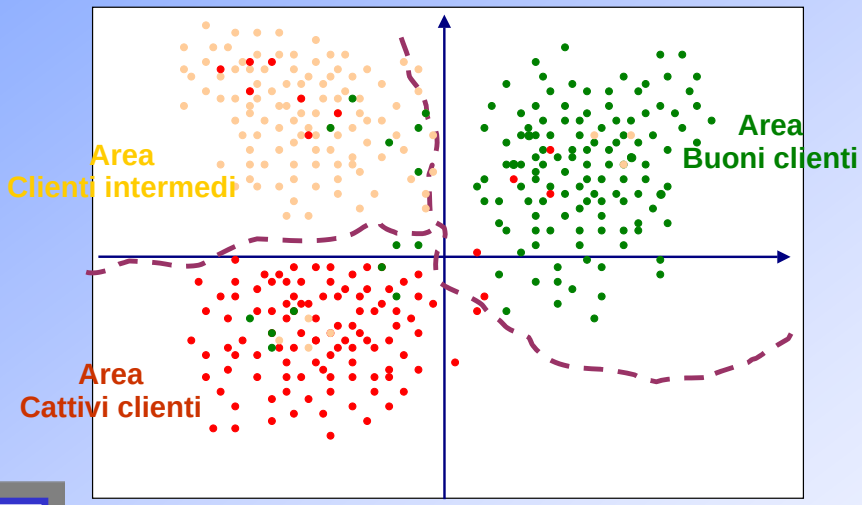
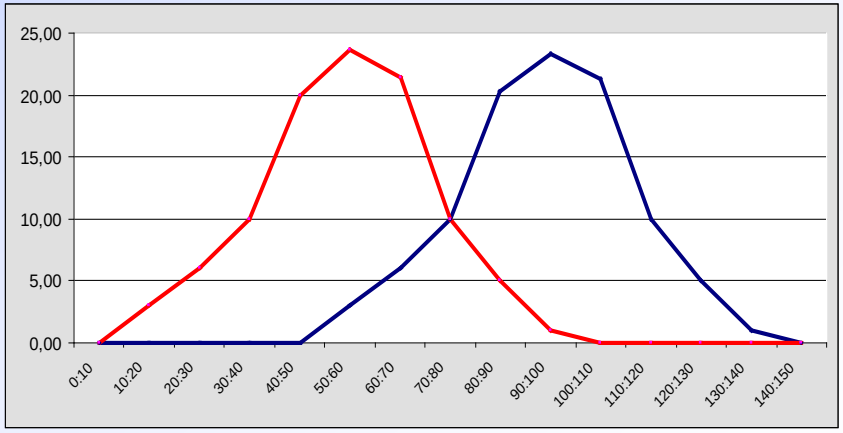
L'Analisi Multidimensionale dei Dati

Una Statistica da vedere

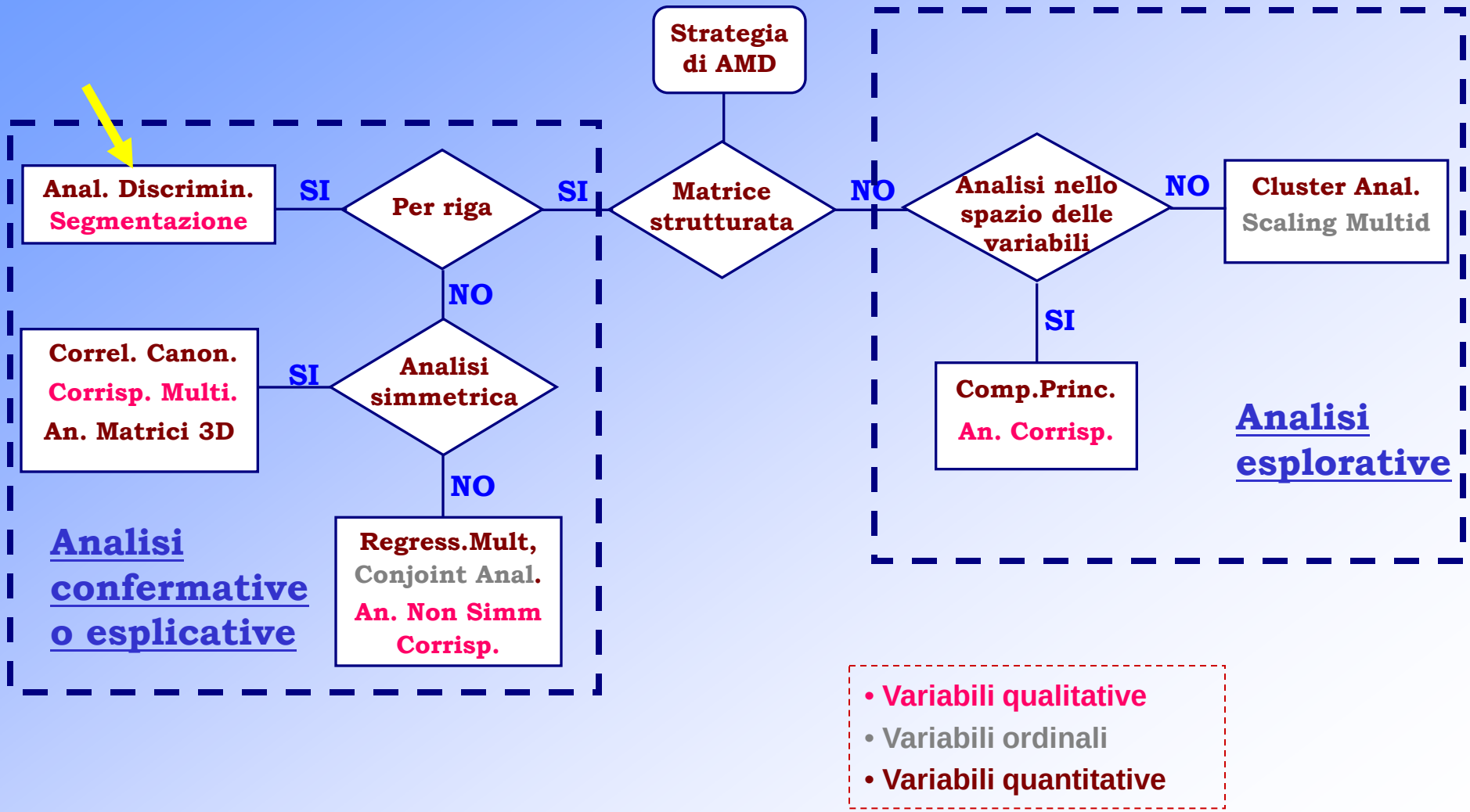
Analisi Discriminante



		Classificazione a priori			
		Buoni	Intermedi	Cattivi	TOT.
Classificazione a posteriori	Buoni	580	95	38	713
	Intermedi	120	380	64	564
	Cattivi	50	75	298	423
	TOT.	750	550	400	1700



Matrici e metodi



I metodi per le decisioni: l'Analisi discriminante

• L'AD Rientra fra i metodi utilizzati nel trattamento di matrici che comprendono una variabile ***privilegiata qualitativa*** che costituisce il ***fenomeno da spiegare*** e ***p*** variabili quantitative, che costituiscono l'insieme delle ***variabili esplicative***.

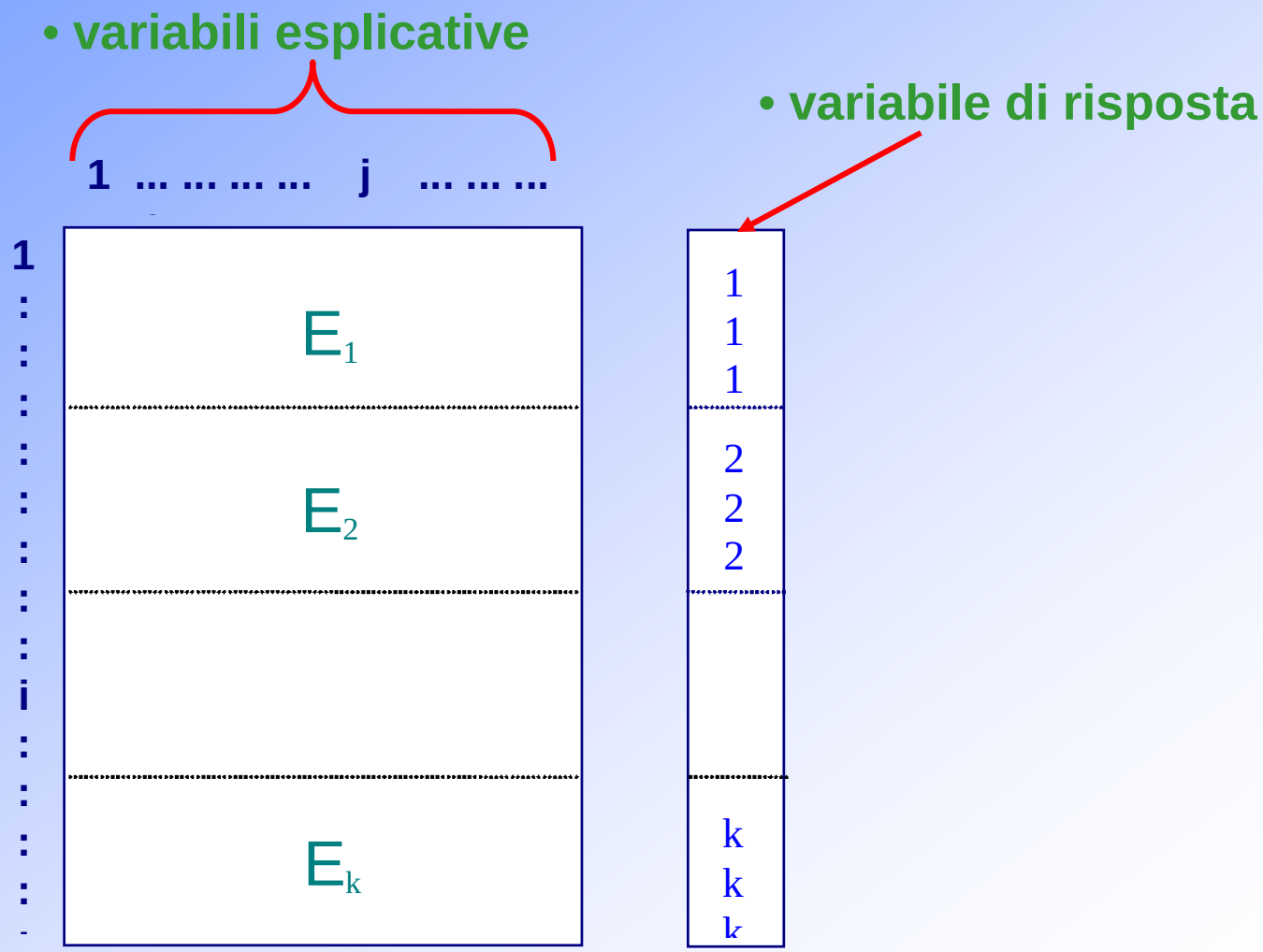
• Gli individui sono ***ripartiti a priori in k gruppi***, sulla base delle differenti modalità di una variabile qualitativa che costituisce la variabile da spiegare.

OBIETTIVO

DESCRITTIVO: Confrontare la classificazione a priori con quella ottenuta ***sulla base dei valori assunti dalle variabili esplicative.***

DECISIONALE: Assegnare un nuovo individuo, ***di cui non si conosce il gruppo di appartenenza***, ad uno dei gruppi, con la ***minima probabilità di commettere un errore di classificazione***.

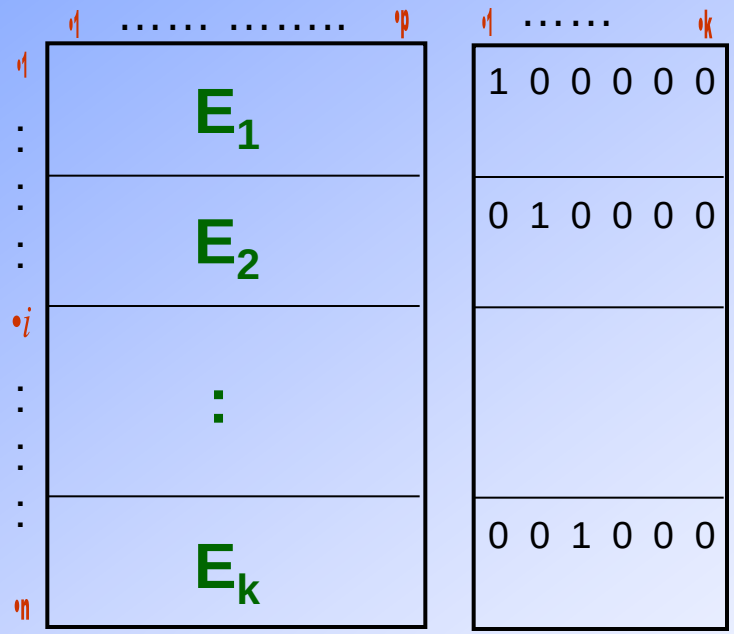
I dati nell'Analisi Discriminante



I dati di base

- Una matrice partizionata di dati quantitativi
- La codifica disgiuntiva della variabile di risposta qualitativa

$\mathbf{X} =$



Notazioni : i gruppi

Gli individui sono ripartiti in *k gruppi definiti a priori sulla base delle differenti modalità di una variabile qualitativa* che costituisce la variabile da spiegare.

Questa suddivisione individua una partizione in k gruppi E_1, E_2, ..., E_k tale che:

$$\cap\{E_1, E_2, \ldots, E_k\} = 0 \; ; \qquad \cup\{E_1, E_2, \ldots, E_k\} = I$$

Notazioni: le matrici

- $\mathbf{X}$: Matrice dei dati quantitativi*(n,p)*

  - $\mathbf{g_j}$: baricentro del gruppo $\mathbf{G_j}$

  - $\mathbf{g}$: baricentro della nube totale

$$\mathbf{W_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left\{(\mathbf{x_i}-\mathbf{g_j})(\mathbf{x_i}-\mathbf{g_j})'\right\}$$

- Matrice var-cov gruppo $\mathbf{G_j}$ (j=1,…,k)

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{n_j}{n}(\mathbf{g_j}-\mathbf{g})(\mathbf{g_j}-\mathbf{g})'\right\}$$

- Matrice var-cov tra i gruppi

$$\mathbf{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(\mathbf{x_i}-\mathbf{g})(\mathbf{x_i}-\mathbf{g})'\right\}$$

- Matrice var-cov totale

il caso dei punti pesanti ….

- r = 1, 2, …, k ; card $(E_r) = n_r$ $\Sigma n_r = n = I$
- peso individui: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (spesso $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$)
- peso classi : $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ($q_i = n_i / n$)
- baricentro gruppo r : $g_r = \sum_i e_i \cdot p_i$
- baricentro: $g = \sum_r q_r \cdot g_r$

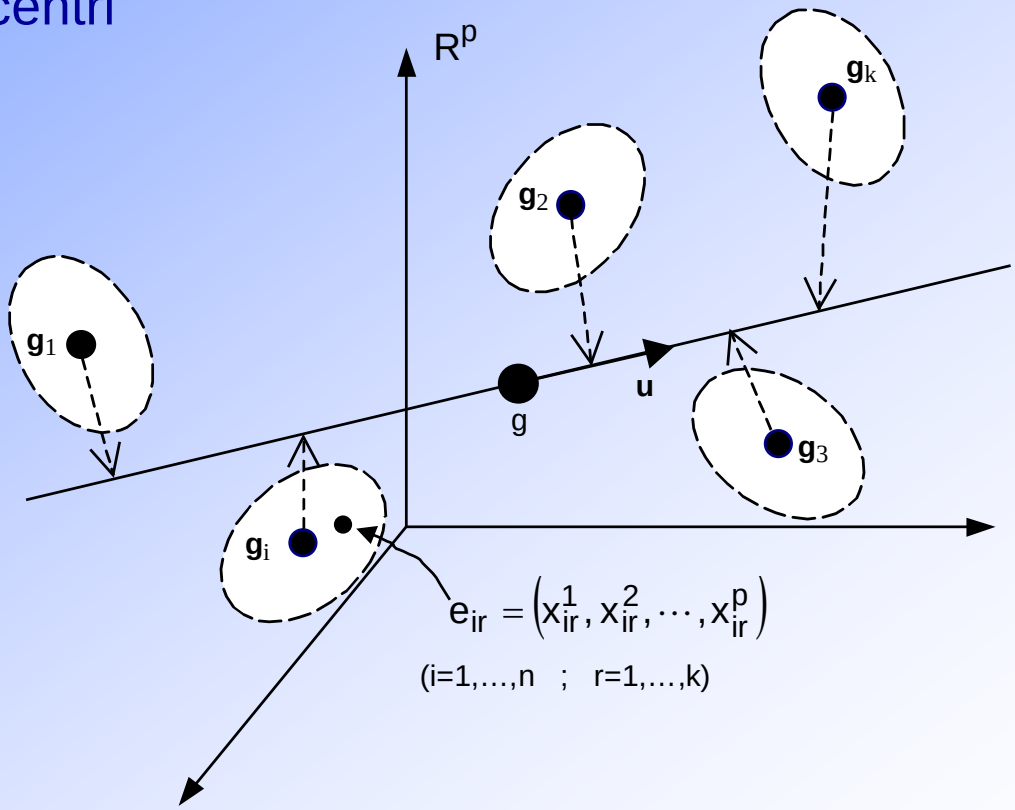
•Notazioni

- varianza gruppo r: $\mathbf{W}_r = \frac{1}{n_r} \sum_{e_i \in E_r} p_i (e_i - g_r)(e_i - g_r)'$
- varianza comune entro le classi: $\mathbf{W} = \sum_r q_r \mathbf{W}_r$
- varianza tra le classi: $\mathbf{B} = \sum_r q_r (g_r - g)(g_r - g)'$
- varianza totale: $\mathbf{V} = \sum_i p_i (e_i - g)(e_i - g)' = \mathbf{B} + \mathbf{W}$

Il caso generale: p variabili e k gruppi

OBIETTIVO

Ricercare le *k*-1 combinazioni lineari $\mathbf{y}_j$ delle *p* variabili esplicative $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …,$\mathbf{x}_p$ in grado di determinare il sottospazio tale che le proiezioni dei baricentri g_j (j=1,…k) risultino il più distanziate possibile, avendo al tempo stesso il massimo raggruppamento degli individui attorno ai rispettivi baricentri



L'Analisi Fattoriale Discriminante (AFD)

•Analisi in R^p: ***L'Analisi Fattoriale Discriminante ricerca un sottospazio di R^p che minimizzi le distanze tra individui di uno stesso gruppo e massimizzi invece quelle tra individui di gruppi diversi.***

•Obiettivo:
- **Massimizzare la varianza <u>tra</u> i gruppi**
- **Minimizzare la varianza 'inerzia <u>entro</u> i gruppi**

•Discriminazione •lineare:

Ipotizza la distribuzione multinormale delle variabili osservate e l'uguaglianza delle matrici di varianza-covarianza dei gruppi (ipotesi di <u>omoschedasticità</u>).

Utilizza la metrica di Mahalanobis definita dalla matrice W^{-1} .

•Discriminazione •quadratica:

(Metodo di Sebestyen)

Rifiuta l'ipotesi di omoschedasticità. Nel calcolo della distanza di un individuo da un gruppo considera k metriche definite dalle matrici W_r^{-1} (r=1, ..., k), definendo così un peso tanto maggiore quanto più il gruppo risulta disperso attorno al proprio baricentro.

la ricerca delle funzioni lineari discriminanti

OBIETTIVO

Ricercare le *k*-1 combinazioni lineari y_j delle *p* variabili esplicative $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ che consentono di separare al meglio i *k* gruppi.

- **Prima funzione lineare discriminante: y_1**

La prima combinazione lineare sarà la funzione: $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p$

che rende massima la varianza ***tra*** le classi e, quindi, minima la varianza ***entro*** le classi.

- **Seconda funzione lineare discriminante: y_2 e successive**

La seconda combinazione lineare: $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p$ sarà quella che, non correlata con la prima, renderà massima la varianza tra le classi, e così via

Discriminazione lineare: le ipotesi

- Ipotesi di omoschedasticità:

  uguaglianza delle matrici di var-cov entro i gruppi

- Ipotesi di multinormalità:

  le variabili esplicative hanno una distribuzione multinormale

La soluzione dell'ADL

- **Obiettivo:** $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{u'Bu}}{\mathbf{u'Wu}} = max$

- **Soluzione:** $\dfrac{\partial Q}{\partial u} = \dfrac{2\mathbf{Buu'Wu} - 2\mathbf{Wuu'Bu}}{(\mathbf{u'Wu}) \cdot (\mathbf{u'Wu})} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Buu'Wu} = \mathbf{Wuu'Bu}$$

- **posto:** $\lambda = \dfrac{\mathbf{u'Bu}}{\mathbf{u'Wu}}$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{Bu} = \lambda \mathbf{Wu} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W^{-1}Bu} = \lambda \mathbf{u}$

- **posto:** $\mathbf{v} = \mathbf{Wu}$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{BW^{-1}v} = \lambda \mathbf{v}$

L'autovalore λ esprime il potere discriminante associato a ciascuna funzione lineare discriminante

I legami con l'ACP

- **ACP con**
- **metrica M**

$$\mathbf{X'X\ M\ u} = \lambda \mathbf{u}$$

- **AFD**
- **lineare**

$$\mathbf{B\ W^{-1}v} = \lambda \mathbf{v}$$

- Quindi... *effettuare un'AFD sulle n unità utilizzando la metrica euclidea* $\mathbf{M=I}$ *equivale ad effettuare un'ACP sui k baricentri utilizzando la metrica* $\mathbf{W^{-1}}$.

• Esempio: il Credit Scoring

• Il ***Credit Scoring*** è un metodo statistico che consente di calcolare la probabilità, e quindi il rischio, di insolvenza legata alla concessione di un credito ad un cliente nuovo o già esistente.

• Il principio di base del ***Credit Scoring*** è che i ***buoni clienti*** ed i ***cattivi clienti*** si differenziano sulla base di caratteristiche osservabili sotto forma di variabili quantitative e qualitative.

Fase **DESCRITTIVA** → Campione storico → Buon cliente / Cattivo cliente

Fase **DECISIONALE** → Nuovo individuo → Buon cliente? / Cattivo cliente?

• Esempio: il Credit Scoring per i Prestiti Personali

Class. a priori →

1 = Buon Cliente (*max 1 insoluto*)

2 = Cliente Medio (*max 2-3 insoluti*)

3 = Cattivo Cliente (*>3 insoluti*)

Variabili →

- Età
- Reddito dichiarato (Lire × 1000)
- Debt burden (% indebitamento)
- Anni all'ultima occupazione
- Anni cliente (0 se nuovo)
- Importo Prestito (Lire × 1000)
- Durata Prestito (in mesi)

• La matrice dei dati

Variabili esplicative

Classificaz. a priori

id.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
i1	50	2.100	10	14	12	7.000	24	1
i2	40	2.300	20	12	20	5.000	12	1
i3	41	2.600	24	15	18	8.000	36	1
i4	44	1.900	16	20	15	5.000	12	1
:	:	:	:	:	:	:	:	:
i751	55	2.080	31	5	6	12.000	48	2
i752	61	1.929	45	8	1	6.000	24	2
:	:	:	:	:	:	:	:	:
i1301	31	1.200	50	6	0	10.000	48	3
i1302	25	880	40	2	0	15.000	48	3
i1700	34	1.400	45	7	0	15.000	48	3

Buoni Clienti

Clienti Intermedi

Cattivi Clienti

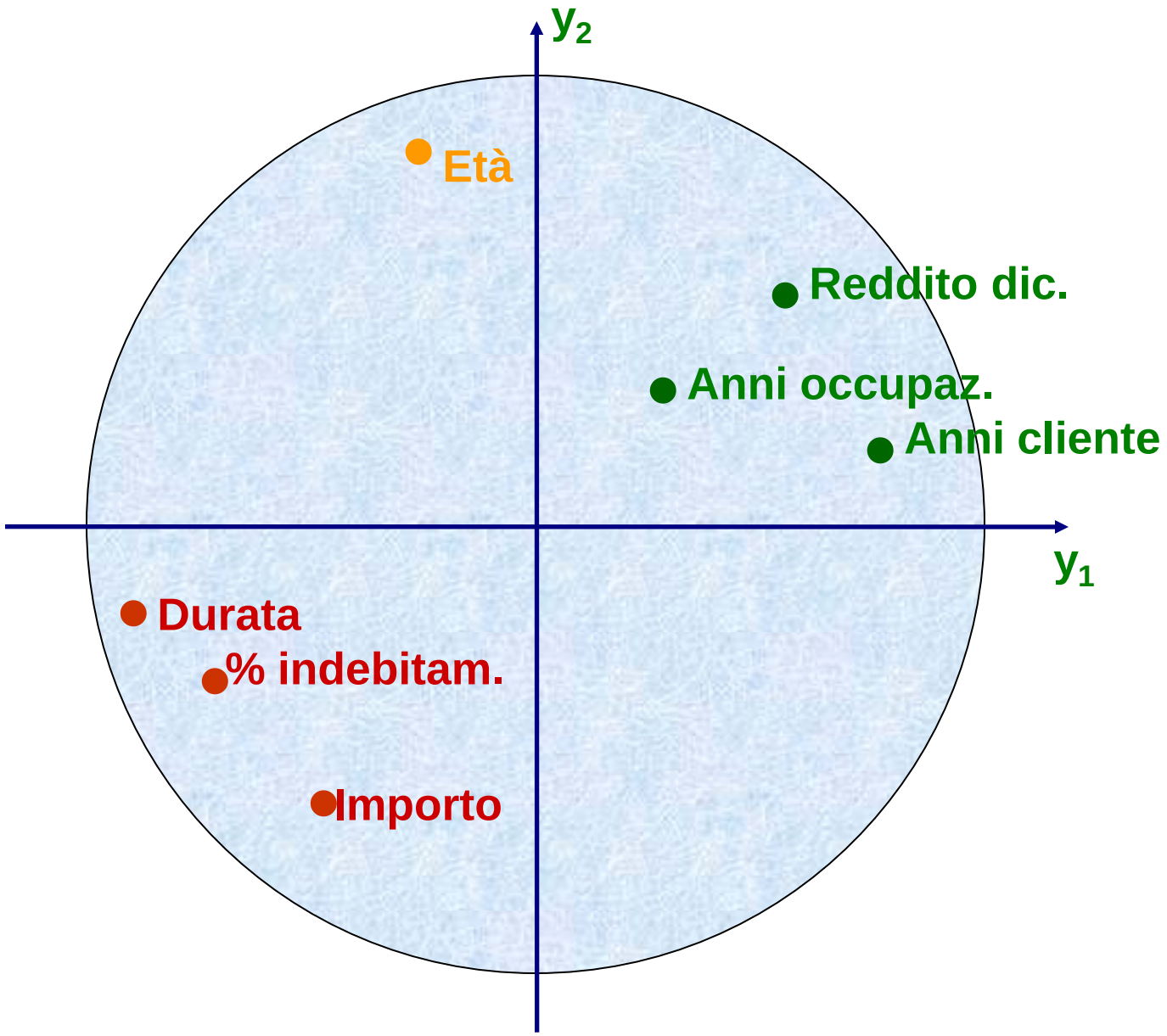
- **Autovalori e variabilità spiegata**

Num	Valore	%	% cum.	Istogramma
1	.773	54.3	54.3	••••••••••••••••••••••••••
2	.652	45.7	100.0	••••••••••••••••••••••

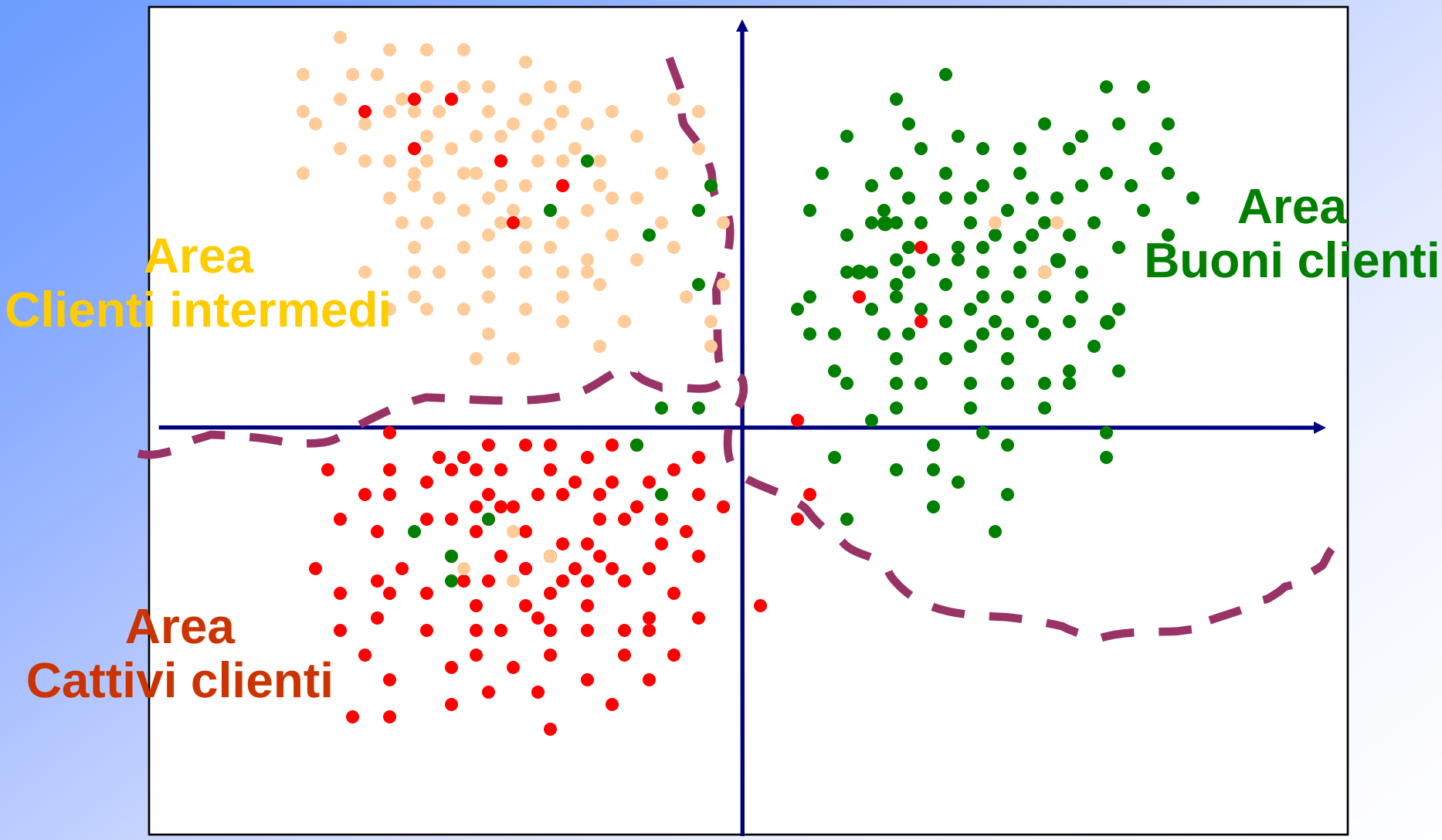
- **Correlazioni variabili-fattori**

	(1)	(2)
Età	-0.239	0.923
Reddito dic.	0.556	0.494
% indebitamento	-0.780	-0.416
Anni occupazione	0.439	0.344
Anni cliente	0.862	0.299
Importo	-0.473	-0.622
Durata	-0.835	-0.354

- **Cerchio delle correlazioni**



- **Rappresentazione delle unità**



- **La regola di decisione**

Ogni individuo verrà classificato nel gruppo il cui baricentro risulta più vicino...

$$e_i \longrightarrow G_j \Rightarrow d^2(e_i,g_j) = \mathit{min}[d^2(e_i,g_j) \quad j=1,\ldots,k]$$

… e sarà quindi possibile *confrontare la nuova partizione* così ottenuta *con quella definita a priori* sulla base delle *k* modalità della variabile da spiegare.

Le regole di classificazione

1. Regola grafica

Proiezione di una nuova unità come elemento supplementare sul piano fattoriale discriminante:

$$\phi_{\alpha}^{S} = (\mathbf{e}_s - \mathbf{g})' \ \mathbf{W}^{-1} \ \mathbf{u}$$

2. Regola numerica

Confronto delle k distanze dai baricentri dei gruppi:

$$\mathbf{e_s} \rightarrow E_r \quad \Leftrightarrow \quad d^2(\mathbf{e_s}, \mathbf{g_r}) = min\left[d^2(\mathbf{e_s}, \mathbf{g_r}) \ ; \ r = 1,...,k \right]$$

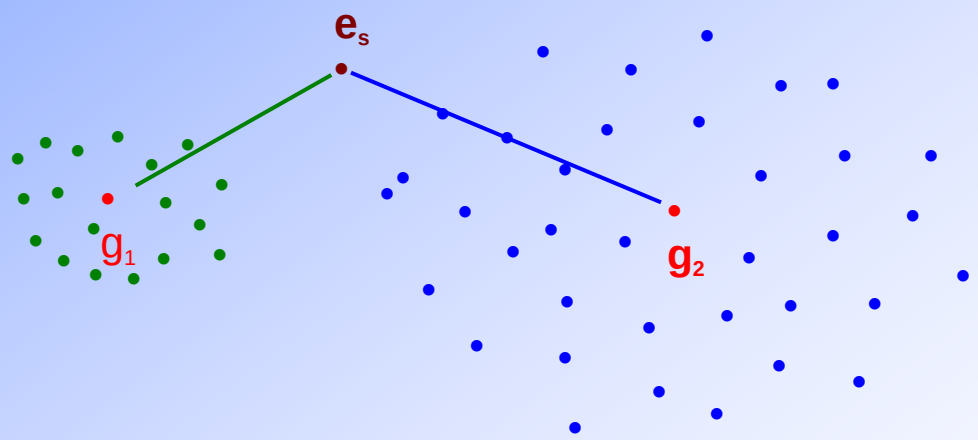
La scelta della distanza

•1. •**Distanza di Mahalanobis:** $(\mathbf{e}_s - \mathbf{g}_r)' \; \mathbf{W}^{-1} \; (\mathbf{e}_s - \mathbf{g}_r)$

•**Vantaggi:** di facile calcolo

•**Svantaggi:** non tiene conto della possibile diversa forma delle classi

•2. •**Distanza di Sebestyen:** $(\mathbf{e}_s - \mathbf{g}_r)' \; \mathbf{W}_r^{-1} \; (\mathbf{e}_s - \mathbf{g}_r)$



Il punto e_s risulta più vicino al baricentro del gruppo 1 che non a quello del gruppo 2.

Tuttavia, la differente dispersione dei due gruppi mette bene in evidenza come il punto debba essere considerato più logicamente parte del gruppo 2 che non del gruppo 1.

La distanza di Sebestyen, considerando k distanze dai baricentri, ciascuna ponderata con l'inverso della variabilità del gruppo corrispondente, consente di risolvere questo problema.

• Valutazione dei risultati

		Classificazione a priori			
		Buoni	Intermedi	Cattivi	TOT.
Classificazione a posteriori	Buoni	580	95	38	713
	Intermedi	120	380	64	564
	Cattivi	50	75	298	423
	TOT.	750	550	400	1700

% ben classificati → (580+380+298)/1700 = 74,0%

• Riepiloghiamo?...

• Consideriamo una matrice con n unità su cui sono osservate p variabili;

• Le unità sono a priori ripartite in k gruppi sulla base delle diverse modalità di una variabile da spiegare;

• Si effettua un'analisi fattoriale discriminante per valutare il potere discriminante delle variabili esplicative;

• Il numero di fattori che è possibile estrarre è uguale a k-1 *(normalmente k<=3)*;

• Si proiettano le unità sul piano fattoriale ;

• Se i gruppi risultano ben separati, allora le variabili esplicative hanno un buon potere discriminante e si può passare alla fase decisionale;

• Una nuova unità, di cui ovviamente non si conosce il gruppo di appartenenza, viene proiettata in supplementare sul piano determinato dalle unità attive;

• In base ad uno dei criteri di classificazione scelti, l'unità verrà assegnata al gruppo al quale risulta più vicina.

•La validazione
•dei risultati

•Classificazioni

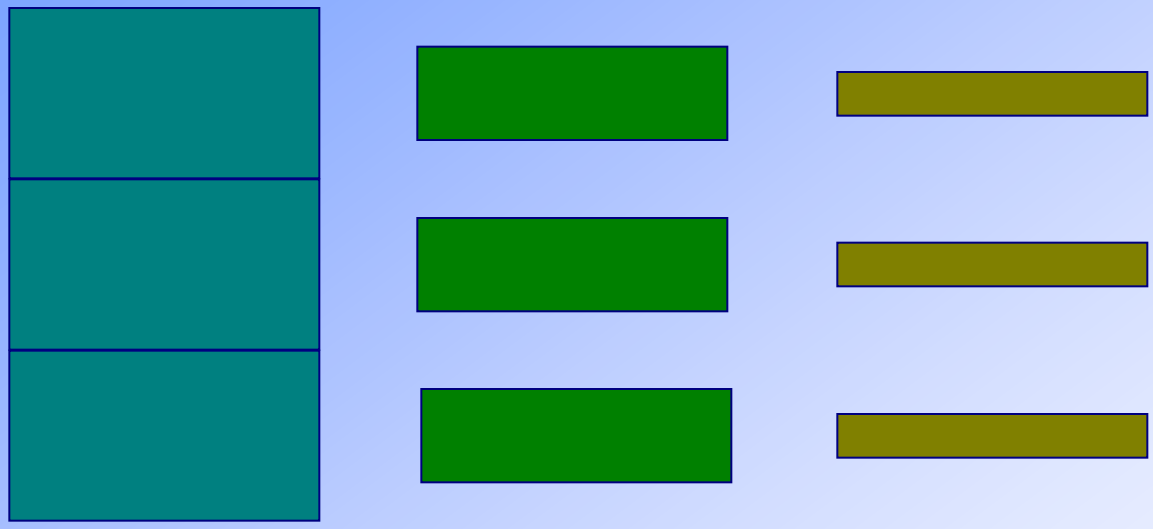
•a posteriori

•Classificazioni •a priori	Buoni	Intermedi	Cattivi	
Buoni	580	120	50	750
Intermedi	95	380	75	550
Cattivi	38	64	298	400

•% ben classificati ⇨ (580+380+298)/1700 = 74,0%

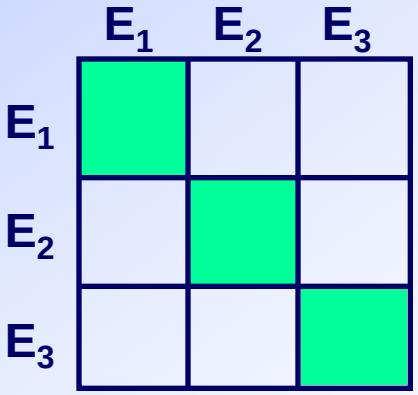
La stabilità dei risultati: il campione test

- k=3



campione totale | campione base | campione test

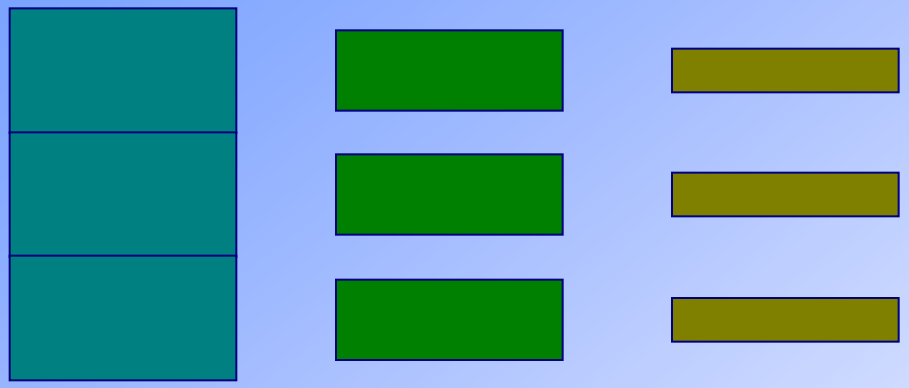
Sul campione base viene costruita la regola di classificazione che viene poi applicata al campione test. Su entrambi i campioni viene calcolata la % di corretta classificazione.



$$\% \; b.c. = \frac{Traccia}{n}$$

La stabilità dei risultati

- k=3

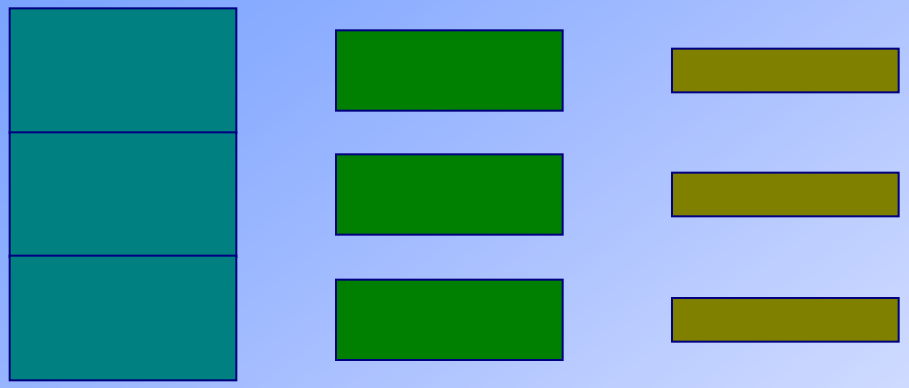


- Cross-validation

1. *Si scelgono n_1 elementi che costituiscono il campione di base, con i rimanenti n_2 a formare il campione test, facendo in modo che n_2 risulti molto più piccolo di n_1 e che n_1/n_2 sia un numero intero;*
2. *Si costruisce la regola di decisione sul campione di base e la si testa sul campione test, calcolando la % di b.c., p_i ;*
3. *Si ripete lo stesso procedimento per $i = n_1/n_2$ volte;*
4. *Si stima la % di b.c. complessiva come media delle p_i :* $$\%\,\text{b.c.} = \frac{n_2}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1/n_2} p_i$$

La stabilità dei risultati

- k=3

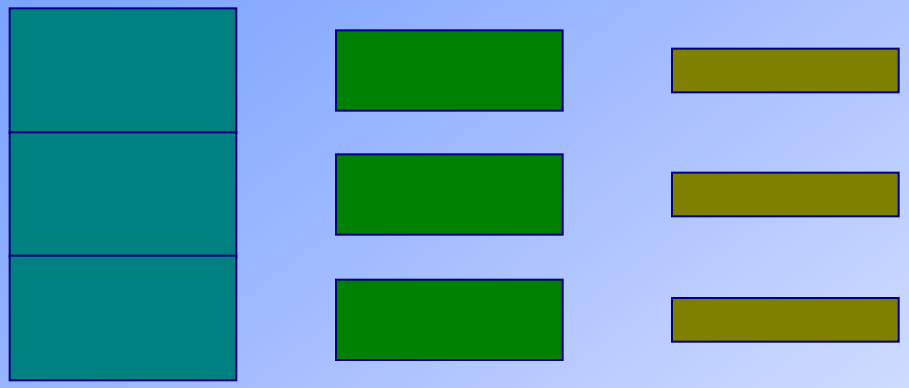


- Jackknife

1. *Dal campione totale viene escluso un elemento, che costituisce il campione-test, tutti gli altri a costituire il campione di base;*
2. *Si costruisce la regola di decisione sul campione di base e la si testa sull'elemento escluso;*
3. *Si definisce una variabile a che assume valore 1 se l'elemento è classificato correttamente, 0 altrimenti;*
4. *Si ripete il procedimento escludendo, uno alla volta, tutti gli elementi;*
5. *Si stima la % di b.c. come:* $\%\,\text{b.c.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}$

La stabilità dei risultati

- k=3



- **Bootstrap**

1. *Dal campione totale si estraggono, con reintroduzione, n_1 elementi che costituiscono il campione di base e n_2 elementi che costituiscono il campione-test, con $n_1+n_2=n$;*
2. *Si costruisce la regola di decisione sugli n_1 elementi del campione di base e la si testa sugli n_2 elementi del campione test;*
3. *Si calcola la % di b.c. ;*
4. *Si ripete il procedimento centinaia o migliaia di volte;*
5. *Si stima la % di b.c. come media delle % di b.c. precedentemente calcolate.*

I criteri di selezione delle variabili

Riducono i costi di gestione, elaborazione e rilevazione legati al numero di variabili considerate, migliorando inoltre l'affidabilità dei risultati

- **Metodi di selezione stepwise**

  - **Seleziona, al passo q, il gruppo di q variabili per le quali risulta:**

1. **Criterio della traccia di Lawley-Hotelling**

$$tr\left(\mathbf{W}_q^{-1}\mathbf{B}_q\right) = max$$

2. **Criterio del determinante di Wilks**

$$\frac{det\left(\mathbf{W}_q\right)}{det\left(\mathbf{V}_q\right)} = max$$

3. **Criterio della % di ben classificati**

$$\%\ b.c. = max$$

Due casi particolari:

- **Caso di variabili qualitative e quantitative**

1. ACM sulla tabella dei dati ricodificati

2. Scelta del numero di dimensioni (Fattori)

3. AD sulle nuove variabili

- **Caso di due gruppi**

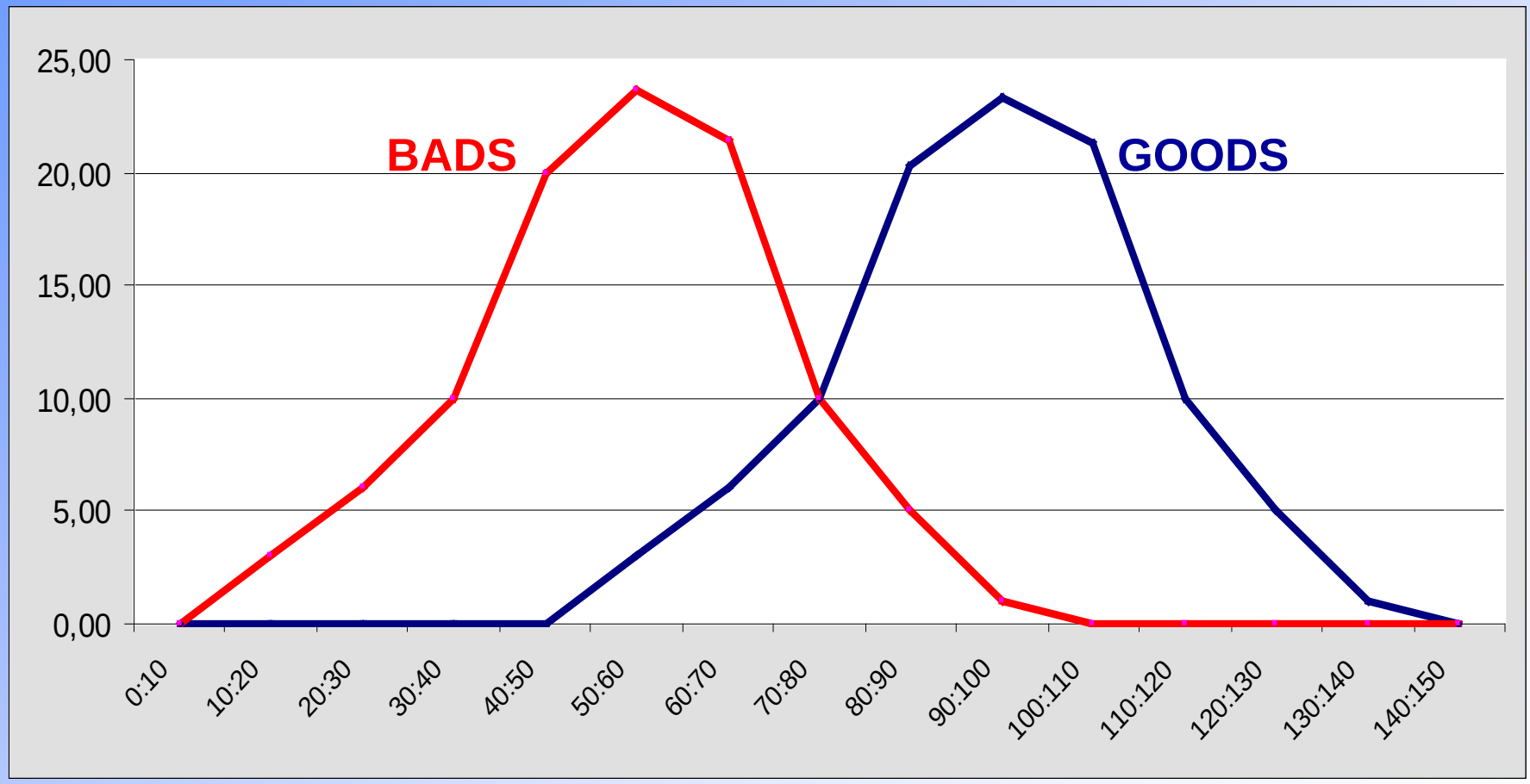
- Una sola funzione discriminante

- Un solo punto di taglio

• Esempio di tabella dei punteggi

Classi di punteggi	GOODS	% GOODS nelle classi	% cum. GOODS	BADS	% BADS nelle classi	% cum. BADS
0:10	0	0,00	0,00	0	0,00	0,00
10:20	0	0,00	0,00	15	3,00	3,00
20:30	0	0,00	0,00	30	6,00	9,00
30:40	0	0,00	0,00	50	10,00	19,00
40:50	0	0,00	0,00	100	20,00	39,00
50:60	36	3,00	3,00	118	23,60	62,60
60:70	72	6,00	9,00	107	21,40	84,00
70:80	120	10,00	19,00	50	10,00	94,00
80:90	244	20,33	39,33	25	5,00	99,00
90:100	280	23,33	62,67	5	1,00	100,00
100:110	256	21,33	84,00	0	0,00	100,00
110:120	120	10,00	94,00	0	0,00	100,00
120:130	60	5,00	99,00	0	0,00	100,00
130:140	12	1,00	100,00	0	0,00	100,00
140:150	0	0,00	100,00	0	0,00	100,00
TOT	*1200*	*100,00*		*500*	*100,00*	

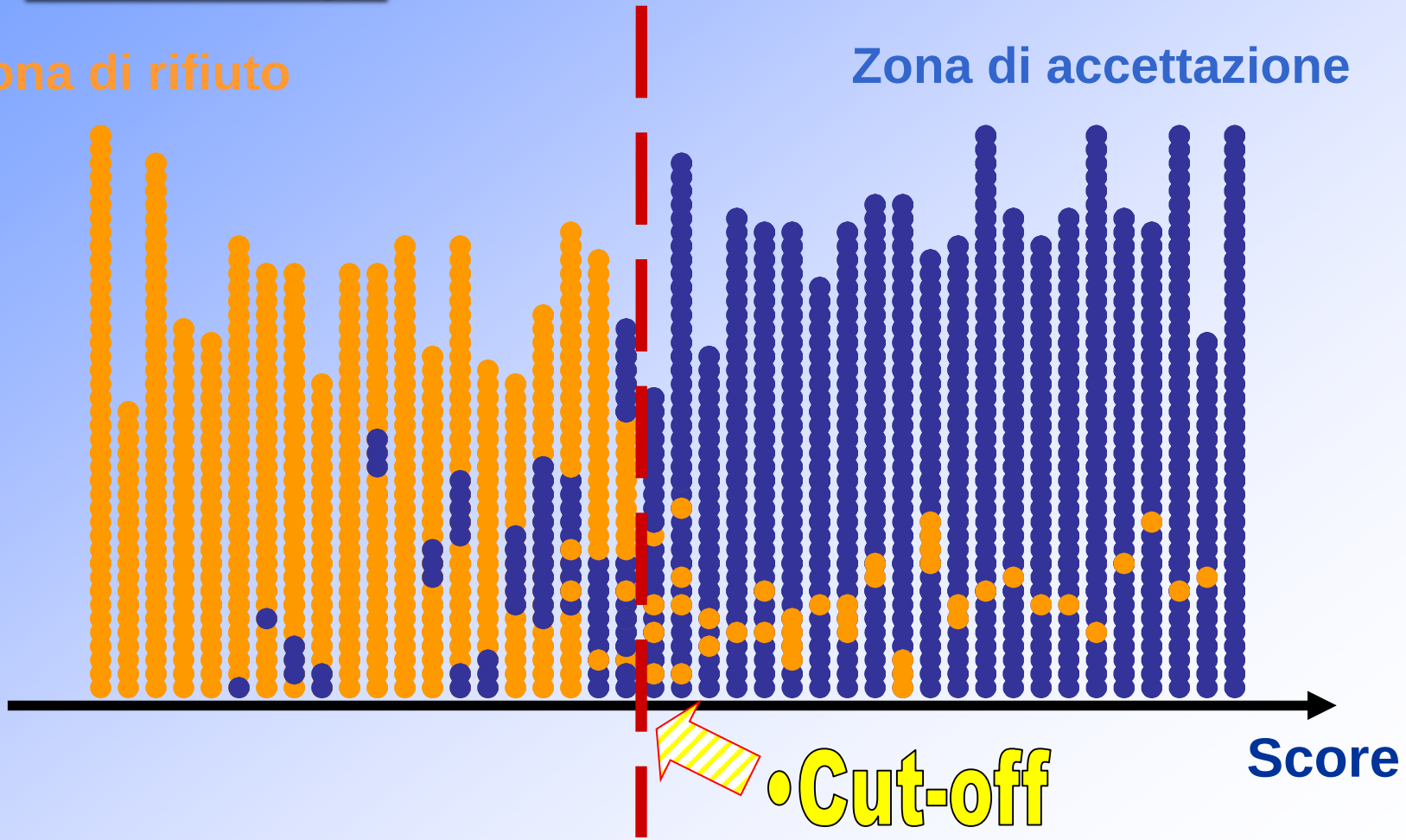
- **Scelta del punto di taglio**



Il punto di taglio

- **Nel caso in cui è k=2, esiste un'*unica funzione discriminante* (*Score*);**

- **La regola di decisione per classificare un nuovo individuo sarà quindi individuata da un *unico punto di taglio* (*Cut-off*).**



Un altro esempio: gli Iris di Fisher

• *Iris setosa*

• *Iris versicolor*

• *Iris virginica*

Fase **DESCRITTIVA** → Campione storico → Setosa, Versicolor, Virginica

Fase **DECISIONALE** → Nuovo iris → Setosa, Versicolor, Virginica

- **Esempio: gli iris di Fisher**

Classe.
a priori

1 = Setosa 2 = Versicolor 3 = Virginica

Variabili

- sepal length
- sepal widh
- petal length
- petal widh

• La matrice dei dati

Variabili esplicative

Classificaz. a priori

	id.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Setosa	i1	50	33	14	14	1
	i2	46	34	14	12	1
	i3	46	36	10	15	1
	i4	51	33	17	20	1
	:	:	:	:	:	:
Vesicolor	i51	65	28	46	15	2
	i52	62	22	45	15	2
	:	:	:	:	:	:
Virginica	i148	67	31	56	24	3
	i149	63	28	51	15	3
	i150	69	31	51	23	3

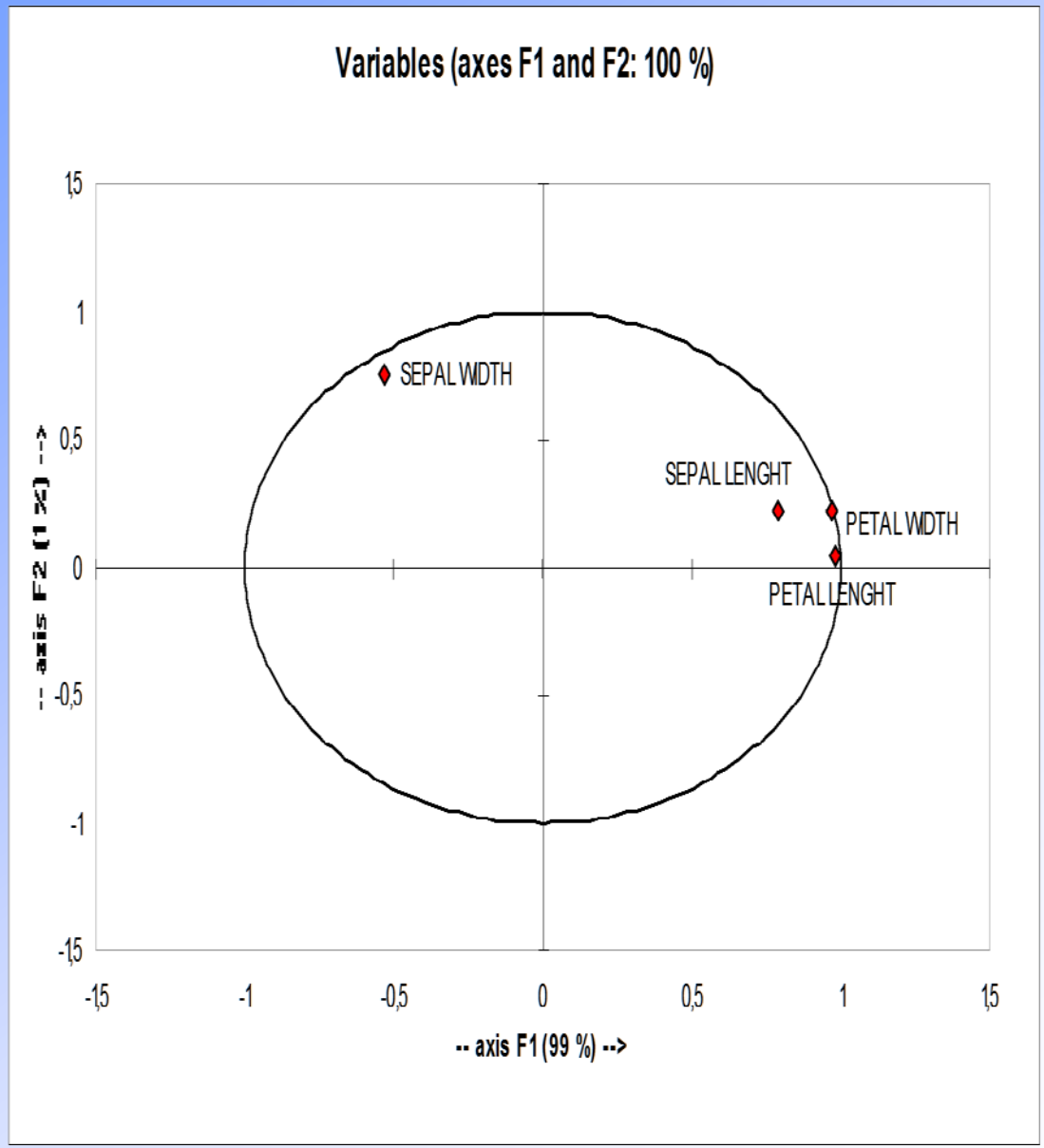
- **Autovalori e variabilità spiegata**

Num	Valore	%	% cum.	Istogramma
1	.32.19	99.12	99.12	●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●
2	0.28	0.88	100.0	●●●

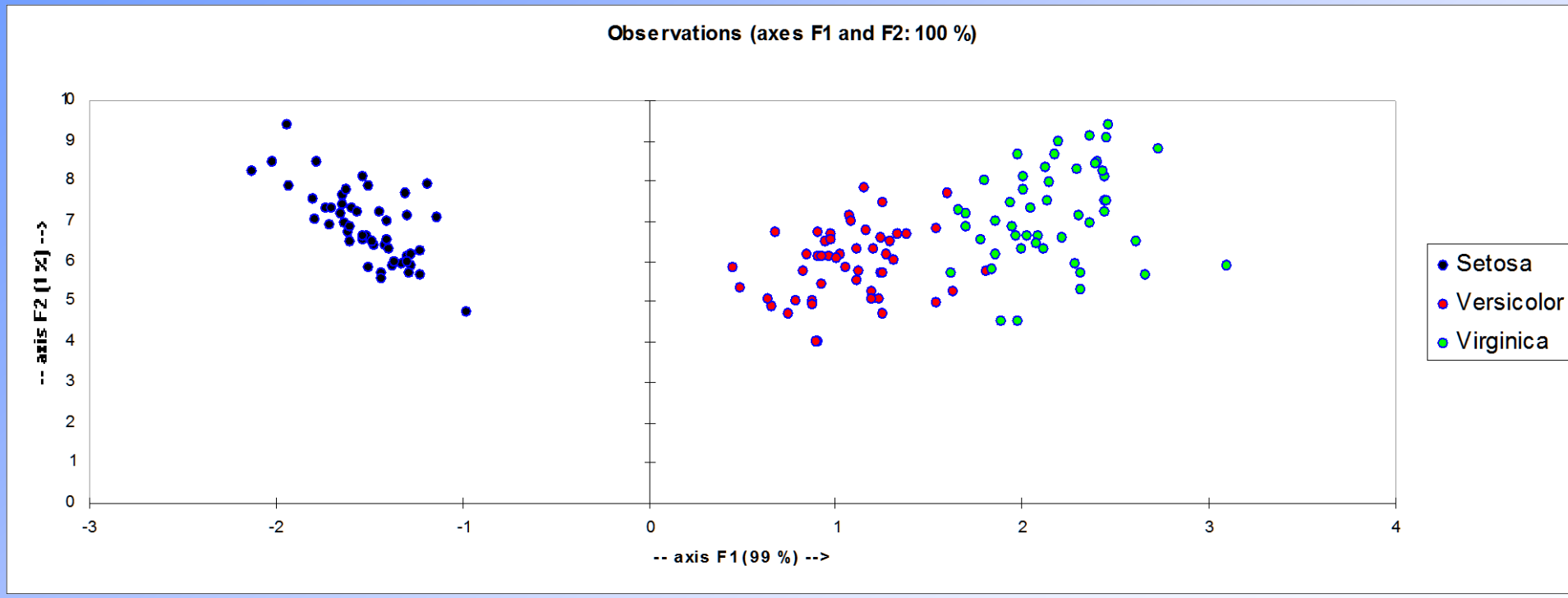
- **Correlazioni variabili-fattori**

	(1)	(2)
Sepal Lenght	0.792	0.218
Sepal width	-0.531	0.758
Petal lenght	0.985	0.046
Petal width	0.973	0.223

• Cerchio delle correlazioni



Rappresentazione delle unità



• Valutazione dei risultati

		Classificazione a posteriori			
		Setosa	Versicolor	Virginica	TOT.
Classificazione a priori	Setosa	50	0	0	50
	Versicolor	0	48	2	50
	Virginica	0	1	49	50
	TOT.	50	49	51	150

% ben classificati → (50+48+49)/150 = 98,0%