

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \int_R [(\Phi_t - \Phi_{xx})(x-y,t)]g(y)\,dy = 0$$

in quanto, come osservato in precedenza, $\Phi$ è soluzione dell'equazione del calore.
Per la continuità di $g$, fissato $x_0 \in R$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon\,, \qquad \text{se } |y - x_0| < \delta\,. \tag{9.41}$$

Posto $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, per la (9.38) si ha

$$\begin{aligned}|u(x,t) - g(x_0)| &= \left|\int_R \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x_0))\,dy\right| \\ &\leq \int_{I_\delta} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\,dy \\ &+ \int_{R\setminus I_\delta} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\,dy = J_1 + J_2\,.\end{aligned}$$

Per la (9.41) e la (9.38) si ha

$$|J_1| \leq \varepsilon\,. \tag{9.42}$$

Consideriamo i valori di $x$ tali che

$$|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}\,; \tag{9.43}$$

se $|y-x_0| \geq \delta$ si ha

$$|y-x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \leq |y-x| + \frac{|y-x_0|}{2}$$

da cui

$$|y-x| \geq \frac{|y-x_0|}{2}\,. \tag{9.44}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq 2\max_R |g| \int_{R-I_\delta} \Phi(x-y,t)\,dy \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{R-I_\delta} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \\ &\quad \text{(per la (9.44)} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{R-I_\delta} \exp\left(-\frac{|x_0-y|^2}{16t}\right) dy \\ &= \frac{C}{\sqrt{t}} \int_\delta^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) dr = C \int_{\frac{\delta}{a\sqrt{t}}}^\infty \exp(-\tau^2)\,d\tau\,, \end{aligned}$$

dove con il simbolo $C$ abbiamo denotato una costante di cui non è essenziale esibire il valore esplicito.
Poiché

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\frac{\delta}{a\sqrt{t}}}^\infty \exp(-\tau^2)\,d\tau = 0\,,$$

ricordando (9.42), si ha che

$$|u(x,t) - g(x_0)| < 2\varepsilon$$

se $x$ verifica la condizione (9.43) e $t$ è sufficientemente piccolo.
Si è ottenuto in tal modo la (9.40) e quindi l'asserto.

**Osservazione 9.5.2** *Si puó dimostrare che la soluzione* (9.39) *è unica nella classe delle funzioni che verificano la seguente condizione*

$$|u(x,t)| \leq A\exp(ax^2)$$

*con $a, A$ costanti positive.*

**Osservazione 9.5.3** *Si osservi che, se $g$ è non negativa e a supporto compatto, da* (9.39) *si deduce che la soluzione del problema* (9.36) *è, per ogni istante $t > 0$, ovunque positiva. Si riscontra un fenomeno noto come velocità di propagazione infinita.*

Verifichiamo ora che la soluzione del problema (9.36) non è detto che sia analitica anche se tali sono i dati. Ció ovviamente non è in contrasto con il Teorema 9.3.1 dal momento che l'asse delle $x$ è caratteristico per la nostra equazione.
Consideriamo la seguente condizione iniziale

$$u(x,0) = g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^{2k}\,. \tag{9.45}$$

Supponiamo che il problema di Cauchy in tal modo formulato ammetta una soluzione $u$ analitica nell'origine

$$u(x,t) = \sum_{h,k=0}^\infty u_{h,k} x^h t^k\,.$$

Derivando termine a termine si ha

$$u_t = \sum_{h,k=0}^{\infty} (k+1)u_{h,k+1}x^h t^k\,, \quad u_{xx} = \sum_{h,k=0}^{\infty} (h+2)(h+1)u_{h+2,k}x^h t^k\,.$$

Sostituendo tali espressioni delle derivate nell'equazione (9.36) e uguagliando i coefficienti dei termini omologhi si ha

$$(k+1)u_{h,k+1} = (h+1)(h+2)u_{h+2,k}\,, \quad \forall h,k\,.$$

Da tali identità si ottengono allora le seguenti relazioni

$$u_{h,k} = \frac{(h+2k)!}{(h)!k!}u_{h+2k,0}\,.$$

Ponendo $t=0$, ricordando la condizione iniziale (9.45), si ha

$$u(x,0) = \sum_{h=0}^{\infty} u_{h,0}x^h = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\,.$$

Si ha allora

$$u_{2s,0} = (-1)^s\,, \quad u_{2s+1,0} = 0\,.$$

Risulta pertanto

$$u_{2h,k} = \frac{(2h+2k)!}{(2h)!k!}(-1)^{h+k}\,, \quad u_{2h+1,k} = 0\,.$$

L'espressione della soluzione è allora

$$u(x,t) = \sum_{h,k=0}^{\infty} \frac{(2h+2k)!}{(2h)!k!}(-1)^{h+k}x^{2h}t^k\,.$$

Verifichiamo che tale serie non puó convergere in alcun punto $(0,t)$. Infatti in tal caso la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!}(-1)^k t^k$$

che ovviamente non converge per quanto piccolo si scelga $t$.

Per completezza diamo un cenno del problema di Cauchy nel caso non omogeneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{in } R \times (0,+\infty) \\[2ex] u(x,0) = g(x) & x \in R\,. \end{cases}$$

La soluzione assume allora la seguente forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,.$$