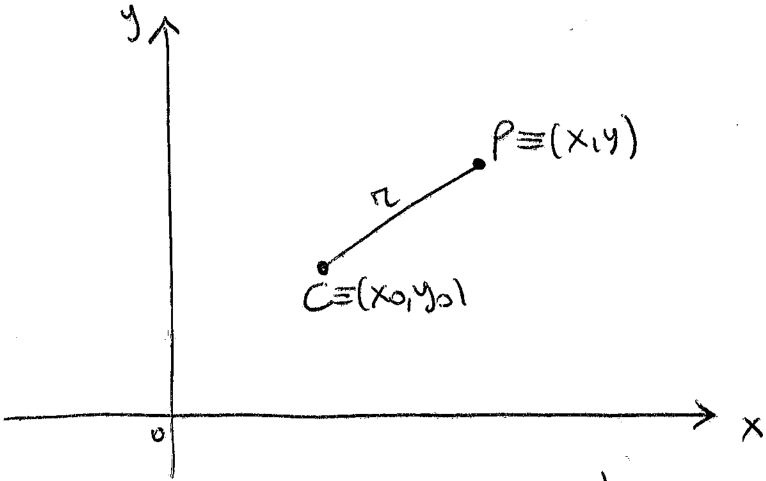
CIRCONFERENZA

La <u>circonferenza</u> è il luogo dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso, detto <u>centro</u>, è congruente a un prefissato segmento (non nullo), detto <u>raggio</u>.

L'equazione cartesiana della circonferenza si può ottenere quando si conoscono le coordinate del centro $C \equiv (x_0, y_0)$ e la misura del raggio r.



Come luogo dei punti, per ottenere l'equazione della circonferenza, bisogna calcolare la distanza tra il punto P di coordinate (x, y) e il centro C e porre tale distanza uguale alla misura $r > 0$. Si ha:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

Eleviamo al quadrato:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Poniamo
$$a = -2x_0$$
$$b = -2y_0$$
$$c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

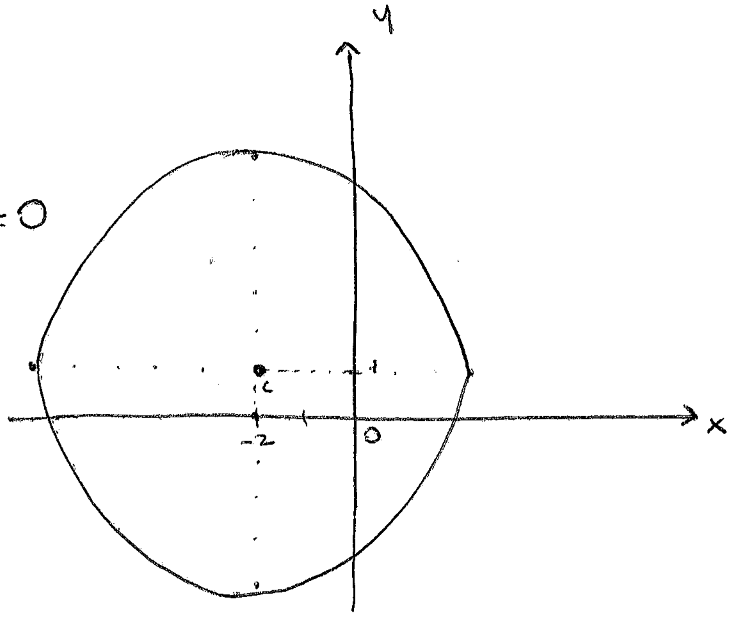
Otteniamo: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Esempio: Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(-2,1)$ e raggio $r=5$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=5^2$$

$$x^2+4+4x+y^2+1-2y-25=0$$

$$x^2+y^2+4x-2y-20=0$$



Viceversa se abbiamo l'equazione canonica della circonferenza

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

è possibile ricavare le coordinate del centro e la misura del raggio. Si ha:

$$C\equiv\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$

Esempio: Determinare centro e raggio della circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

$$a=2 \qquad b=4 \qquad c=1$$

$$C\equiv\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{2}{2},-\frac{4}{2}\right)=(-1,-2)$$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-1}=\sqrt{1+4-1}=$$

$$=\sqrt{4}=2$$

OSS: Se in generale viene data un'equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$ senza sapere se è o no una circonferenza, a priori potrebbe non esserla. Infatti bisogna prima verificare che la quantità $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ sia positiva, in quanto solo in questo caso sarà possibile fare la radice quadrata e ottenere il raggio della circonferenza.

Scriviamo in particolare l'equazione della circonferenza di centro l'origine degli assi $O\equiv(0,0)$ e raggio r

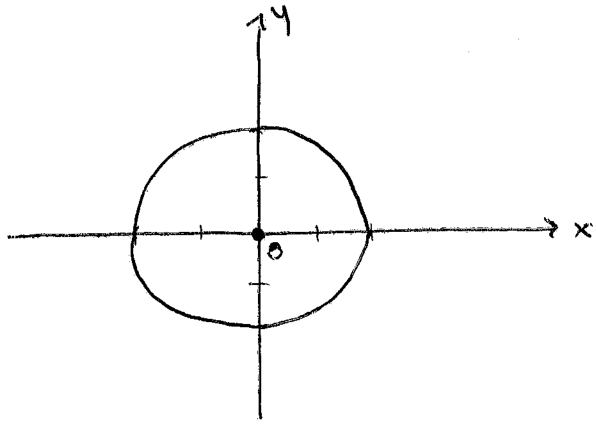
Da $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, essendo $x_0=0$ e $y_0=0$,

si ha $x^2+y^2=r^2$

Esempio: $r=2$

L'equazione è:

$x^2+y^2=4$

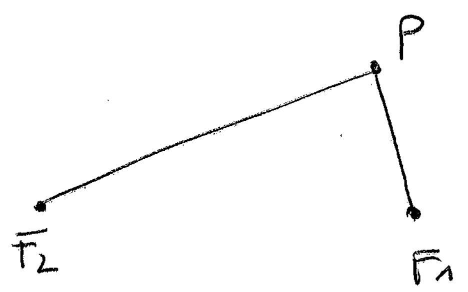


ELLISSE

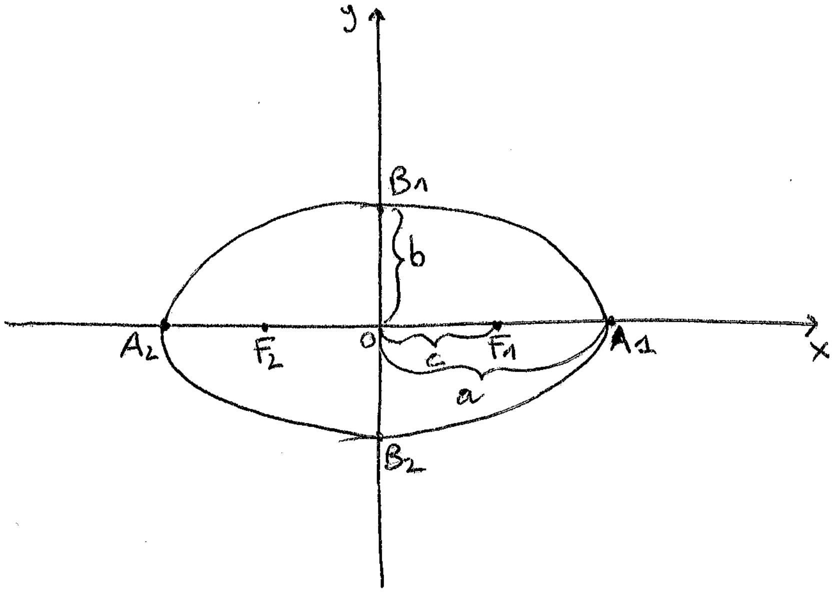
L'ellisse è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi.

Pertanto se indichiamo con F_1 e F_2 i fuochi, con P un punto generico dell'ellisse e con $2a$ $(a>0)$ questa somma costante di P dai due fuochi si ha:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$$



Siano $F_1 \equiv (c,0)$ e $F_2 \equiv (-c,0)$, con $c>0$, le coordinate dei fuochi. Quindi essi si trovano sull'asse delle ascisse, e sia $a>c$. L'equazione dell'ellisse è



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove $b=\sqrt{a^2-c^2}$

I numeri a e b si chiamano semiassi dell'ellisse. In particolare a è il semiasse maggiore mentre b è il semiasse minore

I punti A_1, A_2, B_1, B_2 si chiamano vertici.

OSS: Se $a=b$ l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio a.

Definizione: L'ECCENTRICITÀ è il rapporto

$$e=\frac{c}{a}$$

Esso è un numero compreso tra 0 e 1 essendo $c<a$

L'eccentricità è una misura di quanto l'ellisse è più o meno schiacciata e quindi di quanto differisce dalla circonferenza. Infatti nella circonferenza $e=0$.

Esempi

(1) Determinare il valore dei semiassi e le coordinate dei fuochi dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$; $b^2=4 \Rightarrow b=2$

Da $b=\sqrt{a^2-c^2} \Rightarrow b^2=a^2-c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow$

$c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{25-4}=\sqrt{21} \Rightarrow F_1\equiv(\sqrt{21},0)$ e $F_2\equiv(-\sqrt{21},0)$.

(2) Scrivere l'equazione dell'ellisse i cui fuochi hanno coordinate $F_1 \equiv (\sqrt{2}, 0)$, $F_2 \equiv (-\sqrt{2}, 0)$ e $a = 3$

Allora $c = \sqrt{2}$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$$

L'equazione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$

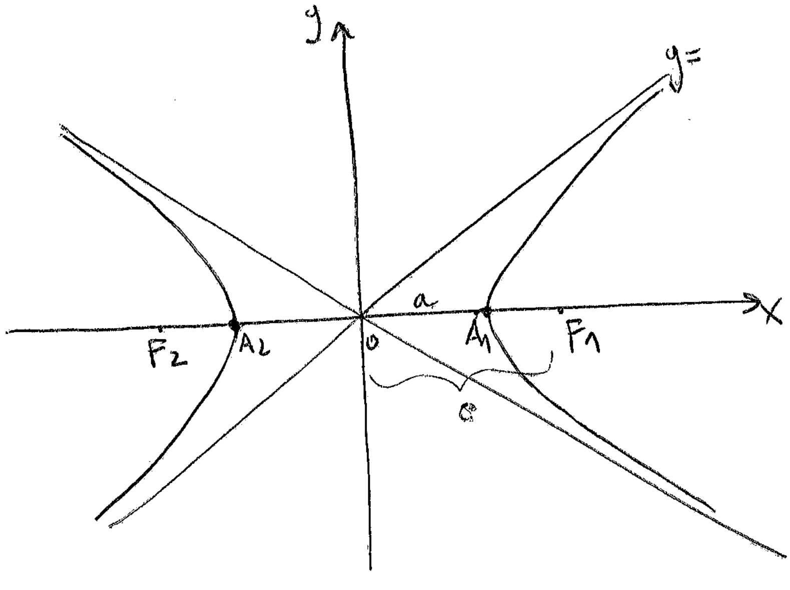
<u>IPERBOLE</u>

L'<u>iperbole</u> è il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza, in valore assoluto, delle distanze da due punti fissi, detti <u>fuochi</u>.
Pertanto se indichiamo con F_1 e F_2 i fuochi, con P un punto generico dell'iperbole e con $2a$ $(a>0)$ questa differenza costante di P dai due fuochi si ha:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

Siano $F_1 \equiv (c, 0)$ e $F_2 \equiv (-c, 0)$, con $c > 0$, le coordinate dei fuochi. Quindi essi si trovano sull'asse delle ascisse e sia $a < c$. L'equazione dell'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



dove $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

I numeri a e b si chiamano <u>semiassi dell'iperbole</u>.
I punti A_1 e A_2 sono detti <u>vertici</u>.
L'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate sono in particolare detti <u>assi dell'iperbole</u>.

L'iperbole è caratterizzata dalla presenza di due rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ che si chiamano asintoti delle iperbole.

Anche per l'iperbole si definisce l'eccentricità: $e = \frac{c}{a}$

È un numero maggiore di 1 essendo $c > a$.

L'eccentricità di un'iperbole misura l'"apertura" dei suoi rami.

Maggiore è il valore di e, e maggiore è l'apertura dei rami.

Esempi:

(1) Determinare le coordinate dei fuochi dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 16$, $b^2 = 4$

Da $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

$\Rightarrow F_1 \equiv (\sqrt{20}, 0)$ e $F_2 \equiv (-\sqrt{20}, 0)$

(2) Scrivere l'equazione dell'iperbole sapendo che gli asintoti hanno equazione $y = \pm \frac{1}{2}x$ e i fuochi hanno coordinate $(\pm 5, 0)$

$y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a}{2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = c^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = 4c^2 - 4a^2 \Rightarrow$

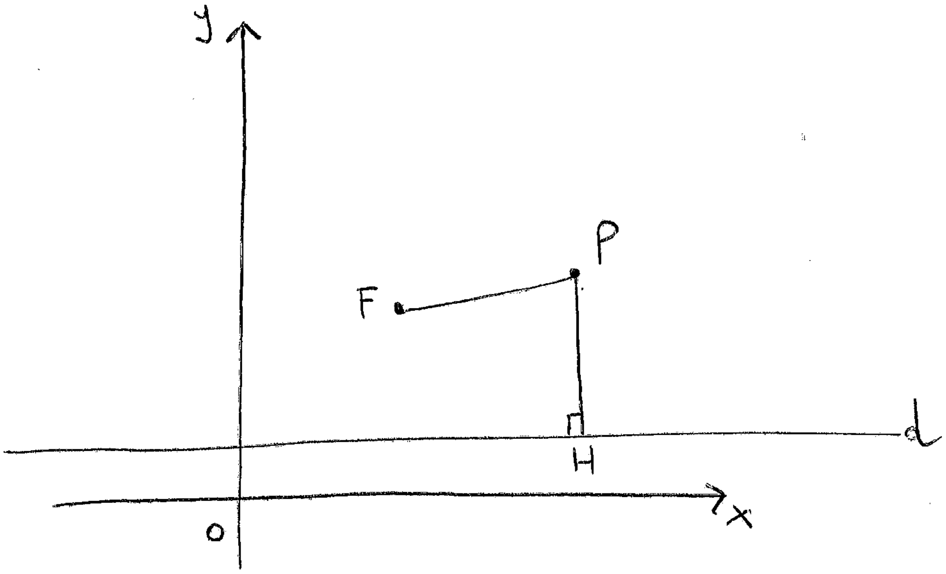
$5a^2 = 4c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{5}c^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{5}c^2} = \sqrt{\frac{4}{\cancel{5}}\cancel{25}\,5} \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$

$b = \frac{a}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}} \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ L'equazione è $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

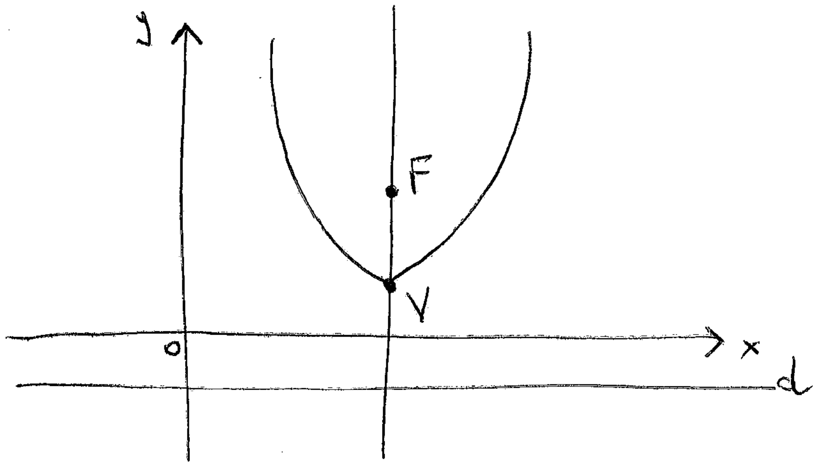
PARABOLA

La <u>parabola</u> è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto <u>fuoco</u> e da una retta d detta <u>direttrice</u>, cioè $\overline{PF} = \overline{PH}$.



L'equazione canonica di una parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse y è

$$y = ax^2 + bx + c$$



- Se $a > 0$ la concavità della parabola è rivolta verso l'alto
- Se $a < 0$ la concavità della parabola è rivolta verso il basso

V è il <u>vertice</u> della parabola e ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$

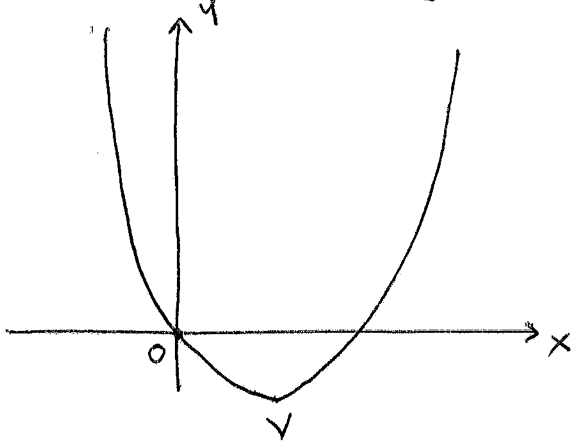
Il <u>fuoco</u> F ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

L'asse di simmetria ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$

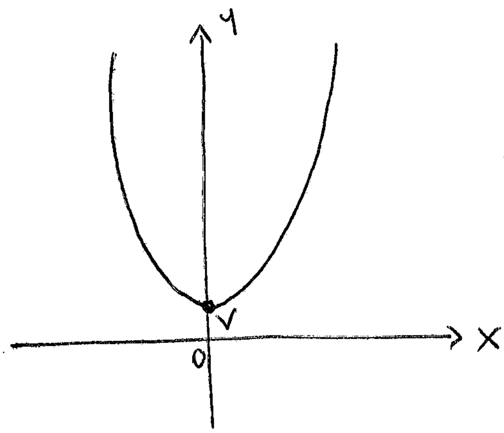
La direttrice ha equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Casi particolari:

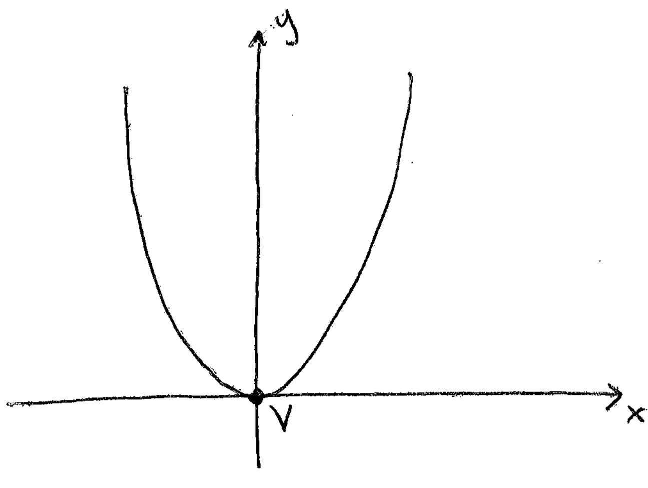
- Se $c=0$ l'equazione della parabola diventa $y=ax^2+bx$.
  La parabola passa per l'origine degli assi



- Se $b=0$ l'equazione della parabola diventa $y=ax^2+c$
  Il vertice della parabola si trova sull'asse delle ordinate, il quale diventa l'asse di simmetria della parabola.



- Se $b=0$ e $c=0$ l'equazione della parabola diventa $y=ax^2$. Il vertice della parabola coincide con l'origine degli assi.



<u>Esempio</u>: Determinare le coordinate del vertice, del fuoco, l'equazione della direttrice e dell'asse di simmetria della parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 3$

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a} , -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1 \qquad \Rightarrow V \equiv (1, 2)$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$F \equiv \left(-\frac{b}{2a} , \frac{1-\Delta}{4a} \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

$$\Rightarrow F \equiv \left(1, \frac{1+8}{4 \cdot 1} \right) = \left(1, \frac{9}{4} \right)$$

asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = 1$

direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1-8}{4} \Rightarrow y = \frac{7}{4}$

Risoluzione grafica delle equazioni di secondo grado

Se consideriamo un'equazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx + c = 0$, ad essa corrisponde come grafico la parabola $y = ax^2 + bx + c$.
Di questa parabola calcoliamo innanzitutto il vertice.
Dopodiché valutiamo se la parabola ha la concavità ri=
volta verso l'alto o verso il basso a seconda che il coefficiente a sia rispettivamente maggiore di 0 o minore di 0.
A questo punto sapremo se la parabola interseca l'asse delle ascisse. Le ascisse degli eventuali punti di inter=

sezione sono le soluzioni dell'equazione.
In particolare se la parabola interseca l'asse x in due punti, l'equazione ammetterà due soluzioni reali.
Se la parabola interseca l'asse x una volta, l'equazione ammetterà una soluzione reale.
Se la parabola non interseca l'asse x, l'equazione non ammette soluzioni reali.

<u>Esempi</u>

(1) $x^2 - 10x + 16 = 0$

Tale equazione corrisponde alla parabola $y = x^2 - 10 + 16$

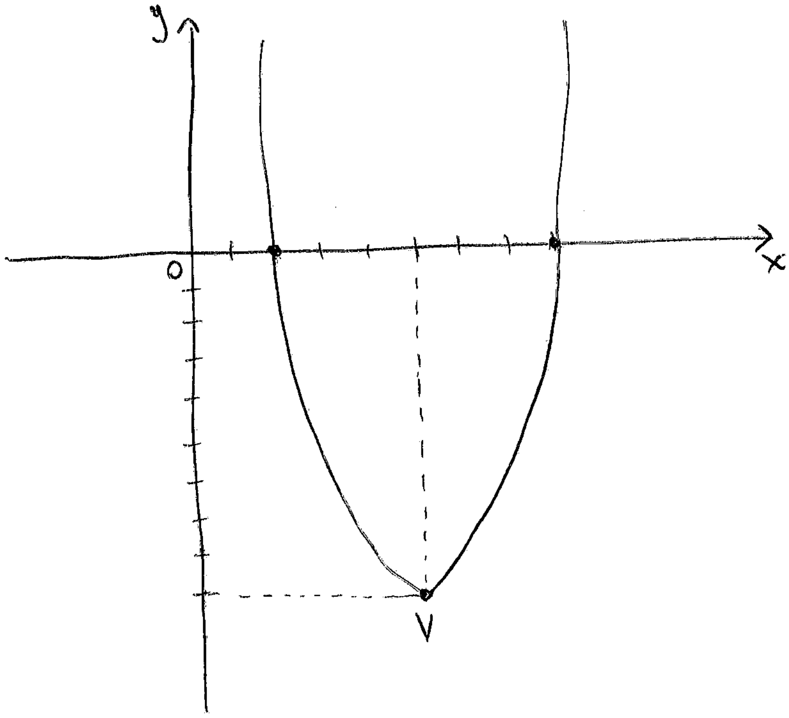
Calcoliamo il vertice

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2} = 5$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = 5^2 - 10 \cdot 5 + 16 = 25 - 50 + 16 = -9$$

$\Rightarrow V \equiv (5, -9)$

Poichè $a = 1 > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto.



Sicuramente la parabola interseca l'asse x in due punti. Le ascisse di tali punti sono le soluzioni dell'equazione.

$x_1 = 5 + \sqrt{25 - 16} = 8$

$x_2 = 5 - \sqrt{25 - 16} = 2$

La parabola interseca l'asse x in $(2, 0)$ e $(8, 0)$.

(2) $-x^2+2x-1=0 \Rightarrow y=-x^2+2x-1$

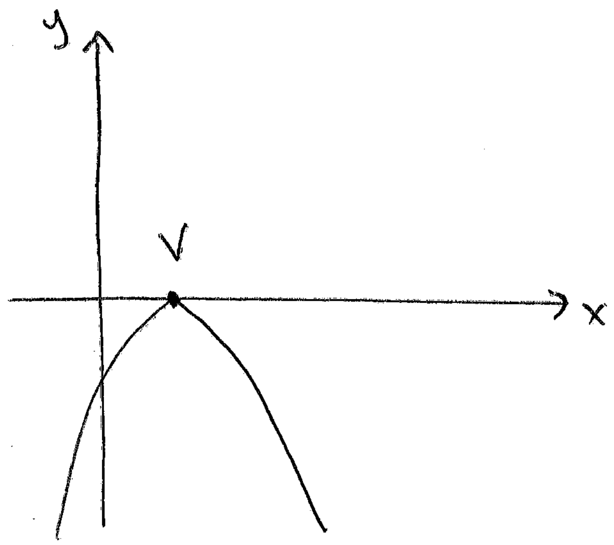
$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1$

$\Rightarrow V \equiv (1,0)$

$-\frac{\Delta}{4a} = -(1^2)+2\cdot 1-1 = -1+2-1=0$

Poiché $a=-1<0$ la concavità è rivolta verso il basso



La parabola interseca l'asse x in un solo punto che è il vertice quindi la soluzione dell'equazione è l'ascissa del vertice e cioè $x=1$.

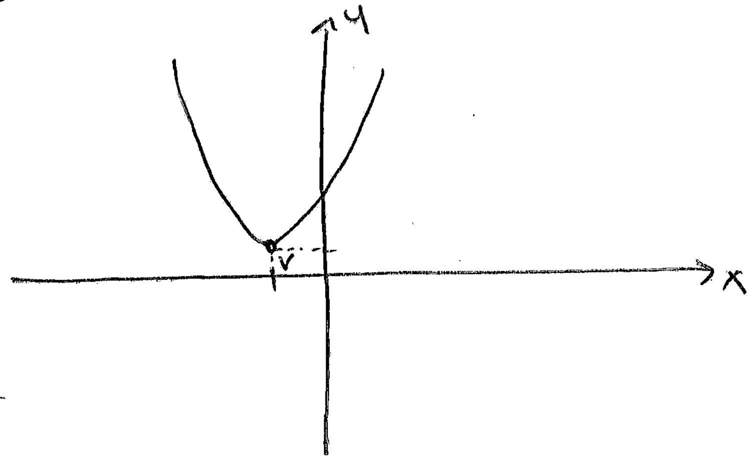
(3) $x^2+x+1=0 \Rightarrow y=x^2+x+1$

$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$

$-\frac{\Delta}{4a} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow V \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$



Poiché $a=1>0$ la concavità è rivolta verso l'alto

La parabola non interseca l'asse delle x $\Rightarrow$ l'equazione non ammette soluzioni.