Esercizi tutorato di Analisi Matematica I
Corso di studi in Fisica

A.A. 2015/2016

LEZIONE 9 OTTOBRE 2015

Campi di esistenza

Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

- $f_1(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2+1}{\sqrt{\log x}}\right)$
- $f_2(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)$
- $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \arccos(\log x)}$
- $f_4(x) = \arcsin\left(\sqrt{4+2x-x^2}+1-x\right)$
- $f_5(x) = \sqrt{\arctan\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sin^2 x}\right]}$
- $f_6(x) = \sqrt{|x^2-x|-|x+3|} + \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2x}-2^{x+1}-3\right)$
- $f_7(x) = \arcsin(x^2-3|x|+3)$
- $f_8(x) = \log\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}-x+1}{x^2-4x}\right)$
- $f_9(x) = (4\log^2 x - 1)^{\pi}$
- $f_9(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3\arcsin x - \pi}{\pi - 4\arctan x}\right)$
- $f_{10}(x) = \tan(3^x+1)$

LEZIONE 16 OTTOBRE 2015

Limiti di successioni

1. Si calcolino i limiti delle seguenti successioni per $n \to \infty$:

$$n^2 \sin \frac{1}{n^2+1}; \qquad n^2 \left(\cos \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right); \qquad \sqrt[n]{\binom{2n}{n}};$$

$$\frac{2n + \sin n + \sqrt[3]{n}}{\log n + \sqrt{n^2+3n}}; \qquad \left(1 + \frac{n^2+1}{n^\alpha}\right)^n \ (\alpha \in \mathbb{R} \text{ parametro}); \qquad \frac{5^n + 2^n}{4^n - 3^n};$$

$$\sqrt{n^2+2n} - n\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n}}; \qquad \frac{\sin n + \log n + \sqrt[n]{n!}}{3^n + n + (-1)^n}; \qquad \sqrt[n]{n} \log_3 \sqrt[n]{n} + 4;$$

$$\frac{\log(n^3)}{\log(n^3+3n^2)}; \qquad \frac{n \sin n + \sqrt[n]{n} + 3^{2n+1}}{2^n + n\log(1+n) + n! + \cos n\pi}; \qquad \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2n^3-n}{n+3}};$$

$$\sqrt[n]{n!}\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \cos^2 n; \qquad \frac{\log n!}{n \log n}; \qquad \frac{(3n)!}{(n!)^3};$$

$$\sqrt[n]{n} \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{2n}; \qquad \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n^2}}.$$

2. Dimostrare che la successione
$$\sin\left(\pi\sqrt{4n^2 + \sqrt{n}}\right)$$
è infinitesima.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ limitata e tale che
   a) $\inf_{\mathbb{R}} f(x) > 0$;
   b) $f(x+y) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

   Si dimostri che $f(nx) = [f(x)]^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dedurre che $f(x) \equiv 1$ (cioè che è costante ed uguale ad uno).

4. Provare che la successione definita ricorsivamente da
$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ n \in \mathbb{N}$$
è convergente e ha limite 2.

5. (*Algoritmo di Erone*) Sia a_n la successione definita ricorsivamente da
$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$
   a) Provare che a_n è convergente e ha limite $\sqrt{2}$.
   b) Detto $\varepsilon_n = a_n - \sqrt{2}$ l'errore che si commette quando si approssima $\sqrt{2}$ col valore a_n, si provi che
$$\varepsilon_n \leqslant \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{2\sqrt{2}}.$$
   In tal caso si dice che la successione converge al valore $\sqrt{2}$ con *velocità quadratica*.

6. Sia $0 < a < 1$, e a_n la successione definita ricorsivamente da

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Provare che a_n converge a 1.

7. Date due successioni a_n, b_n tali che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, è vero che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \ ?$$

8. Siano a e b due numeri reali tali che $0 < a < b$. Si considerino le due successioni a_n e b_n definite ricorsivamente come segue:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Si verifichi che a_n e b_n sono convergenti e che convergono allo stesso limite. Tale limite prende il nome di *media aritmetico-geometrica* di a e b.

LEZIONE 23 OTTOBRE 2015

Principio di induzione

1. Sia $x \geqslant 0$. Provare che qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

2. Siano $x_1, \ldots, x_n$, numeri reali positivi. Provare che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Numeri complessi

1. Determinare le radici quarte di $z = -1$.

2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z| = |w| \\ z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

   nelle incognite $z, w \in \mathbb{C}$.

3. Risolvere l'equazione

$$z^3 - |z| = 0$$

   nell'incognita $z \in \mathbb{C}$.

Campi di esistenza

Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \left(6 \arcsin(1 + 4x - 10x^2) - \pi\right)^{\sqrt{2}} \qquad f_2(x) = \log\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2-x^2}}\right];$$

$$f_3(x) = (2\sqrt{2}\sin x \cos x - 1)^{1-\log_2^2 x} \qquad f_4(x) = \log(|\cos x - 1| - |\cos x|);$$

$$f_5(x) = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{\sin^2 x - \sin x} - \sin x}{\tan^2 x - 3}}; \qquad f_6(x) = \log_3(2^x - 2^{1-x} + 1)$$

1. Si calcolino i limiti delle seguenti successioni per $n \to \infty$:

$$\sqrt[n]{n \log n}\,; \qquad \frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5}\,;$$

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{3n^2}; \qquad \sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n^4+2n^2};$$

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{\log\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}; \qquad \frac{n^{\sqrt{n}}+2^n n!+\sin(n^n)-1}{3^n+\sqrt{n^n}+3^{\sqrt{n}}};$$

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}\right); \qquad \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}}{n}.$$

2. Determinare l'estremo inferiore della successione

$$x_n = 3+\log_3\frac{3n+1}{n}.$$

3. Determinare α in modo tale che la successione

$$n^\alpha\left(\sqrt{n^5+n^2+1}-\sqrt{n^5-3n+2}\right)$$

ammetta limite finito e diverso da zero.

4. Sia $a \in]0,\pi[$ e sia x_n la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + \sin x_n \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Provare che x_n è regolare e $\lim\limits_n x_n = \pi$.

LEZIONE 6 NOVEMBRE 2015

Limiti di funzioni

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x+1}-x\right); \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(1-x^2)}{\log(\sin\frac{\pi}{2}x)}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin(\sin x)};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+2)-\log 2}{e^x-1}; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x}-x\right); \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x};$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\right); \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\log\left(\frac{x^2\sin x}{2}+e^x\right); \quad \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)3^x-e^x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+4x)}{x}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\log(1+x^2)}; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sin^2 x\cdot\log x\right);$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x^2+3x-4}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log^2\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)}{1-\cos\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\log(\sin x)}.$$

Calcolo differenziale

1. Dire se le funzioni

$$e^{-|x|}; \qquad x|x|; \qquad |x\sin x|; \qquad x\lfloor x-1\rfloor; \qquad \lfloor x\rfloor(x-1)$$

sono continue per $x=0$ e se sono ivi derivabili.
($\lfloor\alpha\rfloor$ denota la parte intera di α, ossia $\lfloor\alpha\rfloor=\max\{k\in\mathbb{Z}\colon k\leqslant\alpha\}$).

2. Per quali valori dell'esponente intero n la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

è derivabile per $x=0$? Per quali valori f' è continua per $x=0$?

3. La derivata di una funzione che descrive la dipendenza dal tempo (o da altra variabile) di certe grandezze geometriche, meccaniche o di altra natura si chiama sovente "*tasso di variazione*" della grandezza stessa.
   a) Provare che il tasso di variazione del volume di una sfera rispetto al raggio è uguale all'area della superficie.
   b) Il volume di una palla di neve decresce con una velocità proporzionale all'area della sua superficie. Sapendo che in un'ora il volume della palla si è dimezzato, si dica quanto tempo impiega la palla per fondere completamente. (Si supponga che la forma della palla sia in ogni istante sferica).

4. Un meteorite che penetra nell'atmosfera della Terra ha approssimativamente una velocità inversamente proporzionale a $\sqrt{x}$, ove x indica la sua distanza dal centro della Terra. Si provi che l'accelerazione è inversamente proporzionale a x^2.

5. Trovare il massimo valore della costante positiva K per cui si ha

$$K \log x \leqslant \sqrt{x} \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

6. *Problema di Fermat: Dati tre punti distinti* A, B, C *trovare un punto* P *nel piano tale che la quantità* $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ *sia minima*.

   Supponendo che esista un punto P diverso da A, B e C che risolva il problema, mostrare che gli angoli $A\widehat{P}B$, $B\widehat{P}C$, $A\widehat{P}C$ misurano $\frac{2}{3}\pi$.