

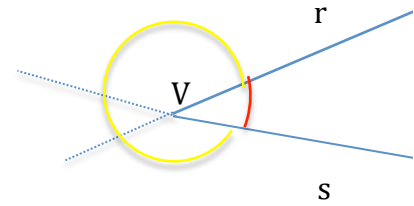
CENNI DI TRIGONOMETRIA- prima parte

1. ANGOLO DEL PIANO

Angolo piano = parte di un piano limitata da due semirette con stessa origine V .

V è il *vertice* dell'angolo, le due semirette sono i *lati* dell'angolo. Ogni coppia di semirette individua due angoli, detti *esplementari*, la cui unione è il piano; occorre allora indicare quale dei due si intende considerare. Utile al tal fine è la seguente distinzione tra angolo convesso e angolo concavo:

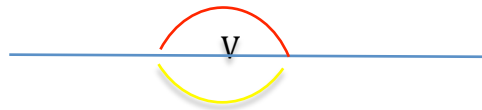
- **angolo convesso** è quello dei due angoli che non contiene i prolungamenti dei suoi lati;
- **angolo concavo** quello che contiene i prolungamenti dei suoi lati.



Due semirette coincidenti individuano due angoli: l'**angolo nullo** e l'**angolo giro**.



Due semirette che sono l'una il prolungamento dell'altra individuano due angoli coincidenti con i semipiani originati dalla retta cui appartengono i lati: ognuno dei due angoli è un **angolo piatto**.



Angolo **retto** la metà di un angolo piatto: esso è l'angolo *convesso* avente per lati due semirette perpendicolari;

angolo **acuto** è ogni angolo contenuto strettamente in un angolo retto ed angolo **ottuso** ogni angolo contenente strettamente un angolo retto.



Se si fissa nel piano un verso di rotazione per le semirette intorno alla loro origine, si può facilmente indicare quale dei due angoli individuati da due semirette r e s con la stessa origine, si intende parlare:

^

$\mathcal{S}r$ indica l'angolo che s descrive ruotando nel verso fissato e fermandosi nella posizione occupata da r (nella figura in alto è l'angolo convesso di lati s e r)

^

rS indica l'angolo che r descrive ruotando nel verso fissato e fermandosi alla fine nella posizione occupata da s (nella figura in alto è l'angolo concavo di lati s e r)

SISTEMI DI MISURAZIONE DEGLI ANGOLI PIANI

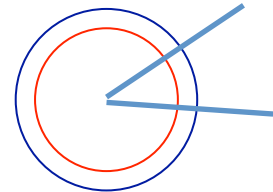
Esistono due modi misurare un angolo che fanno entrambi a riferimento alla lunghezza dell'arco che esso interseca sulla circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo stesso; essi si basano sulle proprietà

1.- il rapporto tra la lunghezza dell'arco individuato e la lunghezza della circonferenza è un numero che non dipende dalla circonferenza considerata

2.- il rapporto tra la lunghezza dell'arco individuato e la lunghezza del raggio della circonferenza è un numero che non dipende dalla circonferenza considerata

$$\frac{\text{lung. arco}}{\text{lung. circonfer.}} = \text{numero caratteristico dell'angolo}$$

$$\frac{\text{lung. arco}}{\text{lung. raggio}} = \text{numero caratteristico dell'angolo}$$



A) Sistema di misurazione degli angoli in gradi:

Tale sistema di misura sfrutta la proprietà 1.

L'**unità di misura** è il **grado** o **angolo sessagesimale** che è l'angolo che individua su qualsiasi circonferenza con centro nel suo vertice un arco che è la trecentosessantesima parte della circonferenza e cioè l'angolo per il quale il rapporto 1. vale $1/360$: esso è indicato con $^\circ$; la misura o **ampiezza** in gradi di un angolo α è allora α° (α gradi) dove essendo α è **il rapporto tra la lunghezza dell'arco individuato su una circonferenza e la lunghezza dell'arco che è la 360-esima parte circonferenza.**

L' **ampiezza** α° di un angolo è associata come misura anche all'arco intercettato su ogni circonferenza con centro nel vertice dell'angolo ed è detto **ampiezza dell'arco.**

L'angolo giro e la circonferenza hanno allora ampiezza 360° .

L'angolo piatto ($1/2$ di angolo giro) e la semicirconferenza hanno ampiezza 180° .

L'angolo retto ($1/4$ di angolo giro) ha ampiezza 90° .

La terza parte di un angolo piatto misura 60° .

La metà di un angolo retto ha ampiezza 45° .

La terza parte di un angolo retto ha ampiezza 30° .

La misura in gradi di un angolo appartiene all'intervallo $[0, 360]$ ed ogni numero di tale intervallo è la misura in gradi di un angolo piano.

Sottomultipli del grado: il **minuto** = $1/60$ di grado sessagesimale, il **secondo** = $1/60$ di minuto.

B) Sistema di misurazione degli angoli in radianti:

Tale sistema di misura utilizza la proprietà 2. e definisce **misura in radianti** dell'angolo α **il rapporto tra la lunghezza dell'arco individuato su una circonferenza e la lunghezza del raggio della circonferenza**

(rapporto non dipendente dalla circonferenza considerata): $\alpha^r = \frac{\text{lung. arco}}{\text{lung. raggio}}$.

α^r è anche la misura in radianti associata all'arco individuato dall'angolo su ogni circonferenza concentro nel vertice dell'angolo.

L'**unità di misura** è allora "**il radiante**" cioè quell'angolo che individua sulla circonferenza un arco di lunghezza pari a quella del raggio (radius).

Ricordando che la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$ otteniamo le seguenti misure:

L'angolo giro e la circonferenza hanno misura in radianti 2π .

L'angolo piatto e la semicirconferenza hanno misura in radianti π .

La terza parte di un angolo piatto ha misura in radianti $\pi/3$.

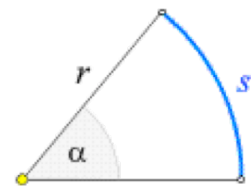
L'angolo retto ha misura in radianti $\pi/2$,

La metà di un angolo retto ha misura in radianti $\pi/4$

La terza parte di un angolo retto ha misura in radianti $\pi/6$.

La misura in radianti di un angolo appartiene all'intervallo $[0, 2\pi]$ e inoltre:

a) ogni numero di tale intervallo è la misura in radianti di un angolo piano.



Relazione tra i due sistemi di misura

Sia α un angolo e α° e α^r le rispettive misure in gradi e radianti.
 Dal sussistere della seguente uguaglianza tra rapporti

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha^r}{2\pi} \quad \text{cioè} \quad \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^r}{\pi}$$

si determinano le uguaglianze

$$\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha^r$$

che costituiscono le formule di passaggio dalla misura in gradi a quella in radianti e viceversa.

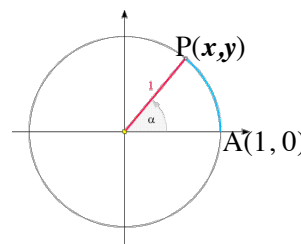
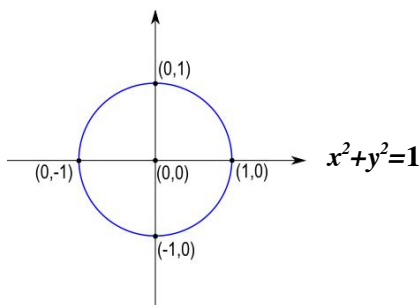
Esempio. Se l'angolo θ misura 30° allora la sua misura in radianti è: $\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ} 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

Se l'angolo α ha per misura in radianti $\frac{\pi}{5}$ allora la sua misura in gradi è: $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\pi}{5} = 36^\circ$

LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA PER LA MISURA DEGLI ANGOLI PIANI

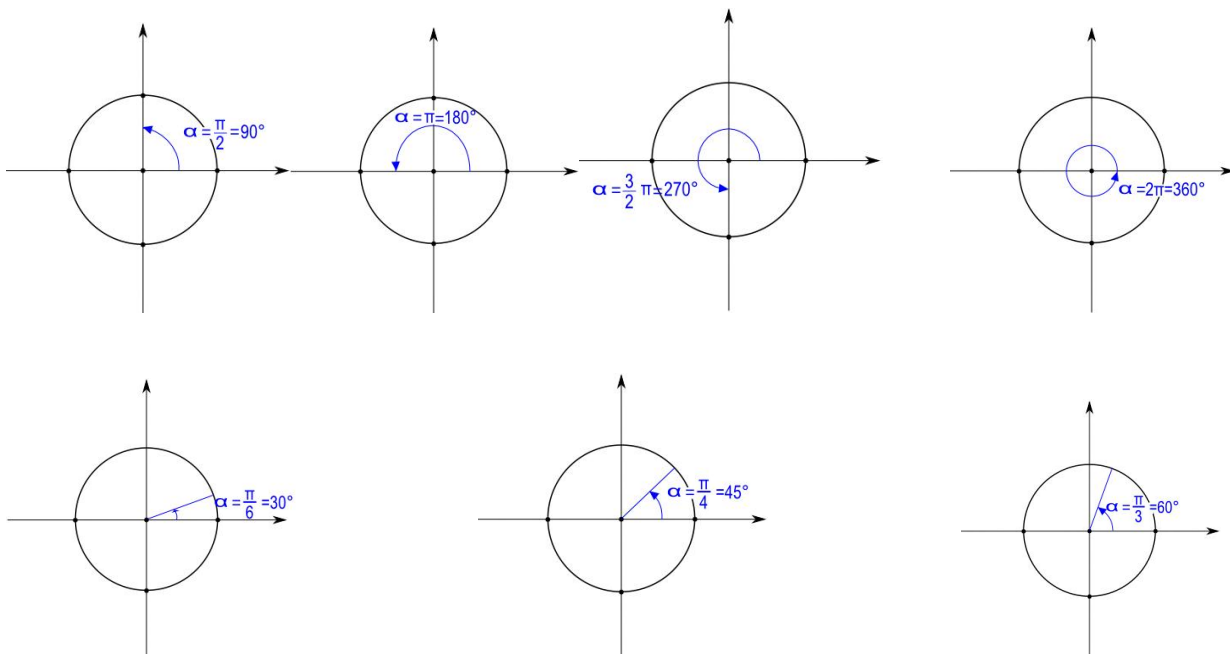
Fissato un sistema cartesiano monometrico ortogonale nel piano, la **circonferenza goniometrica** è la circonferenza di **raggio 1**, con **centro nell'origine O(0,0) degli assi cartesiani**. La circonferenza goniometrica ha equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Poiché il raggio della circonferenza goniometrica misura 1, **la misura in radianti di un arco sulla circonferenza e della corrispondente angolo al centro coincide con la lunghezza dell'arco**.



Misura in radianti di α :

$$\alpha^r = \text{lung. arco } \overset{\cap}{AP}$$



2. Angolo trigonometrico

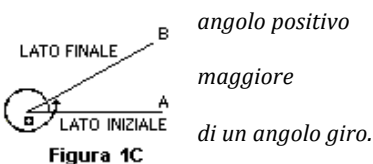
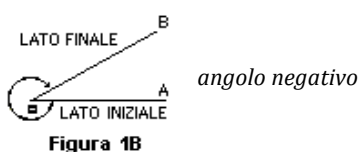
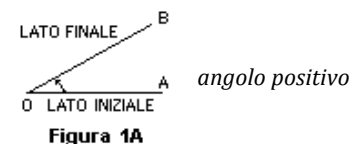
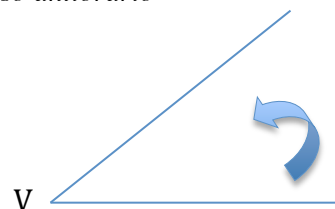
Angolo trigonometrico = *angolo descritto dalla rotazione di una semiretta, intorno alla sua origine.*

Il **primo lato** è quello indicato dalla posizione iniziale della semiretta e il **secondo lato** è quello indicato dalla posizione finale della semiretta. Poiché la rotazione può avvenire sia in senso orario che in senso antiorario, si parla di angolo:

orientato positivamente o angolo positivo, se l'angolo è generato da una rotazione in senso antiorario

orientato negativamente o angolo negativo se l'angolo è generato da una rotazione in senso orario.

Si conviene allora di prendere con il segno + la misura di un angolo positivo e con il segno - quella di un angolo negativo



Poiché una retta può percorrere più di un angolo giro prima di fermarsi, un angolo trigonometrico può essere in termini di spazio percorso più grande del piano e quindi comprendere più angoli giri.

Allora un angolo positivo può avere una misura in gradi che supera i 360° e una misura in radianti maggiore di 2π , mentre un angolo negativo può avere una misura in gradi che è al disotto di -360° e una misura in radianti al disotto di -2π .

Due angoli distinti hanno gli stessi lati se e solo se differiscono di un numero intero di angoli giri e hanno quindi misure in radianti che differiscono di un numero intero di 2π :

$$\alpha^r \quad \text{e} \quad \alpha^r + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

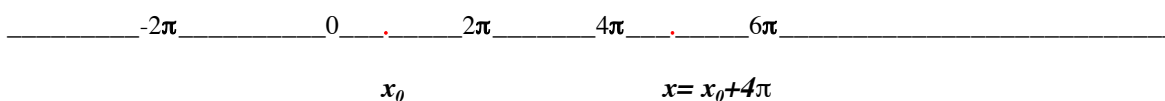
Un angolo trigonometrico α o coincide con un angolo compreso tra l'angolo nullo e l'angolo giro e ha misura in $[0, 2\pi]$ o differisce da un siffatto angolo di un multiplo intero (positivo o negativo) di angoli giri: pertanto la sua misura in radianti è $\alpha^r = \alpha_0^r + 2k\pi$ con $\alpha_0^r \in [0, 2\pi]$; ad esempio se l'angolo negativo di cui alla figura 1B ha misura $-\frac{7}{4}\pi$, allora risulta: $-\frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi$ dove $\frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi]$.

Ogni numero reale x si può scrivere come somma $x_0 + 2k\pi$ con $x_0 \in [0, 2\pi]$ e $k \in \mathbb{Z}$. Infatti, \mathbb{R} può essere considerato come unione intervalli consecutivi di ampiezza 2π : $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, 2(k+1)\pi]$

$$\dots \cup [-2(n+1)\pi, -2n\pi] \cup \dots \cup [-4\pi, -2\pi] \cup [-2\pi, 0] \cup [0, 2\pi] \cup [2\pi, 4\pi] \cup [4\pi, 6\pi] \cup \dots \cup [2n\pi, 2(n+1)\pi] \cup \dots$$

e accade che un numero reale x cade in uno almeno degli intervalli $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$; posto allora

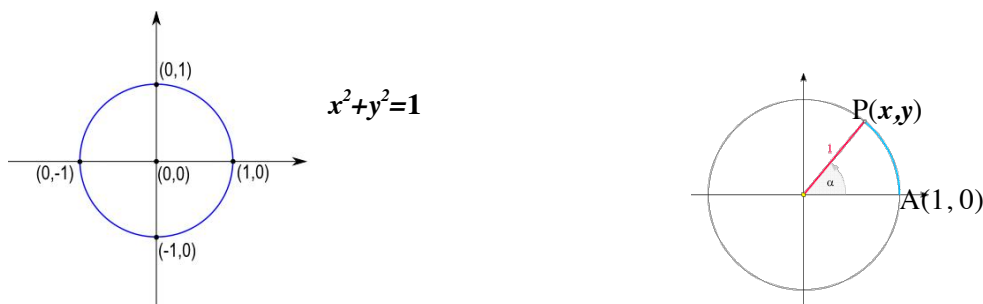
$$x_0 = x - 2k\pi, \text{ risulta } x_0 \in [2k\pi - 2k\pi, 2(k+1)\pi - 2k\pi] = [0, 2\pi]; \text{ ciò prova l'asserto.}$$



Pertanto, in conseguenza anche dell'asserzione a) di pg. 2:

b) Ogni numero reale x è la misura in radianti di un angolo trigonometrico.

Angolo trigonometrico e circonferenza goniometrica



I lati di un angolo trigonometrico può essere riportati al centro della circonferenza goniometrica, in modo che il vertice coincida con il centro della circonferenza e il primo lato con il semiasse positivo delle ascisse così da incontrare questa in $A(1, 0)$: allora *l'angolo può essere pensato come descritto dalla rotazione del semiasse positivo delle ascisse intorno alla sua origine $O(0, 0)$ e in tale rotazione il punto $A(1,0)$ descrive un arco della circonferenza o un arco più un numero intero di circonferenze*. Il semiasse positivo delle ascisse è detto allora “*origine degli angoli*” e il punto $A(1, 0)$ della circonferenza goniometrica è detto “*origine degli archi*”.

*Il secondo lato dell'angolo è detto **raggio vettore**: esso incontra la circonferenza in un punto $P(x, y)$ che il punto in cui termina il percorso descritto nella rotazione dal punto di incontro tra semiretta ruotante e circonferenza.*

Avendo posto per tutti gli angoli, il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse possiamo affermare che:

due angoli differiscono di un numero interi di angoli giri se e solo se hanno lo stesso raggio vettore.

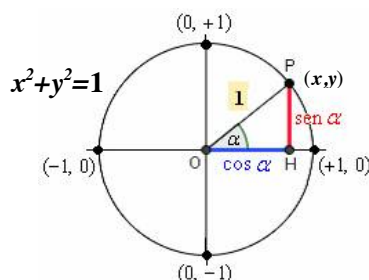
La *misura in radianti* di un angolo trigonometrico è data dalla *lunghezza del percorso descritto sulla circonferenza* dal punto di incontro della semiretta rotante con la circonferenza, presa con il segno + o meno, a seconda che l'angolo sia positivo o negativo.

3. SENO E COSENO DI UN ANGOLO

Riportati il lati di un angolo trigonometrico α al centro della circonferenza goniometrica secondo le regole prima indicate, consideriamo il punto $P(x, y)$ in cui il raggio vettore (secondo lato) incontra la circonferenza. Si definisce: **seno** dell'angolo l'**ordinata** del punto $P(x, y)$ e **coseno** dell'angolo l'**ascissa** del punto $P(x, y)$.

$$\text{sen } \alpha = y = \text{ordinata del punto } P$$

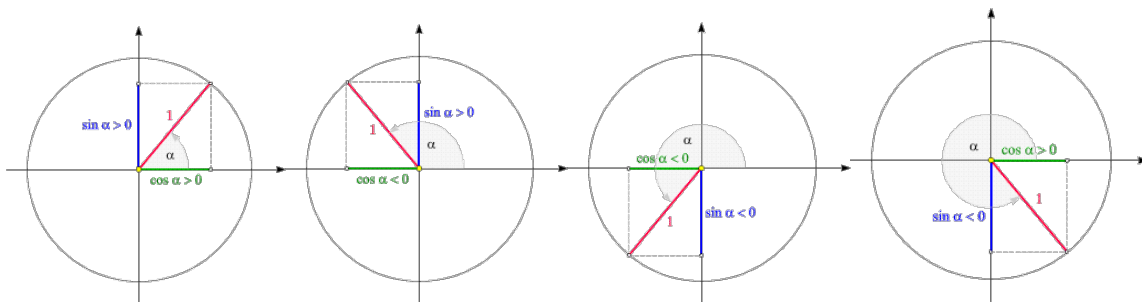
$$\text{cos } \alpha = x = \text{ascissa del punto } P$$



Appartenendo $P(x, y)$ alla circonferenza goniometrica e verificando l'equazione $x^2 + y^2 = 1$, risulta

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Il segno di $\text{sen } \alpha$ e $\text{cos } \alpha$ dipende dal quadrante in cui si trova il raggio OP :



Determiniamo gli angoli il cui seno è 0.

$\text{sen } \alpha = 0$ se e solo se $P(1, 0)$ o $P(-1, 0)$ cioè se e solo se il raggio vettore giace sull'asse delle ascisse;

ciò accade se e solo se α è l'angolo nullo o l'angolo piatto o differisce da uno di questi angoli per un numero intero di angoli giri; quindi la sua misura in radianti è:

$$r = 0 + 2k\pi \quad \text{o} \quad r = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

e quindi sinteticamente è data da

$$\boxed{r = h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}} \quad (1)$$

Determiniamo gli angoli il cui coseno è 0.

$\text{cos } \alpha = 0$ se e solo se $P(0, 1)$ o $P(0, -1)$ cioè se e solo se il raggio vettore è perpendicolare all'asse delle ascisse; ciò accade se e solo se α è l'angolo retto, l'angolo esplementare dell'angolo retto o differisce da uno di questi angoli per un numero intero di angoli giri; quindi la sua misura in radianti è:

$$r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{o} \quad r = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

e quindi sinteticamente data da

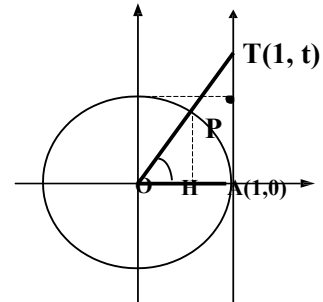
$$\boxed{r = \frac{\pi}{2} + h\pi = (2h + 1)\frac{\pi}{2}, \quad h \in \mathbb{Z}} \quad (2)$$

4. TANGENTE E COTANGENTE DI UN ANGOLO

Se $\cos \alpha \neq 0$, cioè se i lati di α non sono perpendicolari, **il rapporto tra $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ è detto tangente di α**

Se $\sin \alpha \neq 0$, cioè se i lati di α non appartengono alla stessa retta, **il rapporto tra $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ è detto cotangente di α**

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotag} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$



Pertanto :

$-\operatorname{tag} \alpha$ ha senso per tutti gli angoli la cui misura in radianti è diversa da un multiplo intero dispari di $\pi/2$ (*vedi (2)*)

$\operatorname{cotag} \alpha$ ha senso per tutti gli angoli la cui misura in radianti è diversa da un multiplo intero dispari di π (*vedi (1)*)

Dal punto di vista geometrico:

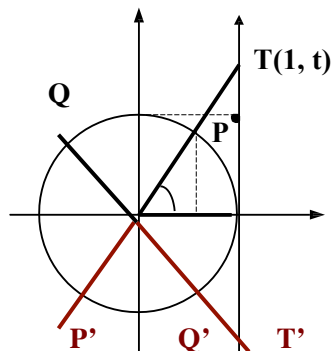
$\operatorname{tag} \alpha$ è l'ordinata t del punto T di intersezione della retta cui appartiene il raggio vettore con la retta tangente in $A(1,0)$ alla circonferenza

Ci limitiamo a verificare tale asserzione nel caso in cui P , e quindi T , cade nel primo quadrante.

L'asserzione è ovvia se $P = A$ perché allora è $t=0 = \operatorname{tag} \alpha$. Se $P \neq A$, $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ sono positivi e il loro rapporto è il rapporto delle lunghezze dei cateti HP e OH nel triangolo rettangolo OHP : $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{|HP|}{|OH|}$; tale

triangolo è simile al triangolo rettangolo OAT , il cui cateto AT misura T , allora: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{|HP|}{|OH|} = \frac{|AT|}{|OA|} = \frac{t}{1} = t$.

Osserviamo che se il raggio vettore dell'angolo cade nel 1° 3° quadrante la tangente dell'angolo è positiva, mentre, se il raggio vettore cade nel 2° 4° quadrante, la tangente dell'angolo è negativa



Se β e α hanno raggi vettori che sono l'uno il prolungamento dell'altro è $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$: infatti i raggi vettori appartengono alla stessa retta e quindi individuano lo stesso punto T sulla retta tangente in A alla circonferenza goniometrica.

5. SENO E COSENO, TANGENTE E COTANGENTE DI UN NUMERO REALE.

Ogni numero reale r è la misura in radianti di un angolo trigonometrico; si pone allora per ogni $r \in \mathbb{R}$:

$\text{sen } r = \text{seno dell'angolo la cui misura in radianti è } r$

$\text{cos } r = \text{coseno dell'angolo la cui misura in radianti è } r$

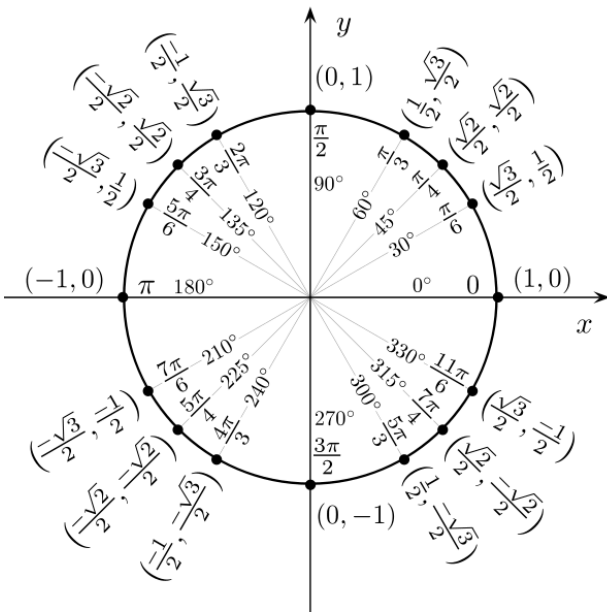
Esempio: $\text{sen}(\pi/2) = \text{seno dell'angolo retto} = 1$ $\text{cos}(\pi/2) = \text{coseno dell'angolo retto} = 0$.

Analogamente si definisce la *tangente* di un numero reale r per ogni numero reale r per il quale risulti $\text{cos } r \neq 0$. Pertanto si pone

$$\text{tag } r = \frac{\text{sen } r}{\text{cos } r} = \text{tag dell'angolo che misura } r \quad \forall r \neq \frac{\pi}{2} + h\pi = (2h+1)\frac{\pi}{2} \quad h \in \mathbb{Z}$$

La *cotangente* di un numero reale si definisce per ogni numero reale r per il quale risulti $\text{sen } r \neq 0$, cioè quei numeri che sono misura in radianti di angoli con i lati che giacciono sulla stessa retta. Pertanto si pone

$$\text{cotg } r = \frac{\text{cos } r}{\text{sen } r} = \text{cotag dell'angolo che misura } r \quad \forall r \neq h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$



Le coordinate dei punti indicati sulla circonferenza goniometrica sono il coseno e il seno dell'angolo che ha come primo lato il semiasse positivo delle ascisse e come secondo lato il raggio passante per il punto e sono ovviamente il seno e il coseno dei numeri che esprimono la misura di tali angoli. Ad esempio:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{6}, \text{sen } \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$$

La definizione di seno coseno, tangente e cotangente di un numero reale porta alla definizione delle seguenti funzioni reali di una variabile reale, dette funzioni *trigonometriche*:

FUNZIONE SENO: $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{sen } x \in [-1, 1]$

FUNZIONE COSENO: $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{cos } x \in [-1, 1]$

FUNZIONE TANGENTE: $f: x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} [\rightarrow \text{tg } x \in \mathbb{R}$

FUNZIONE COTANGENTE: $f: x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (h-1)\pi, h\pi [\rightarrow \text{cotg } x \in \mathbb{R}$

I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE PER GLI ANGOLI PARTICOLARI

ANGOLI		FUNZIONE GONIOMETRICA			
gradi	radiani	seno	coseno	tangente	cotangente
0	0	0	1	0	Non esiste
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$	$\sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}}{25}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Non esiste	0

Per individuare alcune proprietà delle funzioni trigonometriche diamo alcune relazioni tra i valori delle funzioni trigonometriche in numeri reali che sono la misura di particolari angoli.

6. Alcune relazioni tra seno coseno e tangente di angoli particolari

Il semiasse positivo delle ascisse può compiere più giri interi prima di fermarsi, conseguentemente:

1. *angoli che differiscono per un numero intero di angoli giri hanno lo stesso seno e lo stesso coseno*
Passando dagli angoli ai numeri reali che sono misure di angoli:

$$\text{sen}(r \pm 2k\pi) = \text{sen } r \text{ e } \text{cos}(r \pm 2k\pi) = \text{cos } r \quad \forall r \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}$$

2. Se i raggi vettori di α e β sono simmetrici rispetto alla bisettrice i punti di incontro $P(x,y)$ e $P'(x',y')$ sono anche essi simmetrici rispetto alla bisettrice per cui risulta $y'=x$ e $x'=y$ per cui

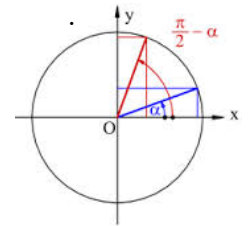
$$\text{sen}\beta = \text{cos}\alpha \text{ e } \text{cos}\beta = \text{sen}\alpha \text{ e conseguentemente } \text{tg}\beta = \text{cotg}\alpha$$

3. Tale situazione si verifica in particolare per gli *angoli complementari*

la cui somma è un angolo retto, e quindi tali che $\beta = \text{angolo retto} - \alpha$.

Allora passando da tali allora ai numeri reali loro misure in radianti si ha:

$$\text{sen}(\pi/2 - r) = \text{cos } r \text{ e } \text{cos}(\pi/2 - r) = \text{sen } r$$



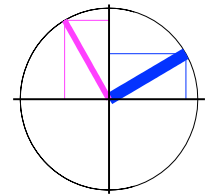
4. Se i raggi vettori di α e β sono perpendicolari è

$$\text{sin}\beta = \text{cos}\alpha, \text{cos}\beta = -\text{sen } \alpha \text{ e } \text{tg } \beta = -1/\text{tg } \alpha$$

Ciò accade in particolare se β è somma di α e di un angolo retto

Allora passando dagli angoli ai numeri reali misure di α e β :

$$\text{sen}(r + \pi/2) = \text{cos } r, \text{cos}(r + \pi/2) = -\text{sen } r \text{ e } \text{tg}(r + \pi/2) = -1/\text{tg } r.$$



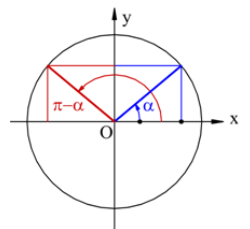
4. Se i raggi vettori di α e β sono simmetrici rispetto all'asse delle ordinate è

$$\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha, \text{cos}\beta = -\text{cos}\alpha \text{ e } \text{tg}\beta = -\text{tg}\alpha ;$$

Ciò accade in particolare se β è differenza di un angolo piatto e di α .

Allora passando dagli angoli ai numeri, loro misure, risulta:

$$\text{sen}(\pi - r) = \text{sen } r, \text{cos}(\pi - r) = -\text{cos } r \text{ e } \text{tg}(\pi - r) = -\text{tg } r .$$

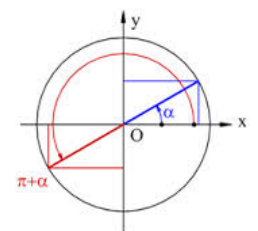


5. Se i raggi vettori di α e β sono l'uno il prolungamento dell'altro è

$$\text{sen}\beta = -\text{sen}\alpha \text{ e } \text{cos}\beta = -\text{cos}\alpha \text{ e } \text{tg}\beta = \text{tg}\alpha ;$$

Ciò accade in particolare se β è somma di α e di un angolo piatto o differenza di α e di un angolo piatto; passando allora ai numeri reali risulta:

$$\text{sen}(r \pm \pi) = -\text{sen } r, \text{cos}(r \pm \pi) = -\text{cos } r \text{ e } \text{tg}(r \pm \pi) = \text{tg } r$$



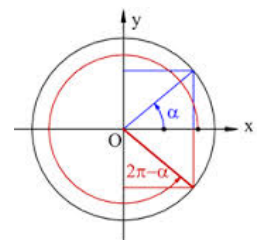
6. Se i raggi vettori di α e β sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse è:

$$\text{sen}\beta = -\text{sen}\alpha, \text{cos}\beta = \text{cos}\alpha \text{ e } \text{tg}\beta = -\text{tg}\alpha$$

Ciò accade in particolare se β e α sono opposti o sono esplementari,

cioè se β si ottiene sottraendo α da un angolo giro; si allora, allora passando ai numeri:

$$\text{sen}(2\pi - r) = \text{sen}(-r) = -\text{sen } r, \text{cos}(2\pi - r) = \text{cos}(-r) = \text{cos } r \text{ e } \text{tg}(2\pi - r) = \text{tg}(-r) = -\text{tgr}$$



Le principali relazioni tra valori delle funzioni trigonometriche sono riassunte nei seguenti quadri che comprendono le relazioni già dimostrate

- $\sin(\pi/2 - r) = \cos r$
- $\cos(\pi/2 - r) = \sin r$
- $\tan(\pi/2 - r) = \cotg r$
- $\cotg(\pi/2 - r) = \tan r$

- $\sin(\pi/2 + r) = \cos r$
- $\cos(\pi/2 + r) = -\sin r$
- $\tan(\pi/2 + r) = -\cotg r$
- $\cotg(\pi/2 + r) = -\tan r$

- $\sin(r \pm \pi) = -\sin r$
- $\cos(r \pm \pi) = -\cos r$
- $\tan(r \pm \pi) = \tan r$
- $\cotg(r \pm \pi) = \cotg r$

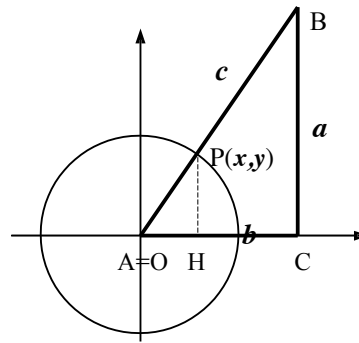
- $\sin(\pi - r) = \sin r$
- $\cos(\pi - r) = -\cos r$
- $\tan(\pi - r) = -\tan r$
- $\cotg(\pi - r) = -\cotg r$

- $\sin(2\pi - r) = -\sin r = \sin(-r)$
- $\cos(2\pi - r) = \cos r = \cos(-r)$
- $\tan(2\pi - r) = -\tan r = \tan(-r)$
- $\cotg(2\pi - r) = -\cotg r = \cotg(-r)$

TRIGONOMETRIA DEL TRIANGOLO RETTANGOLO

Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB e sia α uno dei due angoli acuti, ad esempio $\alpha = \widehat{BAC}$. Poniamo $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Fissiamo un riferimento cartesiano monometrico ortogonale che abbia l'origine O coincidente con A, il cateto AC sovrapposto ad un segmento del semiasse positivo delle ascisse ed il punto B nel 1° quadrante.



Si consideri poi la circonferenza goniometrica Γ (con centro in O), si indichi con P l'intersezione di Γ con la semiretta di origine $O=Ae$ passante per B; si indichi quindi con H la proiezione di P sull'asse delle ascisse. Le coordinate di P sono positive e per definizione di seno e coseno:

$$\sin \alpha = y = |HP| \quad e \quad \cos \alpha = x = |OH| .$$

Dalla similitudine dei triangoli ABC e OPH si deduce:

$$\frac{a}{c} = \frac{|HP|}{|OP|} = \frac{y}{1} = \sin \alpha$$

$$\frac{b}{c} = \frac{|OH|}{|OP|} = \frac{x}{1} = \cos \alpha$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|HP|}{|OH|} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$$

da cui: $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$

Quindi in un triangolo rettangolo che ha α come angolo acuto è

$$\sin \alpha = \frac{\text{lung. cateto opposto}}{\text{lung. ipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{lung. cateto adiacente}}{\text{lung. ipotenusa}} .$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{lung. cateto opposto}}{\text{lung. cateto adiacente}}$$

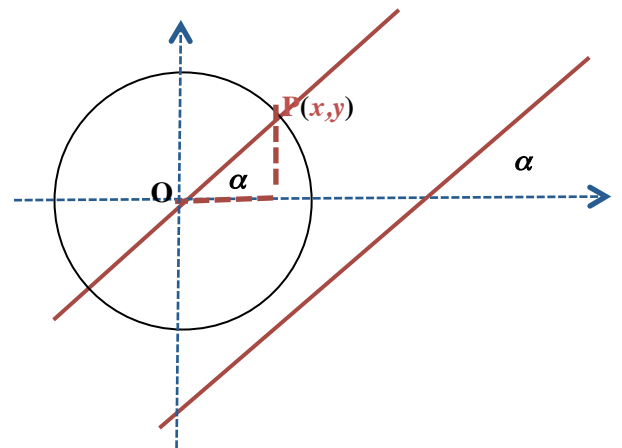
TANGENTE E PENDENZA DI UNA RETTA

Angolo di pendenza di una retta r è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse o con qualsiasi altra retta a tale asse parallela; precisamente tale angolo è l'angolo nullo se la retta è parallela all'asse delle x , altrimenti è l'angolo che è descritto dall'asse x quando questo ruota, nel verso fissato nel piano, intorno al punto di intersezione con la retta r , fino a sovrapporsi ad essa. Rette parallele hanno lo stesso angolo di pendenza.

Sia α l'angolo di pendenza di una retta r non parallela all'asse delle ordinate di equazione $y=mx+n$; ha senso allora considerare la **tag α** , che è un numero positivo se α è acuto, è 0 se α è nullo, è invece un numero negativo se α è ottuso: esso è un indicatore della direzione della retta r e delle rette ad esse parallele ed è detto "**pendenza**" di r (e di ognuna delle rette che formano l'angolo α con l'asse delle ascisse)

Per calcolare **tag α** , possiamo considerare la retta $y=mx$ che passa per l'origine ed è parallela alla retta che ci interessa e utilizzare quindi la circonferenza goniometrica. La **tag α** è data dal rapporto tra ordinata y e ascissa x del punto $P(x,y)$ in cui la retta per l'origine incontra la circonferenza goniometrica; tale rapporto è uguale a m come si deduce dall'equazione della retta $y=mx$.

$$\text{tag}\alpha = \frac{y}{x} = m$$



Poiché su una retta $y=mx+n$ è

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + n - mx_1 - n}{x_2 - x_1} = m$$

ne consegue che

“ Su di una retta il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di punti distinti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è uguale alla tangente dell'angolo α che la retta forma con l'asse delle ascisse;

$$\text{tag}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ TRA RETTE

È ovvio che: ogni retta $y=h$ parallela all'asse delle ascisse è perpendicolare ad ogni retta $x=k$ parallela all'asse delle ordinate e viceversa.

Consideriamo allora due rette r e r' , non parallele né all'asse delle ascisse né all'asse delle ordinate rette e indichiamo con α e β i rispettivi angoli di inclinazione sull'asse delle ascisse. Due rette siffatte hanno equazioni

$$y=mx+n \text{ con } m=\text{tg}\alpha \neq 0 \quad e \quad y=m'x+n' \text{ con } m'=\text{tg}\beta \neq 0$$

Esse sono perpendicolari se e solo se formano un angolo retto tra di loro e cioè, supposto $\alpha < \beta$, β è somma di α e di un angolo retto. Allora, per quando detto nel paragrafo 6 al punto 3, le rette suindicate sono perpendicolari se e solo se è “**tg $\beta = -1/\text{tg } \alpha$** ”, cioè $m'=-1/m$. Allora

$$m'=-1/m$$

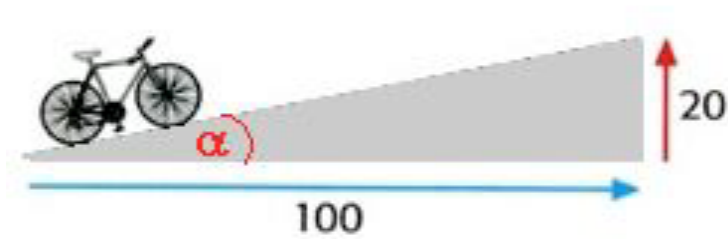
è la condizione di perpendicolarità tra rette non parallele agli assi del sistema dei riferimento monometrico ortogonale scelto.

Pendenza di una strada. Angolo d'inclinazione di una strada è l'angolo α che la linea retta ottenuta tagliando idealmente la strada con un piano orizzontale, forma con la linea d'orizzonte. La pendenza della strada è allora la pendenza m di tale linea retta, cioè la tangente dell'angolo α di inclinazione:

$$m = \tan \alpha.$$

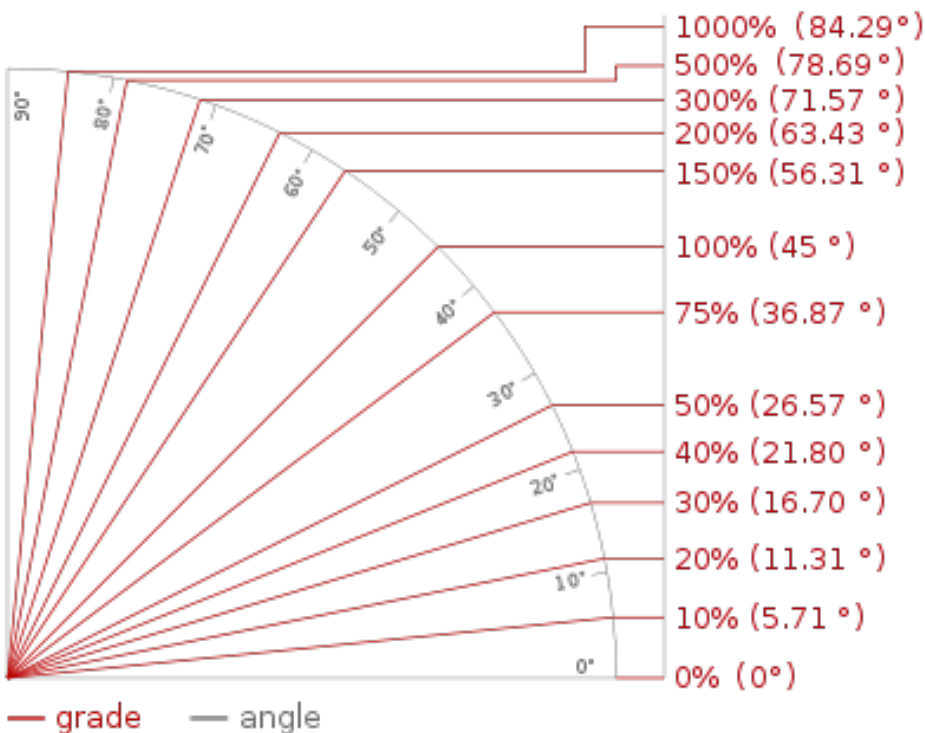
La pendenza in percentuale ($m\%$) si ottiene moltiplicando m per 100:

$$m\% = 100 m = 100 \tan \alpha$$



$$m = \tan \alpha = 20/100 = 0,2 \quad \rightarrow \rightarrow \quad m\% = 20\%$$

$$m\% = 100\% \quad \rightarrow \rightarrow \quad m = \tan \alpha = 1 \quad \rightarrow \rightarrow \quad \alpha = \pi/4$$



Rappresentazione di diverse pendenze e relative misurazioni in gradi.

Se l'angolo d'inclinazione è di 45° , la pendenza è 1 e la pendenza percentuale è del 100%